

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	12 (1917)
Artikel:	Die Berechnung der ausreichenden Bruttoprämien, der Überschussreserven und der Deckungskapitalien auf Grundlage von Netto- und Bruttoprämien, für die Kapitalversicherungen auf den Todesfall
Autor:	Kihm, C.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-967506

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Berechnung der ausreichenden Bruttoträmen, der Überschussreserven und der Deckungskapitalien auf Grundlage von Netto- und Bruttoträmen, für die Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

Von **C. Kihm**, Mathematiker,
Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt.

Die vorliegende Arbeit war zuerst als Referat zu Thema IV des VIII. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft in St. Petersburg vom Jahre 1915 bestimmt. Da die Abhaltung des Kongresses auf unbestimmte Zeit verschoben ist, so wurde die Arbeit, weil sie als Kongressreferat nur einen beschränkten Raum einnehmen durfte, noch einer Umarbeitung unterzogen.

Die Arbeit gibt eine ausführliche Darstellung der Berechnung der ausreichenden Bruttoträmen, für die Versicherungen mit und ohne Anteil an den Überschüssen nach Grundlagen zweiter Ordnung. Dabei wird nachgewiesen, dass die ausreichenden Bruttoträmen bei gegebenem Dividendensatz, oder umgekehrt der Dividendensatz bei gegebener Bruttoträme, von der Höhe der jedes Jahr einzusetzenden Deckungskapitalien unabhängig ist. In der Arbeit werden ferner die jährlichen Überschüsse einer Versicherung und die Überschussreserven (Dividendenreserven) für verschie-

dene mechanische Überschusssysteme bei gegebenem Deckungskapital abgeleitet, wobei das Deckungskapital nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung, unter Benutzung von Netto- oder Bruttoprämien bestimmt werden kann. Ausserdem wird die zwischen dem Deckungskapital und der Überschussreserve bestehende Beziehung abgeleitet und dabei nachgewiesen, dass das Deckungskapital in beliebiger Höhe eingesetzt werden kann, sofern der gesamte Versicherungsfonds (Deckungskapital mehr Überschussreserve) in der rechnungsmässigen Höhe vorhanden ist, so dass sich die Überschussreserve als Differenz zwischen dem Versicherungsfonds und dem Deckungskapital ergibt.

Literatur.

- Dr. *A. Zillmer*. Beiträge zur Theorie der Prämienreserve bei Lebensversicherungs - Gesellschaften. Berlin 1863.
- C. Kihm*. Die Gewinnsysteme mit steigenden Dividenden bei der Lebensversicherung. Zürich 1886.
- Logophilus*. Der Streit über die Zillmersche Methode in der Lebensversicherung. Berlin 1902.
- Die Methode der ausreichenden Prämien in der Lebensversicherung. Zeitschrift für Versicherungswesen, Nr. 15, Jahrgang 1902.
- Dr. *J. Karup*. Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank A. G. Jena 1903.
- Dr. *G. Höckner*. Die Bedeutung des Deckungskapitals für den Lebensversicherungsbetrieb. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Band V, Jahrgang 1905.
- Dr. *Broecker*. Die Gewinnbeteiligung der Versicherten. Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft X, Jahrgang 1906.

- Dr. *G. Engelbrecht*. Zur Theorie der Verwaltungskosten und Überschüsse. *Österreichische Revue*, Band XXXI, Jahrgang 1906.
- Dr. *G. Höckner*. Änderung der Rechnungsgrundlagen für die Lebensversicherungsgesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1907.
- Dr. *G. Engelbrecht*. Das Deckungskapital in der Lebensversicherung. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, Band VII, Jahrgang 1907.
- Dr. *Broecker*. Zur Frage der Gewinnbeteiligung für Lebensversicherungen. *Assekuranz-Jahrbuch*, Bd. XXIX, 1908.
- Dr. *G. Höckner*. Das Deckungskapital im Lebensversicherungsvertrag und die Abfindungswerte bei vorzeitiger Auflösung. *Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft*, Heft XVI, 1909.
- Die Zillmersche Methode. Ihr Begriff und der Nutzen der dritten Rechnungsgrundlage. *Assekuranz-Jahrbuch*, Band XXX, 1909.
- C. L. Landré*. Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. 4. Aufl., Kap. X, § 275—277. Jena 1911.
- Dr. *P. Meyer*. Ein Beitrag zum Dividendenproblem in der Lebensversicherung. *Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft*, Heft XX, 1911.
- H. Broggi*. Versicherungsmathematik. Dritter Abschnitt: Die Technik der Lebensversicherung, I. Kapitel, § 7. Leipzig und Berlin 1911.
- Dr. *A. Abel*. Vortrag in der Mathematikerversammlung zu Leipzig. *Archiv für Versicherungswirtschaft*, 5. Jahrgang, 1911.
- Thema V des 7. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft in Amsterdam. Die Zuschlagsregelung der Prämien. Berechnung der Bruttoprämiens. Amsterdam 1912.
- H. Wulkow*. Technische Erfordernisse für die Berechnung der Dividendenreserve in der Lebensversicherung. *Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft*, Heft XXIV, 1912.

Dr. *P. Böhmer*. Dasselbe.

Dr. *K. Rhode*. Dasselbe.

Dr. *P. Nabholz*. Die Bestimmung der Tarifprämie in der privaten Lebensversicherung. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft. Band XII, 1912.

N. R. Jørgensen. Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. § 109 und § 114 bis 118. Jena 1913.

Dr. *A. Abel*. Mechanische Gewinnbeteiligungssysteme in der Lebensversicherung. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Band XIII, 1913.

— Die Verteilung der Jahresüberschüsse nach der Jahresprämie (Dividendenplan A). Archiv für Versicherungswirtschaft, 7. Jahrgang, 1913.

Dr. *G. Höckner*. Leitsätze zur Wahl der Versicherungsgrundlagen. Jahrbuch für Versicherungsmathematik. Berlin 1914.

Deckungskapitalberechnung mit Bruttoprämiens. Zeitschrift für Versicherungswesen, Nr. 16, Jahrgang 1914.

I. Rechnungsgrundlagen für die Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

1. Rechnungsgrundlagen erster Ordnung.

Als Rechnungsgrundlagen erster Ordnung werden verwendet:

- a) Eine Sterbetafel oder eine Selektionstafel.
- b) Der rechnungsmässige Zinsfuss.
- c) Die Zillmerquote.

Ad a und b. Die Sterbetafel und der Zinsfuss.

Die meisten schweizerischen und deutschen Gesellschaften berechnen ihre Nettoprämiens und Deckungskapitalien nach einer Sterbetafel bei einem Zinsfuss

von 3 oder $3\frac{1}{2}\%$. Nur zwei deutsche Gesellschaften haben bis jetzt Selektionstafeln, die aus ihren eigenen Beobachtungen abgeleitet sind, als Grundlage der Berechnung eingeführt. Nach Fertigstellung der in Bearbeitung befindlichen deutschen Selektionstafeln, werden voraussichtlich auch die schweizerischen und die übrigen deutschen Gesellschaften ihre Rechnungsgrundlagen ändern und Selektionstafeln einführen.

Für die Versicherungen in Frankreich ist die Tafel A. F. bei einem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$ gesetzlich zur Berechnung der Nettoprämiens und der Deckungskapitalien vorgeschrieben.

Ad c. Die Zillmerquote. Eine grosse Anzahl von Gesellschaften berechnet ihre Deckungskapitalien nach der Nettomethode und amortisiert die Abschlusskosten entweder im Eintrittsjahr oder im Laufe von einigen Jahren. Einzelne Gesellschaften dagegen kürzen ihre Deckungskapitalien, indem sie nur einen Teil der Abschlusskosten im Eintrittsjahr, den Rest während den sämtlichen Prämienjahren amortisieren. Der Zillmersatz bildet bei den Gesellschaften, welche eine Kürzung der Deckungskapitalien vornehmen, einen Bestandteil der Rechnungsgrundlagen erster Ordnung.

2. Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung.

Als Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung führen wir auf:

- a) Eine Selektionstafel, welche der wirklichen Sterblichkeit der mit oder ohne Anteil an den Überschüssen Versicherten für die nächste Zukunft möglichst nahe kommt.
- b) Den in der Zukunft voraussichtlich zu erzielenden wirklichen Zinsfuss.

- c) Die bei der Erwerbung von neuen Versicherungen voraussichtlich entstehenden Abschluss- und Arztkosten.
- d) Die bei der Einkassierung der Prämien voraussichtlich auszurichtenden Inkassoprovisionen.
- e) Die jedes Jahr für die laufenden Versicherungen voraussichtlich entstehenden Verwaltungskosten.
- f) Die Stornotafel für die Berücksichtigung des freiwilligen Abganges bei Lebzeiten.

Aus der Selektionstafel ist mit Hilfe der Stornotafel eine Dekremententafel der Lebenden abzuleiten, aus welcher zu ersehen ist, wie sich der Bestand der Versicherten voraussichtlich durch Tod und freiwilligen Abgang bei Lebzeiten vermindert.

Ad a. Die Selektionstafel. Die der Rechnung zugrunde zu legende Selektionstafel sollte die Sterblichkeit der mit oder ohne Anteil an den Überschüssen versicherten Mitglieder für die nächste Zukunft möglichst genau wiedergeben. Da die Sterblichkeit fortwährenden Schwankungen unterworfen ist, so sind wir genötigt, auf eine Selektionstafel abzustellen, welche der Sterblichkeit einer Reihe von zurückliegenden Jahren möglichst nahe kommt. Dabei treffen wir die Voraussetzung, dass die künftige Sterblichkeit mit der nach dieser Tafel angenommenen übereinstimme.

Die Selektionstafeln von Gotha und Leipzig werden für die hier in Frage stehenden Berechnungen keine Verwendung finden können, indem nach den Jahresberichten, die wirkliche Sterblichkeit dieser Gesellschaften sehr erheblich hinter der rechnungsmässigen zurückbleibt. Auch die reduzierte Bankliste von Gotha genügt der oben gestellten Forderung nicht. Wie der untenstehenden Tabelle zu entnehmen ist, ergab sich

beim neuen Bestand von Gotha für die Jahre 1904 bis 1911, gegenüber der neuen Bankliste eine Untersterblichkeit von nahezu 40 %. Die reduzierte Tafel wurde dagegen aus der Bankliste durch Reduktion der Sterbenswahrscheinlichkeiten um $87\frac{1}{2}$ bis 96 % abgeleitet.

Wir leiten deshalb für unsere Zwecke aus der Selektionstafel von Gotha eine zweite reduzierte Tafel ab. Nach den Jahresberichten von Gotha ergibt sich für die Jahre 1904—1911 zusammen die folgende Vergleichung zwischen der rechnungsmässigen und der wirklichen Sterblichkeit des neuen Bestandes.

Alter	Unter Risiko standen Personen	Davon sollten sterben	Es starben wirklich	Wirkliche Sterblichkeit in % der rechnungsmässigen
15—30	65.120,0	269,36	146	54,20
31—40	97.664,0	501,41	293	58,44
41—50	38.077,0	325,11	191	58,75
51—60	8.439,5	131,82	107	81,17
61—73	860,0	26,08	20	76,69
Summe	210.160,5	1.253,78	757	60,38

Die Untersterblichkeit ist hiernach, wie zu erwarten war, stärker für die jüngern Alter und geringer für die höhern Alter. Aus den fünf hier gegebenen Verhältniszahlen der wirklichen zur rechnungsmässigen Sterblichkeit haben wir versucht, eine Reduktionsskala zur Ermittlung von reduzierten Sterbenswahrscheinlichkeiten abzuleiten. Zu diesem Zwecke haben wir die fünf Verhältniszahlen auf einem Koordinatensystem aufgetragen und eine fortlaufende Kurve so gelegt, dass diese den voraussichtlichen Verlauf der Ver-

hältniszahlen der wirklichen zur rechnungsmässigen Sterblichkeit darstellen könnte. Die aus dieser Kurve abgelesenen Reduktionszahlen sind für die Alter 30 bis 89 in der Tabelle 1 im Anhang enthalten. Mit Hülfe dieser Skala wurden die Sterbenswahrscheinlichkeiten nach der Selektionstafel von Gotha reduziert und dabei angenommen, dass die Sterbenswahrscheinlichkeiten desselben Alters, ohne Rücksicht auf die Dauer der Versicherung, nach der für dieses Alter gefundenen Reduktionszahl zu reduzieren seien.

Die mit Hülfe dieser Skala reduzierten Sterbenswahrscheinlichkeiten und die daraus berechneten Zahlen der Lebenden und Gestorbenen, sollen für unsere künftigen Rechnungen benützt und dabei vorausgesetzt werden, dass die so reduzierte Selektionstafel sowohl für die Versicherungen mit Anteil, als auch für die ohne Anteil an den Überschüssen benützt werden können. Für das Eintrittsalter 30 sind die reduzierten Sterbenswahrscheinlichkeiten, die Zahlen der Lebenden und Gestorbenen in der Tabelle 2 enthalten.

Ad b. Der Zinsfuss. Die meisten schweizerischen und deutschen Gesellschaften erzielen gegenwärtig einen durchschnittlichen Zinsfuss, der sich erheblich über 4 % bewegt. Nach den Berichten des eidgenössischen Versicherungsamtes beträgt der durchschnittliche Zinsfuss im Jahre

1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914
bei den schweizerischen Gesellschaften						
4.16 %	4.16 %	4.20 %	4.23 %	4.26 %	4.36 %	4.44 %
bei den deutschen Gesellschaften						
4.16 %	4.18 %	4.20 %	4.21 %	4.22 %	4.27 %	4.28 %

Der durchschnittliche Zinsfuss ist gegenwärtig noch im Steigen begriffen, so dass den Rechnungen ein Zinsfuss von 4 $\frac{1}{8}$ % zugrunde gelegt werden darf.

