Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 13 (1918)

Artikel: Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der Lebensversicherungsrechnung

Autor: Schenker, O.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550816

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der Lebensversicherungsrechnung.

Von Dr. **O. Schenker**, Bern.

Die vorliegende kleine Arbeit knüpft an eine solche im elften Heft der „Mitteilungen“ an, kann also als deren Fortsetzung betrachtet werden. Es handelt sich um die Auflösung der linearen Integralgleichung:

$$\int_0^t F(a-x)\,dx + \int_t^a f(x)\,F(a-x)\cdot dx = 1 \qquad (1)$$

$F(a-x)$ ist gegebene Funktion von $a-x$, $f(x)$ ist gesuchte Funktion von x; a kann man jeden beliebigen Wert beilegen, t ist eine verfügbare Konstante. Wir werfen nun die Frage auf: welche Funktionen F gestatten eine exakte Auflösung der Gleichung (1)? Wir haben bereits im elften Heft der „Mitteilungen“ gesehen, dass man eine exakte Auflösung erreicht, wenn $F(a-x)$ eine algebraische Funktion ist. Es gibt aber noch andere solcher Funktionen, z. B. die Funktion:

$$F(x) = a\cdot E^x + b\cdot E^{2x},$$

wo a, b und E verfügbare Konstanten sind. Wir wollen diese Funktion gleichzeitig dazu benützen, um die Überlebenswahrscheinlichkeiten eines Ehepaars, sagen wir vom Alter 31/26, näherungsweise darzustellen. Wir setzen zu diesem Ende:

$$
\begin{aligned}
{}_0p_{31} \cdot {}_0p_{26} &= a\,E^0 + b\,E^0 = F(0)\\
{}_{30}p_{31} \cdot {}_{30}p_{26} &= a\,E^{30} + b\,E^{60} = F(30)\\
{}_{60}p_{31} \cdot {}_{60}p_{26} &= a\,E^{60} + b\,E^{120} = F(60),
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
1 &= a + b\\
0{,}65\,953 &= a\,E^{30} + b \cdot E^{60}\\
0{,}19\,638 &= a\,E^{60} + b \cdot E^{120},
\end{aligned}
$$

wenn für F Zahlenwerte gesetzt werden.

Setzt man abkürzend $E^{30} = \mathrm{E}$, so resultieren die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 = a + b\\
y_1 &= 0{,}65\,953 = a\,\mathrm{E} + b \cdot \mathrm{E}^2\\
y_2 &= 0{,}19\,638 = a\,\mathrm{E}^2 + b \cdot \mathrm{E}^4;
\end{aligned}
$$

Rechnet man aus den beiden ersten Gleichungen a und b aus und substituiert die erhaltenen Werte in der dritten, so bekommen wir die Gleichung:

$$
y_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{E} & \mathrm{E}^2 \end{vmatrix} = \mathrm{E}^2 \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & \mathrm{E}^2 \end{vmatrix} + \mathrm{E}^4 \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ \mathrm{E} & y_1 \end{vmatrix},
$$

oder

$$
y_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{E} \end{vmatrix} = \mathrm{E} \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & \mathrm{E}^2 \end{vmatrix} + \mathrm{E}^3 \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ \mathrm{E} & y_1 \end{vmatrix},
$$

oder

$$
y_2 (\mathrm{E} - 1) = \mathrm{E}\,(y_0\,\mathrm{E}^2 - y_1) + \mathrm{E}^3\,(y_1 - y_0\,\mathrm{E}),
$$

oder

$$
y_0\,\mathrm{E}^4 - (y_0 + y_1)\,\mathrm{E}^3 + (y_1 + y_2)\,\mathrm{E} - y_2 = 0;
$$

Diese Gleichung ist für $\mathrm{E} = 1$ erfüllt; das Gleichungspolynom linker Hand ist daher ohne Rest durch $\mathrm{E} - 1$ teilbar. In der Tat ist:

$$
\begin{aligned}
y_0\,\mathrm{E}^4 - (y_0 + y_1)\,\mathrm{E}^3 + (y_1 + y_2)\,\mathrm{E} - y_2 : \mathrm{E} - 1 &=\\
= y_0\,\mathrm{E}^3 - y_1\,\mathrm{E}^2 - y_1\,\mathrm{E} + y_2;
\end{aligned}
$$