Ad c. Die Abschlussprovisionen und die Arztkosten.

Die Höhe der Abschlusskosten ist naturgemäß bei den einzelnen Gesellschaften sehr verschieden. In den Abschlusskosten sollen die sämtlichen Kosten inbegriffen sein, welche bei der Erwerbung von neuen Versicherungen durch die Agenten entstehen. Die Abschlusskosten werden in $\%$ der Versicherungssumme ausgedrückt. Wir bezeichnen diesen Promillesatz mit α und nehmen ihn für die späteren Rechnungen zu 30 $\%$ an.

Ad d. Die Inkassoprovisionen. Inkassoprovisionen werden bei den meisten schweizerischen und deutschen Gesellschaften vom zweiten Versicherungsjahre an auf der Barprämie, d. h. auf der Tarifprämie abzüglich dem bar ausbezahlten Überschussanteil gewährt. Den Prozentsatz der Inkassoprovision auf der Barprämie bezeichnen wir mit β und nehmen denselben für die folgenden Rechnungen zu 2 $\%$ an.

Ad e. Die inneren Verwaltungskosten. Unter den inneren Verwaltungskosten sind die sämtlichen Kosten zu verstehen, welche auf dem Hauptsitz der Anstalt durch die Ausfertigung der Policien, die Berechnung der Deckungskapitalien, die Korrespondenz mit den Versicherten und den Agenten, die Aufstellung der Jahresrechnung, die Verwaltung der Wertschriften, die Vorbereitung des Inkassomaterials, die Liquidation der Versicherungen etc. verursacht werden. Bei den Aktiengesellschaften ist der an die Aktionäre bezahlte Betrag, welcher über die erzielten Zinsen des einbezahnten Kapitals hinaus ausgerichtet wird, ebenfalls zu den inneren Verwaltungskosten hinzuzurechnen. Die meisten dieser Kosten sind für alle Policien, ohne Rücksicht auf die Versicherungssumme, gleich hoch. In der Regel werden aber die inneren Verwaltungskosten

trotzdem im Verhältnis der Versicherungssumme verlegt, einsteils um die kleinen Versicherungssummen nicht allzu stark mit inneren Verwaltungskosten zu belasten, andernteils um die Prämien durchgehends proportional zur Versicherungssumme zu erhalten. Den Verwaltungskostensatz bezeichnen wir mit γ und setzen denselben bei den folgenden Rechnungen für die Versicherungen mit Prämienzahlung zu 2 % der Versicherungssumme an.

Die Sätze α , β und γ sind aus den Erfahrungen der Gesellschaft über die Höhe der Verwaltungskosten während den zurückliegenden Jahren abzuleiten und für die Zukunft als konstant vorauszusetzen.

Ad f. Die Stornotafel des Abganges und die Konstruktion der Dekremententafel des Versicherungsbestandes. Als Skala des Abganges, nach Beitrittsaltern und Versicherungsdauern, verwenden wir die von Karup in seiner „Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank“ auf Seite 184* gegebene Tabelle 46. In dieser Tabelle ist der Abgang, der ein halbes Jahr vor und ein halbes Jahr nach dem Prämientermin eintritt, zusammengefasst und dem betreffenden Prämientermin selbst zugeschrieben. Soll der Versichertenbestand in der Dekremententafel die Personen angeben, welche sukzessive Prämien zahlen, so muss der aus der Tabelle 46 hervorgehende Abgang immer in seine zwei Komponenten zerlegt werden, in den Abgang vor und nach dem Prämientermin. Diese Aufgabe löst die Tabelle 45^b von Karup auf Seite 185* der Reform. Eine Ausnahme machen nur die Skalasätze des ersten Jahres, nach 0 Jahren, weil diese nicht in zwei Teile zerlegt werden können. Diese Sätze umfassen keine Stornierungen, beziehen sich daher nur auf solche Zugänge,

welche die erste Prämie wirklich bezahlt haben und im ersten Halbjahr wieder austreten.

Die Rechnung zur Aufstellung der Dekremententafel des Versicherungsbestandes ist die folgende: Wir bezeichnen für das $(t+1)$. Versicherungsjahr, nach t Jahren, die Zahlen der Tabelle 46 nach Karup mit α_{x+t} , die Zahlen der Tabelle 45^b mit β_{x+t} . Es sei ferner die Sterbenswahrscheinlichkeit nach der reduzierten Selektionstafel in Tabelle 2 mit q'_{x+t} , die Anzahl der am Anfang des $(t+1)$. Jahres Lebenden mit l'_{x+t} , die Anzahl der am Anfang des $(t+1)$. Jahres Austretenden mit k^a_{x+t} , die Anzahl der am Ende des $(t+1)$. Jahres Austretenden mit k^e_{x+t} und die Anzahl der im Laufe des $(t+1)$. Jahres Sterbenden mit d'_{x+t} bezeichnet. Alsdann ist nach den Anleitungen von Karup die Anzahl der am Anfang des ersten Jahres Austretenden

$$(1) \quad k^a_{x+0} = l'_{x+0} \alpha_{x+0}$$

und die Anzahl der Gestorbenen des ersten Jahres

$$(2) \quad d'_{x+0} = (l'_{x+0} - k^a_{x+0}) q'_{x+0}.$$

Die Anzahl der nach einem Jahre vor und nach dem Prämientermin Austretenden ist gegeben durch das Produkt

$$(3) \quad \begin{aligned} & (l'_{x+0} - k^a_{x+0} - d'_{x+0}) \alpha_{x+1} \\ & = (l'_{x+0} - k^a_{x+0}) (1 - q'_{x+0}) \alpha_{x+1} \end{aligned}$$

und zwar ist die Anzahl der am Ende des ersten Jahres, vor dem Prämientermin Austretenden

$$(4) \quad \begin{aligned} k^e_{x+0} & = (l'_{x+0} - k^a_{x+0} - d'_{x+0}) \alpha_{x+1} (1 - \beta_{x+1}) \\ & = (l'_{x+0} - k^a_{x+0}) (1 - q'_{x+0}) \sigma^e_{x+0}, \end{aligned}$$

wenn

$$(5) \quad \sigma_{x+0}^e = \alpha_{x+1} (1 - \beta_{x+1})$$

die Wahrscheinlichkeit angibt, am Ende des ersten Jahres auszutreten. Die Anzahl der am Anfang des zweiten Jahres, nach dem Prämientermin Austretenden ist

$$(6) \quad k_{x+1}^a = (l'_{x+0} - k_{x+0}^a - d'_{x+0}) \alpha_{x+1} \beta_{x+1}$$
$$= (l'_{x+0} - k_{x+0}^a) (1 - q'_{x+0}) (\sigma)_{x+1}^a,$$

wenn

$$(7) \quad (\sigma)_{x+1}^a = \alpha_{x+1} \beta_{x+1}$$

die Wahrscheinlichkeit angibt am Anfang des zweiten Jahres auszutreten, dieselbe sich aber auf die Anzahl der Lebenden $l'_{x+0} - k_{x+0}^a - d'_{x+0}$ bezieht. Die Anzahl der am Ende des ersten Jahres vorhandenen und am Anfang des zweiten Jahres auch zahlenden Versicherten ist

$$(8) \quad l'_{x+1} = l'_{x+0} - k_{x+0}^a - d'_{x+0} - k_{x+0}^e$$
$$= (l'_{x+0} - k_{x+0}^a) (1 - q'_{x+0}) (1 - \sigma_{x+0}^e).$$

Die Anzahl der Austritte im ersten Versicherungsjahr ist zusammen

$$(9) \quad k_{x+0}^a + k_{x+0}^e = k_{x+0}.$$

Die Anzahl der Sterbefälle des zweiten Jahres ist

$$(10) \quad d'_{x+1} = (l'_{x+1} - k_{x+1}^a) q'_{x+1}$$

usw. Die Karupschen Zahlen der Tabellen 46 und 45^b lassen sich demnach zur Aufstellung der Austrittswahrscheinlichkeiten am Anfang und Ende der verschiedenen Versicherungsjahre benutzen.

Es sei allgemein die Wahrscheinlichkeit, am Ende des $(t+1)$. Jahres auszutreten, mit σ_{x+t}^e bezeichnet; dieselbe ist

$$(11) \quad \sigma_{x+t}^e = \alpha_{x+t+1} (1 - \beta_{x+t+1}).$$

Die Wahrscheinlichkeit, am Anfang des $(t+1)$. Jahres auszutreten, sei, sofern sie sich auf die Anzahl der Lebenden $l'_{x+t-1} - k_{x+t-1}^a - d'_{x+t-1}$ bezieht, mit $(\sigma)_{x+t}^a$ bezeichnet. Sie berechnet sich zu

$$(12) \quad (\sigma)_{x+t}^a = \alpha_{x+t} \beta_{x+t}$$

und es ist

$$(13) \quad \sigma_{x+t-1}^e + (\sigma)_{x+t}^a = \alpha_{x+t}.$$

Demnach ist die Anzahl der am Anfang des $(t+1)$. Jahres Austretenden gleich

$$(14) \quad k_{x+t}^a = (l'_{x+t-1} - k_{x+t-1}^a - d'_{x+t-1}) (\sigma)_{x+t}^a \\ = (l'_{x+t-1} - k_{x+t-1}^a) (1 - q'_{x+t-1}) (\sigma)_{x+t}^a.$$

Die Anzahl der im Laufe des $(t+1)$. Jahres Gestorbenen ist

$$(15) \quad d'_{x+t} = (l'_{x+t} - k_{x+t}^a) q'_{x+t}.$$

Die Anzahl der Austretenden am Ende des $(t+1)$. Jahres ist

$$(16) \quad k_{x+t}^e = (l'_{x+t} - k_{x+t}^a - d'_{x+t}) \sigma_{x+t}^e \\ = (l'_{x+t} - k_{x+t}^a) (1 - q'_{x+t}) \sigma_{x+t}^e$$

und die Anzahl der Versicherten am Ende des $(t+1)$. resp. am Anfang des $(t+2)$. Jahres ist

$$(17) \quad l'_{x+t+1} = l'_{x+t} - k_{x+t}^a - d'_{x+t} - k_{x+t}^e \\ = (l'_{x+t} - k_{x+t}^a) (1 - q'_{x+t}) (1 - \sigma_{x+t}^e).$$

Beziehen wir die Anzahl der Austritte am Anfang des $(t+1)$. Jahres auf die Zahl der Lebenden am Anfang des $(t+1)$. Jahres und bezeichnen wir die entsprechende Wahrscheinlichkeit mit σ_{x+t}^a , so ist auch

$$(18) \quad k_{x+t}^a = l'_{x+t} \sigma_{x+t}^a \\ = (l'_{x+t-1} - k_{x+t-1}^a) (1 - q'_{x+t-1}) (1 - \sigma_{x+t-1}^e) \sigma_{x+t}^a.$$

Durch Gleichsetzen der Werte von k_{x+t}^a in den Gleichungen 14 und 18 folgt

$$(19) \quad \sigma_{x+t}^a = \frac{(\sigma)_{x+t}^a}{1 - \sigma_{x+t-1}^e} \\ = \frac{a_{x+t} \beta_{x+t}}{1 - a_{x+t} (1 - \beta_{x+t})} = \frac{a_{x+t} \beta_{x+t}}{1 - a_{x+t} + a_{x+t} \beta_{x+t}}.$$

Diese Gleichung gilt nicht für $t = 0$, indem σ_{x+0}^a direkt gegeben ist.

Nach Einführung der Wahrscheinlichkeit σ_{x+t}^a wird nun die Anzahl der Versicherten am Anfang des $(t+1)$. Jahres nach Abzug der Ausgetretenen

$$(20) \quad l'_{x+t} - k_{x+t}^a = l'_{x+t} (1 - \sigma_{x+t}^a),$$

die Anzahl der Gestorbenen im Laufe des $(t+1)$. Jahres

$$(21) \quad d'_{x+t} = (l'_{x+t} - k_{x+t}^a) q'_{x+t} = l'_{x+t} (1 - \sigma_{x+t}^a) q'_{x+t},$$

die Anzahl der Austretenden am Ende des $(t+1)$. Jahres

$$(22) \quad k_{x+t}^e = (l'_{x+t} - k_{x+t}^a - d'_{x+t}) \sigma_{x+t}^e \\ = l'_{x+t} (1 - \sigma_{x+t}^a) (1 - q'_{x+t}) \sigma_{x+t}^e$$

und die Anzahl der Versicherten am Ende des $(t+1)$.
resp. am Anfang des $(t+2)$. Jahres

$$(23) \quad l'_{x+t+1} = l'_{x+t} - k_{x+t}^a - d'_{x+t} - k_{x+t}^e \\ = l'_{x+t} (1 - \sigma_{x+t}^a) (1 - q'_{x+t}) (1 - \sigma_{x+t}^e).$$

Die Wahrscheinlichkeiten σ_{x+t}^a und σ_{x+t}^e sind nach den Formeln 19 und 11 berechnet und, da sie unregelmässig verlaufen, einer zweimaligen Ausgleichung nach der Woolhouseschen Formel unterzogen worden. Wir teilen diese Wahrscheinlichkeiten für das Eintrittsalter 30 in der Tabelle 3 im Anhang mit.

Auf Grundlage der reduzierten Sterbenswahrscheinlichkeiten nach Tabelle 2 und der Austrittswahrscheinlichkeiten nach Tabelle 3 wurde die Dekremententafel der Lebenden für das Eintrittsalter 30 konstruiert. Die entsprechenden Zahlen der Lebenden, der Austrittenden und der Gestorbenen sind in der Tabelle 4 enthalten.

Bei diesen Ableitungen haben wir das Eintrittsalter, trotzdem es sich um Selektionstafeln handelt, der Einfachheit wegen mit x statt mit $[x]$ bezeichnet. Wir werden diese Schreibweise auch bei den folgenden Ableitungen beibehalten, indem dadurch keine Irrtümer entstehen können.

Für die Grundlagen erster Ordnung wählen wir die internationale Bezeichnungsweise, für die Grundlagen zweiter Ordnung nehmen wir dieselbe Bezeichnungsweise mit dem Index ' oben.

II. Berechnung verschiedener Barwerte am Ende des t . Versicherungsjahres nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der prospektiven Methode.

1. Barwert der künftigen Prämie 1 vorschussweise jährlich zahlbar.

Wir bezeichnen mit i' den wirklich erzielten Zinsfuss, so dass der Abzinsungsfaktor gleich ist

$$(24) \quad v' = \frac{1}{1 + i'}.$$

Ferner sei

$$(25) \quad D'_{x+t} = v'^{x+t} l'_{x+t}$$

die diskontierte Zahl der Lebenden des Alters $x + t$,

$$(26) \quad N'_{x+t} = \Sigma D'_{x+t} = D'_{x+t} + D'_{x+t+1} + D'_{x+t+2} + \dots$$

die Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden des Alters $x + t$ und

$$(27) \quad S'_{x+t} = \Sigma N'_{x+t} = N'_{x+t} + N'_{x+t+1} + N'_{x+t+2} + \dots$$

die Summe der Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden des Alters $x + t$ nach den Grundlagen zweiter Ordnung.

Alsdann ist zur Zeit des Eintrittes, der Barwert der Prämie 1 temporär vorschussweise während n Jahren zahlbar, wenn dieser Barwert mit $a'_{x+0:\bar{n}}$ bezeichnet wird, gleich

$$(28) \quad a'_{x+0:\bar{n}} = \frac{N'_{x+0} - N'_{x+n}}{D'_{x+0}}.$$

Der Barwert der Prämie 1 ist nach t Jahren

$$(29) \quad a'_{x+t:n-t} = \frac{N'_{x+t} - N'_{x+n}}{D'_{x+t}}.$$

2. Barwert der künftig zahlbaren Versicherungssumme 1 bei der gemischten Versicherung.

Um den Barwert der Versicherungssumme 1 nach den Grundlagen zweiter Ordnung genau einschätzen zu können, treffen wir die Annahme, dass die Versicherungssummen im Todesfall unmittelbar nach dem Tode zahlbar seien. Wir bezeichnen mit

$$(30) \quad \bar{C}'_{x+t} = v'^{x+t+\frac{1}{2}} d'_{x+t}$$

die diskontierte Zahl der im Laufe des $(t+1)$. Jahres gestorbenen Versicherten, mit

$$(31) \quad \bar{M}'_{x+t} = \sum \bar{C}'_{x+t} = \bar{C}'_{x+t} + \bar{C}'_{x+t+1} + \bar{C}'_{x+t+2} + \dots$$

die Summe der diskontierten Zahlen der Gestorbenen des Alters $x+t$ und mit

$$(32) \quad \bar{R}'_{x+t} = \sum \bar{M}'_{x+t} = \bar{M}'_{x+t} + \bar{M}'_{x+t+1} + \bar{M}'_{x+t+2} + \dots$$

die Summe der Summen der diskontierten Zahlen der Gestorbenen des Alters $x+t$.

Bei der Berechnung des Barwertes der gemischten Versicherung 1, fällig beim Tode oder spätestens n Jahre nach dem Eintritt, nehmen wir an, dass die am Ende des n . Jahres austretenden k'_{x+n-1} Personen die volle Versicherungssumme als Rückkaufswert erhalten. Wir verrechnen aber diese Ausgaben nicht beim Barwert der Versicherungssummen, sondern im folgenden Abschnitt beim Barwert der Rückkaufs-

summen. Demnach ist der Barwert der gemischten Versicherung 1 beim Eintritt

$$(33) \quad \overline{A}'_{x+0:n} = \frac{\overline{M}'_{x+0} - \overline{M}'_{x+n} + D'_{x+n}}{D'_{x+0}}$$

und t Jahre nach dem Eintritt

$$(34) \quad \overline{A}'_{x+t:n} = \frac{\overline{M}'_{x+t} - \overline{M}'_{x+n} + D'_{x+n}}{D'_{x+t}}.$$

3. Barwert der künftigen Rückkaufssummen für die Versicherungssumme 1.

Nach den in der Schweiz und in Deutschland geltenden gesetzlichen Bestimmungen muss jedem Versicherten, welcher die Prämien für mindestens 3 Jahre bezahlt hat, beim Austritt eine Rückkaufsentschädigung ausgerichtet, bei Nichtzahlung einer Prämie nach Ablauf der Prämienfrist eine prämienfreie Versicherung ausgestellt werden. Wir nehmen für die folgenden Berechnungen an, dass die Versicherung bei Nichtzahlung einer Prämie zurückgekauft, die prämienfreie Versicherungssumme auf Grundlage dieses Rückkaufswertes bestellt und wie ein neuer Eintritt, ohne Ausrichtung einer Abschlussprovision, behandelt werde. Die Abgangsentschädigung soll demnach beim eigentlichen Rückkauf und bei der Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung gleich hoch bemessen werden.

Als Grundlage der Berechnung des Rückkaufswertes soll das nach den Grundlagen erster Ordnung berechnete ungezillmerte Deckungskapital mehr dem zur Zeit des Abganges nicht verbrauchten Teil der Bruttoprämie dienen. Von dem durch diese Summe gegebenen Betrag sollen beispielsweise 75 % zurück-

bezahlt werden, solange das ungezillmerte Deckungskapital, ohne die nicht verbrauchte Bruttoprämie, nicht mehr als 50 % der versicherten Summe beträgt. Wenn das ungezillmerte Deckungskapital, ohne die nicht verbrauchte Bruttoprämie

51 % der Versicherungssumme ausmacht, so soll der Rückkaufswert = 76 %
52 % " " " " " " = 77 %
usw.

75 % u. mehr % " " " " " " = 100 %
des ungezillmerten Deckungskapitals, mehr der nicht verbrauchten Bruttoprämie betragen.

Die Bruttoprämie, welche der Versicherte bei der gemischten Versicherung für die Versicherungssumme 1 zahlt, sei $\pi_{x \bar{n}}$. Über die Berechnungsart dieser Prämie sollen hier keine Voraussetzungen getroffen werden, indem die in der Folge abzuleitenden, für die Versicherungen mit und ohne Anteil an den Überschüssen gültigen Formeln von der Berechnungsart der Prämie unabhängig sind.

Für die Versicherungen, welche in der ersten Hälfte des $(t + 1)$. Jahres austreten, sollte als Grundlage für die Berechnung des Rückkaufswertes durchschnittlich das Deckungskapital nach $t + \frac{1}{4}$ Jahren mehr $\frac{3}{4}$ der Bruttoprämie dienen. Für die in der zweiten Hälfte des $(t + 1)$. Jahres Austretenden sollte der Rückkaufswert durchschnittlich vom Deckungskapital nach $t + \frac{3}{4}$ Jahren mehr $\frac{1}{4}$ der Bruttoprämie berechnet werden. Die Berechnung des Barwertes der Rückkaufssummen gestaltet sich aber einfacher, wenn wir die Annahme treffen, dass alle in der ersten Hälfte eines Versicherungsjahres Austretenden den Rückkauf sofort nach Bezahlung der Prämie verlangen, so dass der Rückkaufswert am Anfang des $(t + 1)$. Jahres vom Betrage $t V_x + \pi_{x \bar{n}}$ zu berechnen ist, während für die Ausritte in der zweiten Hälfte des $(t + 1)$. Jahres der

Rückkaufswert vom Deckungskapital am Ende des $(t+1)$. Jahres, somit vom Betrag ${}_{t+1}V_x$ ermittelt werden soll. Dadurch setzen wir die Rückkaufswerte für die Austritte am Anfang des Jahres in der Regel etwas zu hoch, für die Austritte am Ende des Jahres meistens etwas zu niedrig in Rechnung. Durch diese Verschiebung werden die Barwerte der Rückkaufssummen, welche ohnehin nicht beträchtlich sind, nur unerheblich beeinflusst.

Der Rückkaufswert einer Versicherung im Betrage 1 sei für den Anfang des $(t+1)$. Versicherungsjahres mit ${}_t r_x^a$, für das Ende desselben mit ${}_t r_x^e$ bezeichnet. Es sei ferner ${}_t \varrho_x^a$ der Prozentsatz des Rückkaufswertes am Anfang, ${}_t \varrho_x^e$ der am Ende des $(t+1)$. Versicherungsjahres. Nach den getroffenen Annahmen ist der Rückkaufswert am Anfang des $(t+1)$. Versicherungsjahres

$$(35) \quad {}_t r_x^a = {}_t \varrho_x^a ({}_t V_x + \pi_{x \bar{n}}) = {}_t r_x'^a + {}_t \varrho_x^a \pi_{x \bar{n}},$$

wobei

$$(36) \quad {}_t r_x'^a = {}_t \varrho_x^a {}_t V_x$$

den Rückkaufswert auf dem reinen Deckungskapital angibt. Der Rückkaufswert am Ende des $(t+1)$. Jahres ist

$$(37) \quad {}_t r_x^e = {}_t \varrho_x^e {}_{t+1} V_x.$$

Wir bezeichnen für das $(t+1)$. Versicherungsjahr mit

$$(38) \quad K_{x+t}^a = v'^{x+t} k_{x+t}^a$$

die diskontierte Anzahl der am Anfang des Jahres Austrtenden und mit

$$(39) \quad K_{x+t}^e = v'^{x+t+1} k_{x+t}^e$$

die diskontierte Anzahl der am Ende des Jahres austretenden. Dann bedeutet

$$(40) \quad K_{x+t}^a \cdot {}_t r_x^a = w_{x+t}^a = {}_t \varrho_x^a K_{x+t}^a ({}_t V_x + \pi_{x \bar{n}})$$
$$= K_{x+t}^a ({}^a r_x + {}_t \varrho_x^a \pi_{x \bar{n}})$$

den zurückdiskontierten Betrag der am Anfang des $(t+1)$. Jahres auszurichtenden Abgangsentschädigungen und

$$(41) \quad K_{x+t}^e \cdot {}_t r_x^e = w_{x+t}^e = {}_t \varrho_x^e K_{x+t}^e V_x$$

den zurückdiskontierten Betrag der am Ende des $(t+1)$. Jahres zu zahlenden Rückkaufsentschädigungen. Wir bezeichnen ferner mit

$$(42) \quad W_{x+t}^a = w_{x+t}^a + w_{x+t+1}^a + w_{x+t+2}^a + \dots + w_{x+n-1}^a$$

die Summe der diskontierten Rückkaufsentschädigungen, welche nach Ablauf von t Jahren an die am Anfang der folgenden Versicherungsjahre austretenden Versicherten zu zahlen sind, und mit

$$(43) \quad W_{x+t}^e = w_{x+t}^e + w_{x+t+1}^e + w_{x+t+2}^e + \dots + w_{x+n-1}^e$$

die Summe der diskontierten Abgangsentschädigungen an die vom Ende des $(t+1)$. bis zum Ende des n . Jahres austretenden Versicherten.

Für das erste und zweite Versicherungsjahr beginnen die Reihen in (42) und (43) erst mit dem Alter $x+2$. Die Werte w_{x+t}^a und w_{x+t}^e , sowie W_{x+t}^a und W_{x+t}^e sind bei derselben Versicherungsart nicht nur vom erreichten Alter, sondern auch vom Eintrittsalter und der Versicherungsdauer abhängig.

Der Barwert der Rückkaufssummen sei nach t Jahren bei der Versicherungssumme 1 für die am Anfang der Versicherungsjahre Austretenden mit $A_{x+t:\overline{n-t}}^{ra}$, für die am Ende der Jahre Austretenden mit $A_{x+t:\overline{n-t}}^{re}$ bezeichnet. Es ist alsdann

$$(44) \quad A_{x+t:\overline{n-t}}^{ra} = \frac{W_{x+t}^a}{D'_{x+t}}$$

und

$$(45) \quad A_{x+t:\overline{n-t}}^{re} = \frac{W_{x+t}^e}{D'_{x+t}}.$$

Beim Eintritt sind die entsprechenden Barwerte

$$(46) \quad A_{x+0:\overline{n}}^{ra} = \frac{W_{x+2}^a}{D'_{x+0}}$$

und

$$(47) \quad A_{x+0:\overline{n}}^{re} = \frac{W_{x+2}^e}{D'_{x+0}}.$$

Zur Berechnung der ausreichenden Prämien (siehe die Abschnitte V, 5 und 6) haben wir die Ausdrücke (40) und (42) noch etwas umzuformen. Nach unserer Annahme ist der Rückkaufswert am Anfang des Jahres abhängig von der Summe aus dem reinen Deckungskapital und der zuerst noch zu bestimmenden ausreichenden Bruttoprämie. Wir schreiben deshalb den Wert in Gleichung (40)

$$(48) \quad w_{x+t}^a = w_{x+t}^{'a} + \pi_{x:\overline{n}} w_{x+t}^{''a},$$

wobei

$$(49) \quad w_{x+t}^{'a} = {}_t \varrho_x^a K_{x+t}^a V_x = K_{x+t}^a {}_t r_x^{'a}$$

$$(50) \quad w_{x+t}^{''a} = {}_t \varrho_x^a K_{x+t}^a.$$

Die Summe im Ausdruck (42) schreibt sich dann

$$\begin{aligned}
 (51) \quad W_{x+t}^a &= w_{x+t}^{'a} + w_{x+t+1}^{'a} + w_{x+t+2}^{'a} + \dots \\
 &+ w_{x+n-1}^{'a} + \pi_{x \bar{n}} (w_{x+t}^{{}''a} + w_{x+t+1}^{{}''a} \\
 &+ w_{x+t+2}^{{}''a} + \dots + w_{x+n-1}^{{}''a}) \\
 &= W_{x+t}^{'a} + \pi_{x \bar{n}} W_{x+t}^{{}''a},
 \end{aligned}$$

wobei

$$(52) \quad W_{x+t}^{'a} = w_{x+t}^{'a} + w_{x+t+1}^{'a} + w_{x+t+2}^{'a} + \dots + w_{x+n-1}^{'a}$$

$$(53) \quad W_{x+t}^{{}''a} = w_{x+t}^{{}''a} + w_{x+t+1}^{{}''a} + w_{x+t+2}^{{}''a} + \dots + w_{x+n-1}^{{}''a}.$$