E wird darum aus der Gleichung bestimmt:

$$E^3 - 0{,}65\,953\ E^2 - 0{,}65\,953\ E + 0{,}19\,638 = 0$$

Wir wollen bloss denjenigen Wert von E festhalten, welcher zwischen 0 und 1 liegt. Die Anwendung des Sturmschen Satzes bestätigt das Vorhandensein einer solchen Wurzel, welche sich nach der Newtonschen (von Fourier verbesserten) Näherungsmethode berechnet zu $E = 0{,}257\,3529$; die entsprechenden Werte von a und b sind $a = 3{,}104\,282$; $b = -2{,}104\,282$, ferner hat $E = E^{\frac{1}{30}}$ den Wert $0{,}955\,7647$; darum ist nun $F(x) = 3{,}104\,282 \cdot 0{,}955\,7647^x - 2{,}104\,282 \cdot 0{,}955\,7647^{2x}$;

Da $F(x)$ von der Form $a\,E^x + b\,E^{2x}$ ist, so lautet nunmehr die Gleichung (1):

$$\int_0^t [a\,E^{a-x} + b\,E^{2(a-x)}]\,dx + \int_t^a f(x)\,[a\,E^{a-x} + b\,E^{2(a-x)}]\,dx = 1 \qquad (1^a);$$

Durch Differenzieren nach a erhält man hieraus die Gleichungen:

$$\log E \int_0^t [a\,E^{a-x} + 2\,b\,E^{2(a-x)}]\,dx + f(a)\,(a+b) + \log E \int_t^a f(x)\,[a\,E^{a-x} + 2\,b\,E^{2(a-x)}]\,dx = 0 \qquad (1^b)$$

$$(\log E)^2 \int_0^t [a\,E^{a-x} + 4\,b\,E^{2(a-x)}]\,dx + f'(a)\,(a+b) + \log E \cdot f(a)\,(a+2\,b) + (\log E)^2 \int_t^a f(x)\,[a\,E^{a-x} + 4\,b\,E^{2(a-x)}] \cdot dx = 0; \qquad (1^c)$$

Aus diesen drei Gleichungen, nämlich:

$$\int_0^t [a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}]\, dx + \int_t^a f(x)\, [a \cdot E^{a-x} + b \cdot$$

$$\cdot E^{2(a-x)}] \cdot dx = 1$$

$$\int_0^t [a E^{a-x} + 2 b E^{2(a-x)}]\, dx +$$

$$+ \int_t^a f(x)\, [a E^{a-x} + 2 b E^{2(a-x)}]\, dx + \frac{f(a)\,(a+b)}{\log E} = 0$$

$$\int_0^t [a E^{a-x} + 4 b E^{2(a-x)}]\, dx + \int_t^a f(x)\, [a E^{a-x} +$$

$$+ 4 b \cdot E^{2(a-x)}]\, dx + \frac{f'(a)\,(a+b)}{(\log E)^2} + \frac{f(a)\,(a+2b)}{\log E} = 0$$

können wir eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Bestimmung von $f(a)$ herleiten, indem wir die erste Gleichung mit 1 und die beiden andern mit den verfügbaren Konstanten k_1 bzw. k_2 multiplizieren und die so erhaltenen Gleichungen addieren; man erhält so die Gleichung:

$$\int_0^t [a\,(1 + k_1 + k_2)\, E^{a-x} + b\,(1 + 2k_1 + 4k_2)\, E^{2(a-x)}]\, dx +$$

$$+ k_1 \cdot \frac{f(a) \cdot (a+b)}{\log E} + k_2 \cdot \frac{f(a)\,(a+2b)}{\log E} + k_2 \cdot$$

$$\cdot \frac{f'(a)(a+b)}{(\log E)^2} = 1;$$

Setzt man $1 + k_1 + k_2 = 0$ und $1 + 2k_1 + 4k_2 = 0$, also $k_1 = -\frac{3}{2}$ und $k_2 = \frac{1}{2}$, so verbleibt die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{(\log E)^2} \cdot f''(\alpha) + \frac{1}{2 \cdot \log E} (a + 2b - 3a - 3b) \cdot \cdot f(\alpha) = 1,$$

oder

$$\frac{1}{2} \frac{a+b}{(\log E)^2} \cdot f''(\alpha) - \frac{1}{2 \log E} (2a + b) \cdot f(\alpha) = 1 \quad (2)$$

Durch Differentiation nach α erhält man hieraus die weitere Gleichung:

$$(a + b) \cdot f''(\alpha) - \log E (2a + b) \cdot f'(\alpha) = 0; \quad (2^a)$$