Der Barwert der Rückkaufssummen für die am Anfang der Jahre Austretenden ist deshalb nach t Jahren auch

$$\begin{aligned}
 (54) \quad A_{x+t: \bar{n-t}}^{ra} &= \frac{W_{x+t}^{'a} + \pi_{x \bar{n}} W_{x+t}^{{}''a}}{D'_{x+t}} \\
 &= A_{x+t: \bar{n-t}}^{'ra} + \pi_{x \bar{n}} A_{x+t: \bar{n-t}}^{{}''ra}
 \end{aligned}$$

und beim Eintritt

$$\begin{aligned}
 (55) \quad A_{x+0: \bar{n}}^{ra} &= \frac{W_{x+2}^{'a} + \pi_{x \bar{n}} W_{x+2}^{{}''a}}{D'_{x+0}} \\
 &= A_{x+0: \bar{n}}^{'ra} + \pi_{x \bar{n}} A_{x+0: \bar{n}}^{{}''ra}.
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde gesetzt

$$(56) \quad A_{x+t: \bar{n-t}}^{'ra} = \frac{W_{x+t}^{'a}}{D'_{x+t}}$$

$$(57) \quad A_{x+t: \bar{n-t}}^{{}''ra} = \frac{W_{x+t}^{{}''a}}{D'_{x+t}}$$

und ferner

$$(58) \quad A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} = \frac{W'^a_{x+2}}{D'_{x+0}}$$

$$(59) \quad A''^{ra}_{x+0:\bar{n}} = \frac{W''^a_{x+2}}{D'_{x+0}}.$$

4. Barwert der künftigen Inkassoprovisionen.

Die Inkassoprovision wird von der zweiten Prämie an bis zur letzten mit $\beta\%$ der Barprämie bezahlt, wobei unter Barprämie die Brutto Prämie abzüglich dem Überschussanteil verstanden ist, sofern dieser in bar ausgerichtet wird. Der Barwert der Inkassoprovision von $\beta\%$ der mit $\pi_{x\bar{n}}$ bezeichneten Brutto Prämie ist beim Eintritt, da auf der ersten Prämie keine Inkassoprovision verrechnet wird, gleich

$$(60) \quad \beta \pi_{x\bar{n}} (a'_{x+0:\bar{n}} - 1)$$

und t Jahre nach dem Eintritt

$$(61) \quad \beta \pi_{x\bar{n}} a'_{x+t:\bar{n-t}}$$

Wir bezeichnen allgemein den Barwert der aus den erzielten Überschüssen auszurichtenden Dividenden von 1% des Verteilungsmassstabes beim Eintritt mit $\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}$ und t Jahre nach dem Eintritt mit $\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}$. Dabei ist vorausgesetzt, dass am Ende des n . Jahres eine Schlussdividende ausbezahlt werde, auf welcher eine Inkassoprovision nicht mehr anzurechnen ist, indem Provisionen nur so lange zu entrichten sind, als Prämien bezahlt werden. Die Barwerte der Dividenden werden in den Abschnitten V, 3, und VII, 3, abgeleitet. Ferner bezeichnen wir mit $\psi_{x\bar{n}}$ den Dividenden-

satz, mit ${}_t\varphi_{x\bar{n}}$ die Dividende am Anfang des $(t+1)$. Jahres, mit ${}_n\varphi_{x\bar{n}}$ diejenige am Ende des n . Jahres, beim Dividendensatz von 1 %. Der Barwert der Dividende ist deshalb beim Eintritt [siehe den Ausdruck (137)]

$$(62) \quad \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}$$

und t Jahre nach dem Eintritt [siehe den Ausdruck (197)]

$$(63) \quad \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}.$$

Die Schlussdividende beträgt $\psi_{x\bar{n}} {}_n\varphi_{x\bar{n}}$; ihr Barwert ist beim Eintritt

$$(64) \quad \frac{D'_{x+n}}{D'_{x+0}} \psi_{x\bar{n}} {}_n\varphi_{x\bar{n}} = {}_nE'_{x+0} \psi_{x\bar{n}} {}_n\varphi_{x\bar{n}}$$

und t Jahre nach dem Eintritt

$$(65) \quad \frac{D'_{x+n}}{D'_{x+t}} \psi_{x\bar{n}} {}_n\varphi_{x\bar{n}} = {}_{n-t}E'_{x+t} \psi_{x\bar{n}} {}_n\varphi_{x\bar{n}}.$$

Demnach ist der Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden abzüglich der Schlussdividende, beim Eintritt

$$(66) \quad \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_nE'_{x+0} {}_n\varphi_{x\bar{n}})$$

und t Jahre nach dem Eintritt

$$(67) \quad \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}} - {}_{n-t}E'_{x+t} {}_n\varphi_{x\bar{n}}).$$

Hieraus folgt der Barwert der Inkassoprovision auf den Barprämien beim Eintritt zu

$$(68) \quad \beta \left(\pi_{x\bar{n}} (a'_{x+0:\bar{n}} - 1) - \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_nE'_{x+0} {}_n\varphi_{x\bar{n}}) \right)$$

und t Jahre nach dem Eintritt zu

$$(69) \quad \beta \left(\pi_{x \bar{n}} a'_{x+t: \bar{n-t}} - \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - {}_{n-t} E'_{x+t} g_{x \bar{n}}) \right).$$

Sind mehrere Schlussdividenden auszuzahlen, so müssen die Formeln entsprechend abgeändert werden.

Für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen kommt die Inkassoprovision auf den Dividenden nicht in Betracht; demnach ist der Barwert der Inkassoprovision beim Eintritt gleich

$$(70) \quad \beta \pi_{x \bar{n}} (a'_{x+0: \bar{n}} - 1)$$

und t Jahre nach dem Eintritt gleich

$$(71) \quad \beta \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t: \bar{n-t}}.$$

5. Barwert der künftigen inneren Verwaltungskosten.

Die inneren Verwaltungskosten sollen nach den getroffenen Annahmen für prämienpflichtige Versicherungen $\gamma\%$ der Versicherungssumme für jedes Versicherungsjahr betragen. Wir nehmen an, dass die Verwaltungskosten jeweilen am Anfang der Jahre, aber nur für die nach Abzug der Austretenden noch übrig bleibenden Versicherten zu verrechnen sind, dass also die am Anfang der Jahre Austretenden keine Verwaltungskosten verursachen. Setzen wir

$$(72) \quad H_{x+0}^a = K_{x+0}^a + K_{x+1}^a + K_{x+2}^a + \dots = \Sigma K_{x+0}^a,$$

so ist beim Eintritt der Barwert der während n Jahren zu zahlenden inneren Verwaltungskosten bei der Versicherungssumme 1 gleich

$$\begin{aligned}
 (73) \quad & \frac{\gamma}{D'_{x+0}} \left(D'_{x+0} + D'_{x+1} + D'_{x+2} + \dots + D'_{x+n-1} \right. \\
 & \left. - (K^a_{x+0} + K^a_{x+1} + K^a_{x+2} + \dots + K^a_{x+n-1}) \right) \\
 & = \gamma (a'_{x+0:n} - A^a_{x+0:n}).
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(74) \quad A^a_{x+0:n} = \frac{H^a_{x+0} - H^a_{x+n}}{D'_{x+0}}$$

der Barwert der Zahlung 1 an die am Anfang der n ersten Jahre austretenden Mitglieder. Nach t Jahren ist der Barwert der inneren Verwaltungskosten für die nächsten $n - t$ Jahre gleich

$$(75) \quad \gamma (a'_{x+t:n-t} - A^a_{x+t:n-t}).$$

Die diskontierten Zahlen nach der Dekremententafel, nämlich die Werte D'_{x+t} , \bar{C}'_{x+t} , w'_{x+t}^a , w''_{x+t}^a , K^e_{x+t} , w^e_{x+t} , K^e_{x+t} , sowie deren Summen N'_{x+t} , S'_{x+t} , \bar{M}'_{x+t} , H^a_{x+t} , W'_{x+t}^a , W''_{x+t}^a und W^e_{x+t} , sind für das Eintrittsalter 30 in den Tabellen 5 und 6 im Anhang enthalten. Die Barwerte für eine nach 25 Jahren fällige gemischte Versicherung des 30 Jahre alt Eingetretenen, nämlich die Werte $a'_{x+t:n-t}$, $\bar{A}'_{x+t:n-t}$, $A'^{ra}_{x+t:n-t}$, $A''^{ra}_{x+t:n-t}$, $A^{ra}_{x+t:n-t}$, $A^{re}_{x+t:n-t}$ und $A^a_{x+t:n-t}$, sind aus Tabelle 7 im Anhang zu entnehmen.

III. Berechnung verschiedener Barwerte am Ende des t . Versicherungsjahres nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der retrospektiven Methode.

1. Barwert der bisherigen jährlich vorschussweise bezahlten Prämie 1.

Der Barwert der jährlich vorschussweise während t Jahren bezahlten Prämie 1 ist, auf das Ende des

t. Jahres berechnet, wenn wir diesen Barwert mit $(a)_{x+0:\bar{t}}'$ bezeichnen, gleich

$$(76) \quad (a)_{x+0:\bar{t}}' = \frac{N'_{x+0} - N'_{x+t}}{D'_{x+t}} = \frac{D'_{x+0}}{D'_{x+t}} a'_{x+0:\bar{t}}$$

$$= {}_t(E)_{x+0} a'_{x+0:\bar{t}}.$$

Am Ende des *n.* Jahres ist der entsprechende Barwert

$$(77) \quad (a)_{x+0:\bar{n}}' = \frac{N'_{x+0} - N'_{x+n}}{D'_{x+n}} = {}_n(E)_{x+0} a'_{x+0:\bar{n}}.$$

Dabei ist nach *t* Jahren die Summe der Barwerte der bisherigen und der künftigen Prämien 1

$$(78) \quad (a)_{x+0:\bar{t}}' + a'_{x+t:\bar{n-t}} = {}_t(E)_{x+0} a'_{x+0:\bar{n}}.$$

2. Barwert der einmaligen Prämie 1.

Der Barwert der einmaligen Zahlung 1 ist am Ende des *t.* Jahres

$$(79) \quad {}_t(E)_{x+0}' = \frac{D'_{x+0}}{D'_{x+t}}$$

und am Ende des *n.* Jahres

$$(80) \quad {}_n(E)_{x+0}' = \frac{D'_{x+0}}{D'_{x+n}}.$$

3. Barwert der verausgabten Versicherungssummen im Betrage 1 bei der gemischten Versicherung.

Der Barwert der verausgabten Sterbesummen ist am Ende des *t.* Jahres, wenn wir denselben mit $(\bar{A})_{x+0:\bar{t}}'$ bezeichnen, gleich

$$(81) \quad (\bar{A})_{x+0:\bar{t}}'^1 = \frac{\bar{M}'_{x+0} - \bar{M}'_{x+t}}{D'_{x+t}} = {}_t(E)_{x+0}^1 \bar{A}'_{x+0:\bar{t}},$$

wobei $\bar{A}'_{x+0:\bar{t}}$ den Barwert der temporären Sterbesumme 1 angibt. Am Ende des n . Jahres ist der Barwert der Sterbesummen, inklusive der dann fälligen Versicherungssumme, gleich

$$(82) \quad (\bar{A})_{x+0:\bar{n}}'^1 + 1 = (\bar{A})_{x+0:\bar{n}}'$$

$$= \frac{\bar{M}'_{x+0} - \bar{M}'_{x+n} + D'_{x+n}}{D'_{x+n}} = {}_n(E)_{x+0}^1 \bar{A}'_{x+0:\bar{n}}.$$

Am Ende des t . Jahres ist der Barwert der bisherigen und der künftigen Zahlungen an Versicherungssummen gleich

$$(83) \quad (\bar{A})_{x+0:\bar{t}}'^1 + \bar{A}'_{x+t:\bar{n}-t} = {}_t(E)_{x+0}^1 \bar{A}'_{x+0:\bar{n}}.$$

4. Barwert der verausgabten Rückkaufssummen für die Versicherungssumme 1.

Da während den zwei ersten Versicherungsjahren keine Rückkäufe stattfinden, so ist der Barwert der Rückkaufssummen für $t = 0$ bis 2 gleich 0. Ist $t \geq 3$, so ergibt sich der Barwert $(A)_{x+0:\bar{t}}^{ra}$ der am Anfang der Versicherungsjahre ausbezahlten Rückkaufssummen zu

$$(84) \quad (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} = \frac{W_{x+2}^a - W_{x+t}^a}{D'_{x+t}}$$

und der Barwert $(A)_{x+0:\bar{t}}^{re}$ der am Ende der Versicherungsjahre ausbezahlten Rückkaufssummen zu

$$(85) \quad (A)_{x+0:\bar{t}}^{re} = \frac{W_{x+2}^e - W_{x+t}^e}{D'_{x+t}}.$$

Am Ende des n . Jahres sind die entsprechenden Barwerte der ausbezahlten Rückkaufssummen

$$(86) \quad (A)_{x+0:\bar{n}}^{ra} = \frac{W_{x+2}^a}{D'_{x+n}} = {}_n(E)'_{x+0} A_{x+0:\bar{n}}^{ra},$$

$$(87) \quad (A)_{x+0:\bar{n}}^{re} = \frac{W_{x+2}^e}{D'_{x+n}} = {}_n(E)'_{x+0} A_{x+0:\bar{n}}^{re}.$$

Dabei ist am Ende des t . Jahres die Summe der Barwerte der bisherigen und künftigen Rückkaufssummen

$$(88) \quad (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} + A_{x+t:\bar{n-t}}^{ra} = \frac{W_{x+2}^a}{D'_{x+t}} = {}_t(E)'_{x+0} A_{x+0:\bar{n}}^{ra},$$

$$(89) \quad (A)_{x+0:\bar{t}}^{re} + A_{x+t:\bar{n-t}}^{re} = \frac{W_{x+2}^e}{D'_{x+t}} = {}_t(E)'_{x+0} A_{x+0:\bar{n}}^{re}.$$

Für die Berechnung der ausreichenden Prämien schreiben wir nach t Jahren den Barwert der am Anfang der Jahre ausbezahlten Rückkaufssummen in der folgenden Form:

$$(90) \quad (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} = \frac{W_{x+2}^a - W_{x+t}^a}{D'_{x+t}} + \pi_{x\bar{n}} \frac{W_{x+2}^{''a} - W_{x+t}^{''a}}{D'_{x+t}} \\ = (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} + \pi_{x\bar{n}} (A)_{x+0:\bar{t}}^{''ra}.$$

Am Ende des n . Jahres ist der entsprechende Barwert

$$(91) \quad (A)_{x+0:\bar{n}}^{ra} = \frac{W_{x+2}^a + \pi_{x\bar{n}} W_{x+2}^{''a}}{D'_{x+n}} \\ = (A)_{x+0:\bar{n}}^{ra} + \pi_{x\bar{n}} (A)_{x+0:\bar{n}}^{''ra} \\ = {}_n(E)'_{x+0} (A)_{x+0:\bar{n}}^{ra} + \pi_{x\bar{n}} A_{x+0:\bar{n}}^{''ra}.$$

Die Summe der Barwerte der bisherigen und der künftigen Rückkaufssummen ist am Ende des t . Jahres gleich

$$(92) \quad (A)'_{x+0:\bar{t}} + A'_{x+t:\bar{n}-t} = \frac{W'_{x+2}^a}{D'_{x+t}} = {}_t(E)'_{x+0} A'_{x+0:\bar{n}}.$$

$$(93) \quad (A)''_{x+0:\bar{t}} + A''_{x+t:\bar{n}-t} = \frac{W''_{x+2}^a}{D'_{x+t}} = {}_t(E)'_{x+0} A''_{x+0:\bar{n}}.$$

5. Barwert der verausgabten Inkassoprovisionen.

Im ersten Versicherungsjahr werden keine Inkassoprovisionen ausbezahlt, somit ist der Barwert der Inkassoprovision am Ende des ersten Jahres gleich 0. Für $t \geq 2$ ist der Barwert der verausgabten Inkassoprovisionen auf den Prämien, am Ende des t . Jahres

$$(94) \quad \beta \pi_{x\bar{n}} \frac{N'_{x+1} - N'_{x+t}}{D'_{x+t}} \\ = \beta \pi_{x\bar{n}} ((a)'_{x+0:\bar{t}} - {}_t(E)'_{x+0}) = \beta \pi_{x\bar{n}} {}_t(E)'_{x+0} (a'_{x+0:\bar{t}} - 1)$$

und am Ende des n . Jahres

$$(95) \quad \beta \pi_{x\bar{n}} ((a)'_{x+0:\bar{n}} - {}_n(E)'_{x+0}) \\ = \beta \pi_{x\bar{n}} {}_n(E)'_{x+0} (a'_{x+0:\bar{n}} - 1).$$

Der Barwert der Inkassoprovision ist am Ende des t . Jahres auf den bar ausbezahlten Dividenden, $t > c$, wenn wir mit $(\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}$ den Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1% des Verteilungsmassstabes bezeichnen, gleich

$$(96) \quad \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}.$$

Am Ende des n . Jahres sei der Barwert der bisher ausbezahlten Dividenden $(\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n}}$. Dieser ist, wenn $(D)_{x+0:\bar{n+1}}$ den Barwert der sämtlichen Dividenden, inklusive der Schlussdividende, angibt [siehe den Abschnitt VI, 3, Gleichung (164)], gleich

$$(97) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n}} = (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n\varphi_{x\bar{n}}.$$

Demnach ist am Ende des n . Jahres der Barwert der Inkassoprovision auf den bisher bezahlten Dividenden

$$(98) \quad \begin{aligned} \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n}} &= \beta \psi_{x\bar{n}} ((\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n\varphi_{x\bar{n}}) \\ &= \beta \psi_{x\bar{n}} {}_n(E)'_{x+0} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_nE'_{x+0} {}_n\varphi_{x\bar{n}}), \end{aligned}$$

sofern die im Abschnitt VI, 3, als richtig nachzuweisende Beziehung (166) besteht

$$(99) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} = {}_n(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}.$$

Somit ist der Barwert der Inkassoprovision am Ende des t . Jahres

$$(100) \quad \beta \left(\pi_{x\bar{n}} ((\mathbf{a})'_{x+0:\bar{t}} - {}_t(E)'_{x+0}) - \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}} \right)$$

und am Ende des n . Jahres

$$(101) \quad \begin{aligned} &\beta \left(\pi_{x\bar{n}} ((\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n}} - {}_n(E)'_{x+0}) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{x\bar{n}} ((\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n\varphi_{x\bar{n}}) \right) \\ &= \beta {}_n(E)'_{x+0} \left(\pi_{x\bar{n}} (\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}} - 1) - \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} \right. \\ &\quad \left. - {}_nE'_{x+0} {}_n\varphi_{x\bar{n}}) \right). \end{aligned}$$

Der Barwert der Inkassoprovision ist am Ende des t . Jahres nach der retrospektiven und der prospektiven Methode zusammen gleich

$$\begin{aligned}
 (102) \quad & \beta \left(\pi_{x \bar{n}} ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{t}} - {}_t(E)'_{x+0}) - \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{t}} \right) \\
 & + \beta \left(\pi_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} - \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - {}_{n-t}E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) \right) \\
 & = \beta {}_t(E)'_{x+0} \left(\pi_{x \bar{n}} (\mathbf{a}'_{x+0: \bar{n}} - 1) \right. \\
 & \left. - \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) \right).
 \end{aligned}$$

Hier ist die im Abschnitt VIII, 3, als richtig nachzuweisende Beziehung (243) benutzt worden

$$(103) \quad (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{t}} + \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} = {}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}}.$$

Für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen fällt in den obigen Formeln der Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden weg. Es ist somit der Barwert der Inkassoprovision am Ende des t . Jahres

$$(104) \quad \beta \pi_{x \bar{n}} ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{t}} - {}_t(E)'_{x+0})$$

und am Ende des n . Jahres

$$\begin{aligned}
 (105) \quad & \beta \pi_{x \bar{n}} ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{n}} - {}_n(E)'_{x+0}) \\
 & = \beta {}_n(E)'_{x+0} \pi_{x \bar{n}} (\mathbf{a}'_{x+0: \bar{n}} - 1).
 \end{aligned}$$

6. Barwert der verausgabten inneren Verwaltungskosten.

Der Barwert der inneren Verwaltungskosten ist am Ende des t . Jahres

$$(106) \quad \gamma ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{t}} - (A)_{x+0: \bar{t}}^a),$$

wobei

$$(107) \quad (A)_{x+0: \bar{t}}^a = \frac{H_{x+0}^a - H_{x+t}^a}{D'_{x+t}}$$

gesetzt wurde. Am Ende des n . Jahres ist der Barwert der inneren Verwaltungskosten gleich

$$(108) \quad \gamma \left((a)'_{x+0:\bar{n}} - (A)_{x+0:\bar{n}}^a \right) \\ = \gamma_n (E)'_{x+0} \left(a'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^a \right).$$

Die Summe der Barwerte der inneren Verwaltungskosten ist am Ende des t . Jahres nach der retrospektiven und der prospektiven Methode zusammen

$$(109) \quad \gamma \left((a)'_{x+0:\bar{t}} - (A)_{x+0:\bar{t}}^a \right) \\ + \gamma \left(a'_{x+t:\bar{n-t}} - A_{x+t:\bar{n-t}}^a \right) = \gamma_t (E)'_{x+0} \left(a'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^a \right).$$

IV. Berechnung des theoretischen Überschusses einer Versicherung für ein Versicherungsjahr nach den Grundlagen zweiter Ordnung.

1. Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen.

Jede der am Anfang eines Versicherungsjahres bestehenden Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen liefert, bei normalem Verlauf der Verhältnisse, einen bestimmten Überschuss. Wir bezeichnen mit ${}_t G_x$ den auf Ende des $(t+1)$. Versicherungsjahres aufgezinsten Überschuss, welcher auf jeder der am Anfang des Jahres vorhandenen Versicherungen erzielt wird.

Der Überschuss auf den sämtlichen nach der Dekremententafel am Anfang des $(t+1)$. Jahres lebenden l'_{x+t} Versicherten ist auf das Ende des Jahres

aufgezinst gleich den Einnahmen an Deckungskapitalien und Prämien am Anfang des Jahres, abzüglich den Ausgaben am Anfang und im Laufe des Jahres, bestehend in Sterbesummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten, sämtliche Posten auf das Ende des Jahres aufgezinst, sowie in den am Ende des Jahres zurückzustellenden Deckungskapitalien. Dabei hat die Verzinsung der Einnahmen an Deckungskapitalien und Prämien am Anfang des Jahres für ein ganzes Jahr zu erfolgen. Die Sterbesummen werden als unmittelbar nach dem Tode zahlbar vorausgesetzt, so dass sie durchschnittlich vom Todestage an für ein halbes Jahr zu verzinsen sind. Die am Anfang des Jahres auszuzahlenden Rückkaufssummen sind für ein Jahr, die am Ende des Jahres zu zahlenden Rückkaufssummen für 0 Jahre zu verzinsen. Die Inkassoprovision soll nur auf der Barprämie ausgerichtet werden. Bezeichnen wir mit $t\varphi_{x\bar{n}}$ die Dividende des $(t+1)$. Jahres bei einem Dividendensatz von 1% und mit $\psi_{x\bar{n}}$ den Dividendensatz, so ist die gesamte Dividende $\psi_{x\bar{n}} t\varphi_{x\bar{n}}$, somit die Barprämie $\pi_{x\bar{n}} - \psi_{x\bar{n}} t\varphi_{x\bar{n}}$. Dabei soll die Auszahlung an Dividenden nach c Jahren, mit dem $(c+1)$. Jahre beginnen, wobei c in der Regel gleich 2 bis 5 gewählt wird. Für $t < c$ ist demnach die Barprämie gleich der Bruttoprämie. Die Ausgabe an Inkassoprovision ist für ein ganzes Jahr zu verzinsen. Die inneren Verwaltungskosten sollen nur für die nach Abzug der Austritte am Anfang des Jahres noch vorhandenen Versicherten verrechnet werden. Die entsprechende Ausgabe ist für ein ganzes Jahr zu verzinsen. Die Verzinsung erfolgt zum wirklichen Zinsfuss von $i'\%$.

Der gesamte Überschuss des $(t+1)$. Jahres, auf Ende des Jahres aufgezinst, berechnet sich somit bei

der gemischten Versicherung im Betrage 1 für die l'_{x+t} am Anfang des Jahres lebenden Versicherten aus der Gleichung

(110)

$$\begin{aligned}
 l'_{x+t} G_x &= l'_{x+t} ({}_t V_x + \pi_{x \bar{n}}) (1 + i') - k_{x+t}^a {}_t r_x^a (1 + i') \\
 &\quad - d'_{x+t} (1 + i')^{1/2} - k_{x+t}^e {}_t r_x^e - l'_{x+t+1} V_x - \beta l'_{x+t} (\pi_{x \bar{n}} \\
 &\quad - \psi_{x \bar{n}} {}_t \varphi_{x \bar{n}}) (1 + i') - \gamma (l'_{x+t} - k_{x+t}^a) (1 + i') \\
 &= (l'_{x+t} ({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_t \varphi_{x \bar{n}}) - k_{x+t}^a {}_t r_x^a \\
 &\quad - \gamma (l'_{x+t} - k_{x+t}^a) (1 + i') - d'_{x+t} (1 + i')^{1/2} - k_{x+t}^e {}_t r_x^e \\
 &\quad - l'_{x+t+1} V_x.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung schreibt sich auch, wenn wir auf beiden Seiten mit v'^{x+t+1} multiplizieren

(111)

$$\begin{aligned}
 D'_{x+t} G_x &= \left[D'_{x+t} ({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_t \varphi_{x \bar{n}}) \right. \\
 &\quad \left. - K_{x+t}^a {}_t r_x^a - \gamma (D'_{x+t} - K_{x+t}^a) - \bar{C}'_{x+t} - K_{x+t}^e {}_t r_x^e \right. \\
 &\quad \left. - D'_{x+t+1} V_x \right] (1 + i').
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt der Überschuss des $(t + 1)$. Jahres, auf Ende des Jahres aufgezinst, für einen einzelnen der am Anfang des Jahres zahlenden Versicherten zu

$$\begin{aligned}
 (112) \quad & {}_t G_x = \left({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_t \varphi_{x \bar{n}} - \frac{k_{x+t}^a}{l'_{x+t}} {}_t r_x^a \right. \\
 & \quad \left. - \gamma \left(1 - \frac{k_{x+t}^a}{l'_{x+t}} \right) \right) (1 + i') - \frac{d'_{x+t}}{l'_{x+t}} (1 + i')^{1/2} - \frac{k_{x+t}^e}{l'_{x+t}} {}_t r_x^e \\
 & \quad - \frac{l'_{x+t+1}}{l'_{x+t}} {}_{t+1} V_x \\
 = & \left({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_t \varphi_{x \bar{n}} - \sigma_{x+t}^a {}_t r_x^a - \gamma (1 - \sigma_{x+t}^a) \right) (1 \\
 & \quad - (1 - \sigma_{x+t}^a) q'_{x+t} (1 + i')^{1/2} - (1 - \sigma_{x+t}^a) (1 - q'_{x+t}) \sigma_{x+t}^e {}_t r_x^e \\
 & \quad - (1 - \sigma_{x+t}^a) (1 - q'_{x+t}) (1 - \sigma_{x+t}^e) {}_{t+1} V_x \\
 = & \left({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_t \varphi_{x \bar{n}} - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} {}_t r_x^a - \frac{\bar{C}_{x+t}'}{D'_{x+t}} \right. \\
 & \quad \left. - \gamma \left(1 - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} \right) - \frac{K_{x+t}^e}{D'_{x+t}} {}_t r_x^e - \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} {}_{t+1} V_x \right) (1 + i').
 \end{aligned}$$

In den Gleichungen (110) bis (112) sind die Rückkaufswerte für das erste und zweite Versicherungsjahr gleich 0 zu setzen, indem Rückkäufe erst nach Zahlung von drei Prämien zulässig sind. Ferner fällt die Inkassoprovision auf den Überschussanteilen für $t < c$ weg.