$f(\alpha)$ hat somit die Form: $f(\alpha) = C_1 + C_2 \cdot e^{A\alpha}$, wo C_1, C_2 und A zu bestimmende Konstanten sind. A bekommt man durch Substitution von $f(\alpha) = C_1 + C_2 \cdot \cdot e^{A\alpha}$ in die Gleichung (2^a); man erhält:

$$(a + b) \cdot A^2 \cdot e^{A\alpha} - \log E (2a + b) \cdot A \cdot e^{A\alpha} = 0,$$

oder

$$A [(a + b) \cdot A - \log E (2a + b)] \cdot e^{A\alpha} = 0;$$

Diese Gleichung ist bloss erfüllt, wenn

$$A = A_1 = 0 \text{ oder } A = A_2 = \frac{2a + b}{a + b} \cdot \log E;$$

die partikulären Integrale der Gleichung (2^a) sind also von der Form $f(\alpha) = C_1$ und

$$f(\alpha) = C_2 \cdot e^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot \alpha};$$

das vollständige Integral von (2^a) lautet demnach:

$$f(\alpha) = C_1 + C_2 \cdot e^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot \alpha}; \quad (3)$$

C_1 wird ermittelt, indem man diesen Wert von $f(a)$ in der Gleichung (2) substituiert:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{(\log E)^2} \cdot C_2 \cdot \frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot e^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot a} -$$

$$- \frac{1}{2 \log E} (2a+b)\left(C_1 + C_2 \cdot e^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot a}\right) = 1$$

also:
$$C_1 = - \frac{2 \log E}{2a+b}; \tag{4}$$

Substituiert man die Werte von $f(a)$ und C_1 gemäss den Gleichungen (3), bzw. (4) in der Gleichung (1^a), so erhält man:

$$\int_0^t \left[a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}\right] dx + \int_t^a \left[\frac{-2 \log E}{2a+b} + \right.$$

$$\left. + C_2 E^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot x}\right] \left[a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}\right] dx = 1,$$

oder

$$\int_0^t \left[a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}\right] dx - \frac{2a \cdot \log E}{2a+b} \int_t^a E^{a-x} \cdot dx -$$

$$- \frac{2b \cdot \log E}{2a+b} \int_t^a E^{2(a-x)} dx + a \cdot C_2 \int_t^a E^{a + \frac{a}{a+b} \cdot x} \cdot dx +$$

$$+ b \cdot C_2 \int_t^a E^{2a - \frac{b}{a+b} \cdot x} \cdot dx = 1,$$

oder

$$-\frac{a}{\log E}\Big|_0^t E^{a-x} - \frac{b}{2\log E}\Big|_0^t E^{2(a-x)} +$$

$$+\frac{2a}{2a+b}\Big|_t^a E^{a-x} + \frac{b}{2a+b}\Big|_t^a E^{2(a-x)} +$$

$$\frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\Big|_t^a E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot x} - \frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\Big|_t^a E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot x} = 1,$$

oder

$$-\frac{a}{\log E}(E^{a-t} - E^a) - \frac{b}{2\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] +$$

$$+\frac{2a}{2a+b}(1 - E^{a-t}) + \frac{b}{2a+b}[1 - E^{2(a-t)}] +$$

$$+\frac{(a+b)\,C_2}{\log E}\left[E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a} - E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot t}\right] -$$

$$-\frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\left[E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a} - E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot t}\right] = 1,$$

oder

$$E^a\left[\frac{-a}{\log E\cdot E^t} + \frac{a}{\log E} - \frac{2a}{(2a+b)\,E^t} - \frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}\right] + E^{2a}\left[\frac{-b}{2\log E\cdot E^{2t}} + \frac{b}{2\log E} -\right.$$

$$\left.-\frac{b}{(2a+b)\,E^{2t}} + \frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\cdot\frac{E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}}{E^t}\right] = 0;$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von a bestehen muss, so müssen die Koeffizienten von E^a und E^{2a} einzeln Null sein, also:

$$-\frac{-a}{\log E \cdot E^t} + \frac{a}{\log E} - \frac{2a}{(2a+b)E^t} - \frac{(a+b)C_2}{\log E} \cdot$$

$$\cdot E^{\frac{a}{a+b} \cdot t} = 0 \qquad (5)$$

$$-\frac{b}{2\log E \cdot E^{2t}} + \frac{b}{2\log E} - \frac{b}{(2a+b)E^{2t}} + \frac{(a+b)C_2}{\log E} \cdot$$

$$\cdot \frac{E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}}{E^t} = 0 \qquad (6);$$

Multipliziert man Gleichung (6) mit E^t und addiert das Produkt zur Gleichung (5), so bekommt man:

$$-\frac{2a+b}{2\log E \cdot E^t} + \frac{2a+b \cdot E^t}{2\log E} - \frac{1}{E^t} = 0,$$

oder

$$bE^{2t} + 2a \cdot E^t - (2a + b + 2\log E) = 0,$$

somit

$$E^t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b(2a + b + 2\log E)}}{b} =$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{(a+b)^2 + 2b\log E}}{b}; \qquad (7)$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von t.