Für das erste Versicherungsjahr sind die Gleichungen (110) bis (112) nicht mehr anwendbar, da im Eintrittsjahr die Abschlussprovision auszurichten, eine Inkassoprovision aber nicht zu zahlen ist. Der gesamte aufgezinste Überschuss des ersten Jahres ist vielmehr

(113)

$$\begin{aligned}
 l'_{x+0} G_x &= l'_{x+0} \pi_{x \bar{n}} (1+i') - d'_{x+0} (1+i')^{1/2} - l'_{x+1} V_x \\
 &\quad - \alpha l'_{x+0} (1+i') - \gamma (l'_{x+0} - k_{x+0}^a) (1+i') \\
 &= (l'_{x+0} (\pi_{x \bar{n}} - \alpha) - \gamma (l'_{x+0} - k_{x+0}^a)) (1+i') - d'_{x+0} (1+i')^{1/2} \\
 &\quad - l'_{x+1} V_x.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung schreibt sich auch

$$\begin{aligned}
 (114) \quad D'_{x+0} G_x &= (D'_{x+0} (\pi_{x \bar{n}} - \alpha) - \gamma (D'_{x+0} - K_{x+0}^a)) \\
 &\quad - \bar{C}'_{x+0} - D'_{x+1} V_x (1+i').
 \end{aligned}$$

Für einen einzelnen Versicherten berechnet sich der aufgezinste Überschuss des ersten Jahres zu

(115)

$$\begin{aligned}
 {}_0 G_x &= \left(\pi_{x \bar{n}} - \alpha - \gamma \left(1 - \frac{k_{x+0}^a}{l'_{x+0}} \right) \right) (1+i') - \frac{d'_{x+0}}{l'_{x+0}} (1+i')^{1/2} \\
 &\quad - \frac{l'_{x+1}}{l'_{x+0}} V_x \\
 &= (\pi_{x \bar{n}} - \alpha - \gamma (1 - \sigma_{x+0}^a)) (1+i') - (1 - \sigma_{x+0}^a) q'_{x+0} (1+i')^{1/2} \\
 &\quad - (1 - \sigma_{x+0}^a) (1 - q'_{x+0}) (1 - \sigma_{x+0}^e) V_x \\
 &= \left(\pi_{x \bar{n}} - \alpha - \gamma \left(1 - \frac{K_{x+0}^a}{D'_{x+0}} \right) - \frac{\bar{C}'_{x+0}}{D'_{x+0}} - \frac{D'_{x+1}}{D'_{x+0}} V_x \right) (1+i').
 \end{aligned}$$

Zufolge den Gleichungen (112) und (115) sind die jährlichen Überschüsse, bei derselben Berechnungsweise des Deckungskapitals und der nämlichen Prämie, für alle Dividendensysteme gleich gross, solange $t < c$ ist.

Für $t \geq c$ sind dagegen die jährlichen Überschüsse um die Inkassoprovisionen auf den Dividenden von einander abweichend; es beträgt nämlich die Differenz der Überschüsse für zwei Dividendensysteme a und b , wenn wir die auf die zwei Systeme bezüglichen Werte durch die Indices a und b unterscheiden

$$(116) \quad {}_t G_x^a - {}_t G_x^b = \beta (\psi_{x \bar{n}}^a {}_t \varphi_{x \bar{n}}^a - \psi_{x \bar{n}}^b {}_t \varphi_{x \bar{n}}^b).$$

Es mag hier darauf hingewiesen werden, dass die Inkassoprovision auf den Dividenden nicht als produzierter Überschuss, sondern als Rückzahlung von Seiten des Versicherten aufzufassen ist.

Die vorstehenden Ableitungen sind unter der Voraussetzung durchgeführt worden, dass während der ganzen Versicherungsdauer eine gleichbleibende Prämie bezahlt wird. Handelt es sich aber um steigende oder abnehmende Prämien, so sind für die verschiedenen Arten der Zu- oder Abnahme entsprechende Formeln abzuleiten. Es ist hier nicht der Ort, auf alle diese möglichen Kombinationen einzutreten. Wir wollen nur den Fall behandeln, da die Bruttoprämie vom $(c+1)$. Jahre an für die Versicherungssumme 1 gleich $\pi_{x \bar{n}}$, für die ersten c Jahre dagegen um den Betrag $b_{x \bar{n}}$ grösser oder kleiner als $\pi_{x \bar{n}}$ ist, so dass die ersten c Prämien mit $\pi_{x \bar{n}} \pm b_{x \bar{n}}$, die folgenden mit $\pi_{x \bar{n}}$ zu entrichten sind. Über die Rechnungsart des Deckungskapitals bei zu- oder abnehmenden Prämien wollen wir hier keine Voraussetzungen treffen, vielmehr wollen wir diese Werte als gegeben betrachten.

Beim System der nach c Jahren steigenden oder fallenden Bruttoprämienvindet sich der gesamte Überschuss, sowie der Überschuss des $(t+1)$. Jahres für einen einzelnen Versicherten nach den Gleichungen

(110) bis (112), sofern $t \geqq c$ ist. Für $t < c$ ist in den Gleichungen (110) bis (115) überall $\pi_{x \bar{n}} \pm b_{x \bar{n}}$ an Stelle von $\pi_{x \bar{n}}$ zu setzen.

Die hier aufgestellten Gleichungen (110) bis (115) sind für jede Berechnungsmethode des Deckungskapitals gültig. Sind demnach die Prämien und das Deckungskapital gegeben, so lässt sich der jährliche Überschuss ermitteln. Umgekehrt könnten die Formeln aber auch benutzt werden zur Berechnung des Deckungskapitals, sofern die jährlichen Überschüsse bei gegebenen Prämien vorgeschrieben wären.

Die jährlichen Überschüsse der gemischten Versicherung mit Anteil an den Überschüssen fällig nach 25 Jahren, sind für das Eintrittsalter 30 bei einer gleichbleibenden Prämie, für neun verschiedene Berechnungsarten des Deckungskapitals und für drei Überschusssysteme in der Tabelle 10 im Anhang bei einer Versicherungssumme von 10 000 gegeben.

2. Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen.

Die Formeln des vorangehenden Abschnittes sind aufgestellt worden für Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen. Sie werden aber auch für Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen Verwendung finden, indem bei diesen die einzelnen Versicherungsjahre, je nach der Höhe der Prämien und der Art der Berechnung des Deckungskapitals, entweder Überschüsse oder Verluste ergeben werden. Wir brauchen in den Formeln (110) bis (115) nur den Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden gleich 0 zu setzen, um die Formeln zur Berechnung des jährlichen Überschusses der Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen zu erhalten. Demnach ist der aufgezinste jährliche Überschuss des $(t + 1)$. Jahres gleich

(117)

$$\begin{aligned}
 {}_t G_x &= \left({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} - \frac{k_{x+t}^a}{l'_{x+t}} {}_t r_x^a - \gamma \left(1 - \frac{k_{x+t}^a}{l'_{x+t}} \right) \right) (1 + \\
 &\quad - \frac{d'_{x+t}}{l'_{x+t}} (1 + i')^{1/2} - \frac{k_{x+t}^e}{l'_{x+t}} {}_t r_x^e - \frac{l'_{x+t+1}}{l'_{x+t}} {}_{t+1} V_x \\
 &= \left({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} {}_t r_x^a - \gamma \left(1 - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} \right) - \frac{\bar{C}'_{x+t}}{D'_{x+t}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{K_{x+t}^e}{D'_{x+t}} {}_t r_x^e - \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} {}_{t+1} V_x \right) (1 + i').
 \end{aligned}$$

Der aufgezinste Überschuss des ersten Jahres berechnet sich nach Gleichung (115).

Für die gemischte Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen, fällig nach 25 Jahren, sind die jährlichen Überschüsse des Eintrittsalters 30 bei acht verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals aus Tabelle 16 zu entnehmen.

V. Berechnung der ausreichenden Prämien nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der prospektiven Methode.

1. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet.

Die vom Versicherten zu zahlende Bruttoprämie mit Anteil an den Überschüssen wurde für die Versicherungssumme 1 mit $\pi_{x \bar{n}}$ bezeichnet. Auf dieser Bruttoprämie erzielt die Gesellschaft während dem Bestehen

der Versicherung bestimmte jährliche Überschüsse, deren Barwert $u_{x+0:\bar{n}}$ beim Eintritt ermittelt werden soll.

Beim Eintritt ist der Barwert der Einnahmen an Prämien nach den Grundlagen zweiter Ordnung gleich

$$(118) \quad \pi_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}}.$$

Aus diesem Barwert sind zunächst die Barwerte der Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten zu decken. Der nach Abzug dieser Barwerte noch verbleibende Betrag kann als verfügbarer Überschuss unter die Versicherten verteilt werden. Der Barwert der Ausgaben an Versicherungssummen ist für die gemischte Versicherung durch den Ausdruck (33) gegeben. Der Barwert der Ausgaben an Rückkaufssummen lässt sich aus den Ausdrücken (46), (47) und (55) ableiten zu

$$(119) \quad \begin{aligned} & A_{x+0:\bar{n}}^{ra} + A_{x+0:\bar{n}}^{re} \\ & = A_{x+0:\bar{n}}^{ra} + \pi_{x\bar{n}} A_{x+0:\bar{n}}^{ra} + A_{x+0:\bar{n}}^{re}. \end{aligned}$$

Die Abschlussprovision ist α ; der Barwert der Inkassoprovision ist durch den Ausdruck (68) gegeben. Der Barwert der inneren Verwaltungskosten findet sich nach Formel (73). Somit ist der Barwert der Einnahmen an Überschüssen beim Eintritt gleich

$$(120) \quad \begin{aligned} u_{x+0:\bar{n}} & = \pi_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} - \bar{A}'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^{ra} - A_{x+0:\bar{n}}^{re} \\ & - \alpha - \beta (\pi_{x\bar{n}} (a'_{x+0:\bar{n}} - 1) - \psi_{x\bar{n}} (\mathcal{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x\bar{n}})) \\ & - \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^a) \\ & = (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} - \bar{A}'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^{ra} - A_{x+0:\bar{n}}^{re} \\ & - \alpha + \beta (\pi_{x\bar{n}} + \psi_{x\bar{n}} (\mathcal{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x\bar{n}})) \\ & - \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^a). \end{aligned}$$

Der Barwert des Überschusses beim Eintritt wird auch erhalten, indem wir die gesamten Überschüsse der einzelnen Versicherungsjahre (siehe Abschnitt IV) auf den Eintritt zurückdiskontieren und die Summe dieser Werte bilden. Da wir den Überschuss für ein Versicherungsjahr auf das Ende desselben aufgezinst haben, so ist der Barwert aller Überschüsse einer Versicherung auf den Eintritt bezogen gleich

(121)

$$\begin{aligned}
 u_{x+0:\bar{n}} &= \frac{v'}{l'_{x+0}} \left(l'_{x+0} G_x + v' l'_{x+1} G_x + v'^2 l'_{x+2} G_x \right. \\
 &\quad \left. + \dots + v'^t l'_{x+t} G_x + \dots + v'^{n-1} l'_{x+n-1} G_x \right) \\
 &= \frac{v'}{D'_{x+0}} \left(D'_{x+0} G_x + D'_{x+1} G_x + D'_{x+2} G_x + \dots \right. \\
 &\quad \left. + D'_{x+t} G_x + \dots + D'_{x+n-1} G_x \right).
 \end{aligned}$$

Hierbei ist nach Gleichung (114)

(122)

$$\begin{aligned}
 v' D'_{x+0} G_x &= D'_{x+0} (\pi_{x\bar{n}} - \alpha) - \gamma (D'_{x+0} - K_{x+0}^a) - \bar{C}'_{x+0} \\
 &\quad - D'_{x+1} V_x \\
 &= D'_{x+0} ((1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} - \alpha + \beta \pi_{x\bar{n}}) - \gamma (D'_{x+0} - K_{x+0}^a) - \bar{C}'_x \\
 &\quad - D'_{x+1} V_x.
 \end{aligned}$$

Ferner ist nach der Gleichung (111)

$$\begin{aligned}
 (123) \quad v' D'_{x+t} G_x &= D'_{x+t} (V_x + (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} \\
 &\quad + \beta \psi_{x\bar{n}} \varphi_{x\bar{n}}) - K_{x+t}^a r_x^a - \gamma (D'_{x+t} - K_{x+t}^a) \\
 &\quad - \bar{C}'_{x+t} - K_{x+t}^s r_x^e - D'_{x+t+1} V_x.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten den voraussichtlich zu erzielenden Überschuss auf den Eintritt zurückdiskontiert, indem wir in Gleichung (123) für t alle Werte von 1 bis $n-1$ einsetzen, die erhaltenen Ausdrücke summieren, zu der Summe den Ausdruck nach Gleichung (122) addieren und die Gesamtsumme durch D'_{x+0} dividieren. Es ergibt sich deshalb, wenn die Auszahlung von Dividenden nach c Jahren beginnt

(124)

$$\begin{aligned}
 u_{x+0:n} &= \frac{1}{D'_{x+0}} \left\{ D'_{x+0} ((1-\beta) \pi_{x\bar{n}} - a + \beta \pi_{x\bar{n}}) - \bar{C}'_{x+0} \right. \\
 &\quad - \gamma (D'_{x+0} - K^a_{x+0}) - D'_{x+1} V_x + D'_{x+1} ({}_1 V_x + (1-\beta) \pi_{x\bar{n}}) \\
 &\quad - \bar{C}'_{x+1} - \gamma (D'_{x+1} - K^a_{x+1}) - D'_{x+2} V_x + D'_{x+2} ({}_2 V_x + (1-\beta) \pi_{x\bar{n}}) \\
 &\quad - K^a_{x+2} {}_2 r^a_x - \bar{C}'_{x+2} - \gamma (D'_{x+2} - K^a_{x+2}) - K^e_{x+2} {}_2 r^e_x \\
 &\quad - D'_{x+3} {}_3 V_x + \dots + D'_{x+c} ({}_c V_x + (1-\beta) \pi_{x\bar{n}} + \beta \psi_{x\bar{n}} {}_c \varphi_{x\bar{n}}) \\
 &\quad - K^a_{x+c} {}_c r^a_x - \bar{C}'_{x+c} - \gamma (D'_{x+c} - K^a_{x+c}) - K^e_{x+c} {}_c r^e_x \\
 &\quad - D'_{x+c+1} {}_{c+1} V_x + D'_{x+c+1} ({}_{c+1} V_x + (1-\beta) \pi_{x\bar{n}} + \beta \psi_{x\bar{n}} {}_{c+1} \varphi_{x\bar{n}}) \\
 &\quad - K^a_{x+c+1} {}_{c+1} r^a_x - \bar{C}'_{x+c+1} - \gamma (D'_{x+c+1} - K^a_{x+c+1}) \\
 &\quad - K^e_{x+c+1} {}_{c+1} r^e_x - D'_{x+c+2} {}_{c+2} V_x + \dots + D'_{x+t} ({}_t V_x + (1-\beta) \pi_{x\bar{n}} \\
 &\quad + \beta \psi_{x\bar{n}} {}_t \varphi_{x\bar{n}}) - K^a_{x+t} {}_t r^a_x - \bar{C}'_{x+t} - \gamma (D'_{x+t} - K^a_{x+t}) \\
 &\quad - K^e_{x+t} {}_t r^e_x - D'_{x+t+1} {}_{t+1} V_x + \dots + D'_{x+n-1} ({}_{n-1} V_x + (1-\beta) \pi_{x\bar{n}} \\
 &\quad + \beta \psi_{x\bar{n}} {}_{n-1} \varphi_{x\bar{n}}) - K^a_{x+n-1} {}_{n-1} r^a_x - \bar{C}'_{x+n-1} - \gamma (D'_{x+n-1} \\
 &\quad - K^a_{x+n-1}) - K^e_{x+n-1} {}_{n-1} r^e_x - D'_{x+n} {}_n V_x \} \\
 &\quad + \beta {}_n E'_{x+0} \psi_{x\bar{n}} {}_n \varphi_{x\bar{n}} - \beta {}_n E'_{x+0} \psi_{x\bar{n}} {}_n \varphi_{x\bar{n}}.
 \end{aligned}$$

Wir haben hier am Schlusse den Barwert der Inkassoprovision auf der Schlussdividende, weil diese nicht auszuzahlen ist, hinzugefügt und wieder abgezogen.

In der Gleichung (124) fallen die Deckungskapitalien je am Ende eines Jahres und am Anfang des folgenden Jahres weg; es bleibt in der Formel nur noch das Deckungskapital am Ende des n . Jahres stehen. Durch Zusammenzug der übrigen Glieder erhalten wir sukzessive

$$(125) \quad \frac{(1-\beta) \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} (D'_{x+0} + D'_{x+1} + D'_{x+2} + \dots + D'_{x+c} + \dots + D'_{x+t} + \dots + D'_{x+n-1}) = (1-\beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0: \bar{n}},$$

$$(126) \quad \frac{\beta \psi_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} (D_{x+c \ c} q_{x \bar{n}} + D'_{x+c+1 \ c+1} q_{x \bar{n}} + \dots + D'_{x+t \ t} q_{x \bar{n}} + \dots + D'_{x+n-1 \ n-1} q_{x \bar{n}} + D_{x+n \ n} q_{x \bar{n}}) = \beta \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}}$$

(siehe hierzu die Ableitungen im zweitfolgenden Abschnitt).

$$(127) \quad \frac{1}{D'_{x+0}} (K_{x+2 \ 2}^a r_x^a + \dots + K_{x+c \ c}^a r_x^a + K_{x+c+1 \ c+1}^a r_x^a + \dots + K_{x+t \ t}^a r_x^a + \dots + K_{x+n-1 \ n-1}^a r_x^a) = A_{x+0: \bar{n}}^a,$$

$$(128) \quad \frac{1}{D'_{x+0}} (\bar{C}'_{x+0} + \bar{C}'_{x+1} + \bar{C}'_{x+2} + \dots + \bar{C}'_{x+c} + \dots + \bar{C}'_{x+c+1} + \dots + \bar{C}'_{x+t} + \dots + \bar{C}'_{x+n-1}) = \bar{A}'_{x+0: \bar{n}},$$

$$(129) \quad \frac{1}{D'_{x+0}} (K_{x+2}^e r_x^e + \dots + K_{x+c}^e r_x^e + K_{x+c+1}^e r_x^e + \dots + K_{x+t}^e r_x^e + \dots + K_{x+n-1}^e r_x^e) = A_{x+0:\bar{n}}^{re},$$

$$(130) \quad \frac{\gamma}{D'_{x+0}} (D'_{x+0} - K_{x+0}^a + D'_{x+1} - K_{x+1}^a + \dots + D'_{x+c} - K_{x+c}^a + \dots + D'_{x+t} - K_{x+t}^a + \dots + D'_{x+n-1} - K_{x+n-1}^a) = \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^a).$$

In Gleichung (128) ist

$$(131) \quad \frac{\bar{M}'_{x+0} - \bar{M}'_{x+n}}{D'_{x+0}} = \bar{A}'^1_{x+0:\bar{n}}$$

der Barwert der temporären Versicherung 1. Demnach geht die Gleichung (124) über in die folgende

$$(132) \quad u_{x+0:\bar{n}} = (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} - \bar{A}'^1_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^{ra} - A_{x+0:\bar{n}}^{re} - a + \beta (\pi_{x\bar{n}} + \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0:n} \varphi_{x\bar{n}})) - \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^a) - {}_n E'_{x+0:n} V_x.$$

Hierbei ist für die gemischte Versicherung, da das Deckungskapital am Ende des n . Jahres gleich 1 ist

$$(133) \quad \bar{A}'^1_{x+0:\bar{n}} + {}_n E'_{x+0} = \bar{A}'_{x+0:\bar{n}},$$

so dass die Gleichung (132) mit der Gleichung (120) identisch ist.

Wie sich aus diesen Ableitungen ersehen lässt, ist somit beim Eintritt der Barwert der Einnahmen an Überschüssen für die gemischte Versicherung voll-

ständig von der Höhe der jedes Jahr einzusetzenden rechnungsmässigen Deckungskapitalien unabhängig; er muss gleich hoch ausfallen, ob das Deckungskapital gezielt wird oder nicht, indem er überhaupt unabhängig von der Wahl der Rechnungsgrundlagen für das Deckungskapital ist. Beim Eintritt ist demnach der Barwert der Einnahmen an Überschüssen nach allen Berechnungsmethoden des Deckungskapitals gleich gross.

Wir können dieses aus der Gleichung (120) abzulesende Resultat übrigens ohne weitere Ableitungen auf seine Richtigkeit prüfen. Die Einnahmen an Prämien und Zinsen, die Ausgaben für Versicherungssummen, Rückkaufssummen, Verwaltungskosten und Zinsen sind unabhängig von dem jedes Jahr einzusetzenden Deckungskapital und von den Grundlagen, nach denen das Deckungskapital berechnet wird. Folglich muss der beim Eintritt voraussichtlich für die Dividendenverteilung zur Verfügung stehende Betrag, weil er nur von der Höhe der Prämie, von der Sterblichkeit, der Verzinsung, den Abgangsverhältnissen, der Höhe der Rückkaufssummen und der Verwaltungskosten abhängig ist, durch die am Ende der Versicherungsjahre einzusetzenden Deckungskapitalien nicht beeinflusst werden. Daraus ergibt sich ohne weiteres, dass die in Aussicht zu nehmenden Dividendensätze bei gegebenen Prämien von den in die Bilanzen einzustellenden Deckungskapitalien ganz unabhängig sind. Wie die Gleichung (132) zeigt, ist diese Schlussfolgerung für die Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung entsprechend zu modifizieren.

Wir haben hier allerdings noch zu bemerken, dass die Überschüsse der einzelnen Versicherungsjahre durch die in die Bilanzen einzustellenden Deckungskapitalien

stark beeinflusst werden. Es lässt sich leicht der Nachweis leisten, dass der Überschuss des ersten Jahres um so kleiner ist, je grösser das Deckungskapital am Ende des Jahres eingesetzt wird und umgekehrt. Ferner, dass die Überschüsse der folgenden Jahre um so grösser sind, je kleiner der Überschuss des ersten Jahres sich ergab und umgekehrt, unter der Voraussetzung nämlich, dass das Deckungskapital nach den im Abschnitt IX, 1—3, und X, 1—3, zu erläuternden Regeln berechnet wird. Wir verweisen diesfalls auf die Resultate der Tabelle 10, in der wir die Überschüsse einer Versicherung mit Anteil an den Überschüssen, für jedes einzelne Versicherungsjahr bei neun verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals und für drei Überschusssysteme mitteilen, sowie auf die Resultate der Tabelle 16, in welcher die jährlichen Überschüsse einer Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen bei acht verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals gegeben sind.

Die hier gegebenen Ableitungen für den Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen sind nur für Versicherungen mit gleichbleibender Prämie gültig. Für Versicherungen mit vom $(c+1)$. Jahre an steigender oder abnehmender Prämie, ist der Barwert dieser Prämie beim Eintritt, abzüglich dem Barwert der Inkassoprovision

$$(134) \quad \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} \pm b_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{c}} - \beta (\pi_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} \\ \pm b_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{c}}) + \beta (\pi_{x \bar{n}} \pm b_{x \bar{n}}) = (1 - \beta) (\pi_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} \\ \pm b_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{c}}) + \beta (\pi_{x \bar{n}} \pm b_{x \bar{n}}).$$

Dieser Ausdruck tritt in den Gleichungen (120) und (132) an Stelle von $(1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} + \beta \pi_{x \bar{n}}$, während die übrigen Glieder unverändert bleiben.

2. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet.

Bei den Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen ergibt sich beim Eintritt der Barwert der Einnahmen an Überschüssen aus Gleichung (120), indem wir dort den Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden gleich 0 setzen, zu

$$(135) \quad u_{x+0:\bar{n}} = (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} - \bar{A}'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^{ra} - A_{x+0:\bar{n}}^{re} - a + \beta \pi_{x\bar{n}} - \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A_{x+0:\bar{n}}^a).$$

Ist die Prämie $\pi_{x\bar{n}}$ als ausreichende Prämie berechnet, so ist der Barwert der Einnahmen nach Gleichung (135) gleich 0.

3. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet.

Wir nehmen an, dass die erste Dividende nach c Jahren, mit Beginn des $(c+1)$. Versicherungsjahres, ausbezahlt werde und dass die letzte Dividende bei den auf n Jahre abgeschlossenen gemischten Versicherungen am Ende des n . Jahres, gleichzeitig mit der Versicherungssumme, zur Auszahlung gelange. Auf diese Weise wird eine Schlussdividende in die Rechnung eingeführt, welche aber, wie wir voraussetzen wollen, nur an die am Ende des n . Jahres lebenden Versicherten auszuzahlen ist, während an die am Ende des letzten Jahres austretenden Versicherten keine Schlussdividende zugeteilt wird.

Bei einzelnen Gesellschaften wird nicht nur eine Schlussdividende ausbezahlt, sondern es kommen meh-

rere Schlussdividenden entweder auf einmal oder in mehreren aufeinander folgenden Jahren zur Auszahlung. Auf die letztern Fälle wollen wir aber der Einfachheit wegen nicht eintreten, da die Formeln für dieselben leicht abzuleiten sind.

Als Überschusssysteme ziehen wir die folgenden Systeme in Betracht:

System A. Das System der gleichbleibenden Dividende, bei welchem der Überschuss vom $(c + 1)$. Jahre an im Verhältnis der gleichbleibenden Prämie zugeteilt wird.

System B. Das System der nach der Summe der Prämien steigenden Dividende. Bei diesem soll der Überschuss vom $(c + 1)$. Jahre an im Verhältnis der Summe der von Anfang an bezahlten Prämien zugeteilt werden, so dass die Dividende mit der $(c + 1)$. Prämie auf c Prämien, mit der $(c + 2)$. Prämie auf $c + 1$ Prämien usw., beim Verfall der Versicherungssumme auf n Prämien ausgerichtet wird.