Zur Bestimmung von C_2 multiplizieren wir die Gleichung (5) mit b, (6) mit $-2a \cdot E^t$ und addieren die Produkte, so resultiert die Gleichung:

$$\frac{a \cdot b - a \cdot b \cdot E^t}{\log E} - C_2 \frac{\cdot E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}}{\log E} (b + 2a)(a + b) = 0,$$

woraus

$$C_2 = a\, b\, (1 - E^t) : (a + b)(2a + b)\, E^{\frac{a}{a+b} \cdot t} \qquad (8)$$

Zur Kontrolle kann man C_2 aus (5) berechnen; man bekommt:

$$C_2 = \frac{-a(2a + b) + a(2a + b) \cdot E^t - 2a \cdot \log E}{E^t (2a + b)(a + b)\, E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}};$$

Diese beiden Werte von C_2 müssen einander gleich sein; in der Tat ergibt die Gleichsetzung:

$$a \cdot b\, (1 - E^t) \cdot E^t = -a(2a + b) + a(2a + b)\, E^t - \\ - 2a \cdot \log E, \text{ oder}$$

$$b \cdot E^{2t} + 2a \cdot E^t - (2a + b + 2 \log E) = 0 \text{ und}$$

$$E^t = \frac{-a \pm \sqrt{(a + b)^2 + 2\, b \log E}}{b},$$

wie es auch nach Gleichung (7) sein soll.

Zur Überprüfung der Rechnung lohnt es sich, C_2 mittelst Gleichung (1^b) zu berechnen, indem man hier $f(a)$ und C_1 gemäss den Gleichungen (3) und (4) substituiert; in der Tat erhält man:

$$0 = \int_0^t [a\,E^{a-x} + 2\,b\,E^{2(a-x)}]\,dx +$$

$$+ \int_t^a \left[\frac{-2\log E}{2\,a+b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot x}\right][a \cdot E^{a-x} + 2\,b\,E^{2(a-x)}] \cdot$$

$$\cdot\, dx + \frac{a+b}{\log E}\left(\frac{-2\log E}{2\,a+b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}\right),$$

oder

$$0 = -\frac{a}{\log E}(E^{a-t} - E^{a}) - \frac{b}{\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] +$$

$$+ \frac{2\,a}{2\,a+b}(1 - E^{a-t}) + \frac{2\,b}{2\,a+b}[1 - E^{2(a-t)}] +$$

$$+ C_2 \int_t^a a \cdot E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot x} + C_2 \int_t^a 2\,b \cdot E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot x} \cdot dx +$$

$$+ \frac{a+b}{\log E}\left(\frac{-2\log E}{2a+b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}\right),$$

oder

$$0 = -\frac{a}{\log E}(E^{a-t} - E^{a}) - \frac{b}{\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] +$$

$$+ \frac{2\,a}{2\,a+b}(1 - E^{a-t}) + \frac{2\,b}{2\,a+b}[1 - E^{2(a-t)}] +$$

$$+ C_2 \frac{(a+b)}{\log E}\left[E^{\frac{a(2a+b)}{a+b}} - E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot t}\right] -$$

$$- \frac{2\,C_2\,(a+b)}{\log E}\left[E^{\frac{a(2a+b)}{a+b}} - E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot t}\right] +$$

$$+ \frac{a+b}{\log E}\left(\frac{-2\log E}{2a+b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}\right)$$

oder nach Reduktion:

$$\frac{-a}{\log E}(E^{a-t}-E^{a})-\frac{b}{\log E}[E^{2(a-t)}-E^{2a}]-\frac{2a}{2a+b}\cdot$$

$$\cdot E^{a-t}-\frac{2b}{2a+b}E^{2(a-t)}-C_2\cdot\frac{a+b}{\log E}E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot t}+$$

$$+2C_2\frac{a+b}{\log E}E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot t}=0,$$

oder

$$E^{a}\left[\frac{-a}{\log E\cdot E^{t}}+\frac{a}{\log E}-\frac{2a}{(2a+b)E^{t}}-\frac{(a+b)C_2}{\log E}\cdot E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}\right]+$$

$$+E^{2a}\left[\frac{-b}{\log E\cdot E^{2t}}+\frac{b}{\log E}-\frac{2b}{(2a+b)E^{2t}}+\frac{2(a+b)C_2}{\log E}\cdot\frac{E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}}{E^{t}}\right]=0;$$

Indem man die Koeffizienten von E^{a} und E^{2a} Null setzt, erhält man wiederum die Gleichungen (5) und (6). Aber auch Gleichung (1[e]) muss die Gleichungen (5) und (6) ergeben; in der Tat, führt man in ihr die Werte von $f(a)$ und C_1 entsprechend den Gleichungen (3) und (4) ein, so werden wir auf die Gleichung geführt:

$$0=\frac{-a}{\log E}(E^{a-t}-E^{a})-\frac{2b}{\log E}[E^{2(a-x)}-E^{2a}]+$$

$$+\frac{2a}{2a+b}(1-E^{a-t})+\frac{4b}{2a+b}[1-E^{2(a-t)}]+$$

$$+\frac{C_2(a+b)}{\log E}\left[\cdot E^{a\frac{2a+b}{a+b}}-E^{a+\frac{at}{a+b}}\right]-$$

$$-\frac{4C_2(a+b)}{\log E}\left[E^{a\frac{2a+b}{a+b}}-E^{2a-\frac{bt}{a+b}}\right]+\frac{C_2(2a+b)}{\log E}\cdot$$

$$\cdot E^{a\frac{2a+b}{a+b}} + \left[-\frac{2}{2a+b} + \frac{C_2 E^{a\frac{2a+b}{a+b}}}{\log E} \right] (a+2b) = 0,$$

oder

$$0 = -\frac{a}{\log E}(E^{a-t} - E^{a}) - \frac{2b}{\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] -$$

$$-\frac{2a}{2a+b} \cdot E^{a-t} - \frac{4b}{2a+b} \cdot E^{2(a-t)} - \frac{C_2(a+b)}{\log E} \cdot$$

$$\cdot E^{a+\frac{a \cdot t}{a+b}} + \frac{4 \cdot C_2(a+b)}{\log E} \cdot E^{2a-\frac{b \cdot t}{a+b}},$$

oder

$$0 = E^{a}\left[-\frac{a}{\log E \cdot E^{t}} + \frac{a}{\log E} - \frac{2a}{(2a+b)E^{t}} - \right.$$

$$\left. -\frac{(a+b) \cdot C_2}{\log E} \cdot E^{\frac{a}{a+b} \cdot t} \right] + 2E^{2a}\left[-\frac{b}{\log E \cdot E^{2t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{\log E} - \frac{2b}{(2a+b)E^{2t}} + \frac{2(a+b) \cdot C_2}{\log E} \cdot \frac{E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}}{E^{t}} \right];$$

Diese Gleichung kann unabhängig von a bloss bestehen, wenn die Koeffizienten von E^{a} und E^{2a} einzeln Null sind, d. h. wenn die Gleichungen (5) und (6) bestehen.

Die gesuchte Funktion $f(x)$ hat also nun die Gestalt:

$$f(x) = -\frac{2\log E}{2a+b} + \frac{a \cdot b(1-E^{t})}{(a+b)(2a+b)E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}} \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot x},$$

wo t mittelst der Gleichung:

$$E^{t_{1,2}} = \frac{-a \pm \sqrt{(a+b)^2 + 2b\log E}}{b}$$

bestimmt wird.

Für unser zahlenmässiges Beispiel ist:

$a = 3{,}104\,282$; $\quad b = -2{,}104\,282$

$E = 0{,}955\,7647$; $\quad \log E = -0{,}019\,6490$

$C_1 = 0{,}009\,575$; $\quad E^{\frac{2a+b}{a+b}} = 0{,}830\,5294$

$E^{t_1} = 0{,}980\,742$; $\quad t_1 = 0{,}429\,803$

$E^{t_2} = 1{,}969\,701$; $\quad t_2 = -14{,}982\,951$;

Zu t_1 gehört: $C_2 = -0{,}032\,5578$;

Zu t_2 gehört: $C_2 = 0{,}188\,1765$;

Je nachdem man also t_1 oder t_2 wählt, bekommt man für $f(x)$ die beiden Werte:

für t_1: $f(x) = 0{,}009\,575 - 0{,}032\,5578 \cdot (0{,}830\,5294)^x$

für t_2: $f(x) = 0{,}009\,575 + 0{,}188\,1765 \cdot (0{,}830\,5294)^x$.

$f(x)$ nähert sich daher mit wachsendem x asymptotisch dem Werte 0,009 575.