System C. Das System der im Verhältnis des Deckungskapitals steigenden Dividende. Am Anfang des $(c + 1)$. Jahres soll die Dividende in Prozenten des Deckungskapitals nach c Jahren, am Anfang des $(c + 2)$. Jahres in Prozenten des Deckungskapitals nach $c + 1$ Jahren usw., beim Verfall der Versicherungssumme in Prozenten der Versicherungssumme zur Auszahlung gelangen.

Bei dem System *C* muss eine Annahme über die Höhe des als Grundlage der Verteilung dienenden Deckungskapitals getroffen werden, indem als Massstab der Verteilung auch ein anderes als das rechnungsmässige Deckungskapital benutzt werden kann. Wie aus den späteren Ableitungen ersichtlich wird, kann sich

die Berechnung der ausreichenden Prämie recht kompliziert gestalten, wenn das Deckungskapital auf Grundlage dieser ausreichenden Bruttoprämie oder einer daraus abgeleiteten Nettoprämie ermittelt wird.

Für die späteren zahlenmässigen Beispiele wurde beim System *C* der Einfachheit wegen als Grundlage der Verteilung das Deckungskapital nach der Tafel M. W. I bei $3\frac{1}{2}\%$ ohne Zillmerung angenommen, wobei die Sterbefälle als am Ende des Sterbejahres zahlbar vorausgesetzt sind. Dadurch wird erreicht, dass bei diesem System die Dividendensätze nach den verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals gleich hoch ausfallen.

Der zur Anwendung gelangende Dividendensatz wurde mit $\psi_{x\bar{n}}$ bezeichnet. Der Barwert der Dividenden von 1% der als Verteilungsmassstab dienenden Grösse sei beim Eintritt im Sinne der früheren Erklärungen gleich $\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}$. Dieser ist [siehe Gleichung (126)]

(136)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} &= \frac{1}{l'_{x+0}} \left(l'_{x+c} \varphi_{x\bar{n}} v'^c + l'_{x+c+1} \varphi_{x\bar{n}} v'^{c+1} \right. \\ &\quad + \dots + l'_{x+t} \varphi_{x\bar{n}} v'^t + \dots + l'_{x+n-1} \varphi_{x\bar{n}} v'^{n-1} \\ &\quad \left. + l'_{x+n} \varphi_{x\bar{n}} v'^n \right) \\ &= \frac{1}{D'_{x+0}} (D'_{x+c} \varphi_{x\bar{n}} + D'_{x+c+1} \varphi_{x\bar{n}} + \dots + D'_{x+t} \varphi_{x\bar{n}} \\ &\quad + \dots + D'_{x+n-1} \varphi_{x\bar{n}} + D'_{x+n} \varphi_{x\bar{n}}). \end{aligned}$$

Der Barwert der gesamten Ausgaben an Dividenden ist demnach

(137) $\psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}.$

Ad System A. Bei diesem Dividendensystem ist beim Dividendensatz von 1 % und der Versicherungssumme 1, die Dividende des $(t+1)$. Jahres, $t \geq c$, gleich

$$(138) \quad {}_t \varphi_{x \bar{n}} = 0,01 \pi_{x \bar{n}}.$$

Somit ist beim Eintritt der Barwert der Ausgaben an Dividenden, zahlbar vom $(c+1)$. Jahre an mit 1 % der Bruttoprämie, für die Versicherungssumme 1 gleich

$$(139) \quad \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} = \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} \sum_c^n D'_{x+t} = 0,01 \pi_{x \bar{n}} {}_c \mathbf{a}'_{x+0: \bar{n+1}}.$$

Ad System B. Die Dividende des $(t+1)$. Jahres ist bei einem Dividendensatz von 1 % der Prämiensumme, für die Versicherungssumme 1 gleich

$$(140) \quad {}_t \varphi_{x \bar{n}} = 0,01 t \pi_{x \bar{n}}.$$

Der Barwert der Dividenden von 1 % der Summe der sämtlichen bezahlten Prämien ist beim Eintritt gleich

$$\begin{aligned}
 (141) \quad \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} &= \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} \sum_c^n t D'_{x+t} \\
 &= \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} (c D'_{x+c} + (c+1) D'_{x+c+1} + \dots + t D'_{x+t} + \dots \\
 &\quad + n D'_{x+n}) \\
 &= \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} \left((c-1) (N'_{x+c} - N'_{x+n+1}) + S'_{x+c} - S'_{x+n+1} \right. \\
 &\quad \left. - (n-c+1) N'_{x+n+1} \right) \\
 &= 0,01 \pi_{x \bar{n}} ((c-1) {}_c \mathbf{a}'_{x+0: \bar{n+1}} + {}_c (\mathbf{I} \mathbf{a})'_{x+0: \bar{n+1}}).
 \end{aligned}$$

Die Berechnung des Barwertes gestaltet sich sehr einfach, wenn die Produkte $t D'_{x+t}$ für $t = c$ bis n ermittelt und diese von unten auf addiert werden.

Ad System C. Am Anfang des $(t+1)$. Jahres wird als Dividende beim Dividendensatz von 1% des Deckungskapitals der Betrag ausbezahlt

$$(142) \quad {}_t \varphi_{x \bar{n}} = 0,01 {}_t V_x.$$

Hieraus folgt der Barwert der Dividenden von 1% des Deckungskapitals auf den Eintritt bezogen zu

$$(143) \quad \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} = \frac{0,01}{D'_{x+0}} \sum_c^n D'_{x+t} {}_t V_x.$$

Der hier vorkommende Summenwert lässt sich am einfachsten durch Bildung der Produkte $D'_{x+t} {}_t V_x$ für alle Werte von c bis n und nachherige Addition von unten an berechnen.

Die Barwerte der Ausgaben an Dividenden sind bei den Systemen *A* und *B* abgeleitet worden, unter der Voraussetzung einer während der ganzen Versicherungsdauer gleichbleibenden Prämie. Findet mit dem Anfang des $(c+1)$. Jahres eine Zu- oder Abnahme der Prämie in der Weise statt, dass die Prämien von dort an konstant bleiben, so muss eine Festsetzung getroffen werden, in welchem Verhältnis die Dividenden zu verteilen seien. Die einfachste Annahme beim System *A* ist, dass die Dividenden im Verhältnis der vom $(c+1)$. Jahre an zu zahlenden Prämie $\pi_{x \bar{n}}$ zu verteilen seien. Alsdann berechnet sich für das System *A* die Dividende des $(t+1)$. Jahres nach der Formel (138), der Barwert der Ausgaben an Dividenden nach der Formel (139). Beim System *B* kann als Grundlage der Verteilung die Summe der bisher be-

zahlten Prämien dienen. In diesem Falle ist die Dividende des $(t+1)$. Jahres, beim Dividendensatz von 1% der Prämiensumme, gleich

$$(144) \quad {}_t \varphi_{x \bar{n}} = 0,01 (t \pi_{x \bar{n}} \pm c b_{x \bar{n}}).$$

Der Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1% der Summe der bezahlten Prämien ist

$$\begin{aligned} (145) \quad \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} &= \frac{0,01}{D'_{x+0}} \left((c \pi_{x \bar{n}} \pm c b_{x \bar{n}}) D'_{x+c} + ((c+1) \pi_{x \bar{n}} \right. \\ &\quad \left. \pm c b_{x \bar{n}}) D'_{x+c+1} + \dots + (t \pi_{x \bar{n}} \pm c b_{x \bar{n}}) D'_{x+t} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (n \pi_{x \bar{n}} \pm c b_{x \bar{n}}) D'_{x+n} \right) \\ &= \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} \sum_c^n t D'_{x+t} \pm \frac{0,01 c b_{x \bar{n}}}{D'_{x+0}} \sum_c^n D'_{x+t} \\ &= 0,01 \pi_{x \bar{n}} ((c-1) {}_{c|} \mathbf{a}'_{x+0: \bar{n+1}} + {}_{c|} (\mathbf{Ia})'_{x+0: \bar{n+1}}) \\ &\quad \pm 0,01 c b_{x \bar{n}} {}_{c|} \mathbf{a}'_{x+0: \bar{n+1}} \end{aligned}$$

4. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet.

Bei den Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen ist der Barwert der Ausgaben an Dividenden beim Eintritt gleich Null.

5. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen.

Beim Eintritt muss der Barwert der Ausgaben an Dividenden gleich dem Barwert der Einnahmen an Überschüssen sein. Durch Gleichsetzen des Barwertes

der Ausgaben beim Eintritt nach den Gleichungen (136), (139), (141) und (143), und des Barwertes der Einnahmen nach Gleichung (120) erhalten wir demnach die Gleichung

$$(146) \quad \begin{aligned} \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} &= u_{x+0: \bar{n}} = (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0: \bar{n}} \\ &+ \beta \left(\pi_{x \bar{n}} + \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) \right) - \bar{A}'_{x+0: \bar{n}} \\ &- A^{ra}_{x+0: \bar{n}} - A^{re}_{x+0: \bar{n}} - \alpha - \gamma (a'_{x+0: \bar{n}} - A^a_{x+0: \bar{n}}), \end{aligned}$$

wobei statt $\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}}$ die für die verschiedenen Dividendensysteme abgeleiteten Werte einzusetzen sind. Hieraus folgt nach einer kleinen Umformung

$$(147) \quad \begin{aligned} (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} &= (1 - \beta) u_{x+0: \bar{n}} \\ &= (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0: \bar{n}} + \beta (\pi_{x \bar{n}} - \psi_{x \bar{n}} {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) \\ &- \bar{A}'_{x+0: \bar{n}} - A^{ra}_{x+0: \bar{n}} - A^{re}_{x+0: \bar{n}} - \alpha \\ &- \gamma (a'_{x+0: \bar{n}} - A^a_{x+0: \bar{n}}). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann zur Bestimmung des theoretischen Dividendensatzes $\psi_{x \bar{n}}$ bei gegebener Bruttoprämie $\pi_{x \bar{n}}$ benutzt werden. Derselbe ergibt sich für alle hier in Betracht gezogenen Dividendensysteme zu

$$(148) \quad \begin{aligned} \psi_{x \bar{n}} &= \frac{u_{x+0: \bar{n}}}{\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}}} \\ &= \left((1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0: \bar{n}} + \beta \pi_{x \bar{n}} - \bar{A}'_{x+0: \bar{n}} - A^{ra}_{x+0: \bar{n}} \right. \\ &\quad \left. - A^{re}_{x+0: \bar{n}} - \alpha - \gamma (a'_{x+0: \bar{n}} - A^a_{x+0: \bar{n}}) \right) : \\ &\quad : \left((1 - \beta) \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} + \beta {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}} \right) \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (147) lässt sich umgekehrt die ausreichende Prämie $\pi_{x\bar{n}}$ berechnen, wenn der Dividendensatz $\psi_{x\bar{n}}$ gegeben oder vorgeschrieben ist. Für das Dividendensystem C folgt die ausreichende Prämie aus Gleichung (147) zu

(149)

$$\begin{aligned} \pi_{x\bar{n}} &= (\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + a + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} \\ &\quad - A^a_{x+0:\bar{n}}) + (1 - \beta) \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} + \beta \psi_{x\bar{n}} n E'_{x+0:n} \varphi_{x\bar{n}}) : \\ &\quad : ((1 - \beta) a'_{x+0:\bar{n}} + \beta) \\ &= (\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + a + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A^a_{x+0:\bar{n}}) \\ &\quad + 0,01 (1 - \beta) \psi_{x\bar{n}} \frac{\sum_c D'_{x+0:c} V_x}{D'_{x+0}} + 0,01 \beta \psi_{x\bar{n}} n E'_{x+0}) : \\ &\quad : ((1 - \beta) a'_{x+0:\bar{n}} + \beta) \end{aligned}$$

indem $n \varphi_{x\bar{n}} = 0,01$ ist.

Bei den Systemen A und B ist zu berücksichtigen, dass der Barwert der Ausgaben an Dividenden noch die Brutto-Prämie enthält. Indem wir für $\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}$ seine Werte in Gleichung (147) einsetzen, folgt die ausreichende Prämie für das Dividendensystem A zu

(150)

$$\begin{aligned} \pi_{x\bar{n}} &= (\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + a + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} \\ &\quad - A^a_{x+0:\bar{n}})) : ((1 - \beta) (a'_{x+0:\bar{n}} - 0,01 \psi_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{n+1}}) \\ &\quad + \beta (1 - 0,01 \psi_{x\bar{n}} n E'_{x+0})) \end{aligned}$$

und für das System B gleich

(151)

$$\begin{aligned} \pi_{x \bar{n}} = & \left(\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + \alpha + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} \right. \\ & \left. - A^a_{x+0:\bar{n}}) \right) : \left((1 - \beta) (a'_{x+0:\bar{n}} - 0,01 \psi_{x \bar{n}} ((c-1) {}_c a'_{x+0:\bar{n+1}} \right. \\ & \left. + {}_c (I a)'_{x+0:\bar{n+1}}) \right) + \beta (1 - 0,01 n \psi_{x \bar{n}} {}_n E'_{x+0}) \end{aligned}$$

Wird der Rückkaufswert am Anfang des Jahres vom Deckungskapital mehr der Bruttoprämie berechnet, so sind die Gleichungen (149) bis (151) nicht mehr zur Bestimmung der ausreichenden Prämie anwendbar. Für diesen Fall schreiben wir die Gleichung (147) in der folgenden Form

$$\begin{aligned} (152) \quad (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} = & (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}} \\ & + \beta (\pi_{x \bar{n}} - \psi_{x \bar{n}} {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) - \bar{A}'_{x+0:\bar{n}} - A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} \\ & - \pi_{x \bar{n}} A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} - A'^{re}_{x+0:\bar{n}} - \alpha - \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A^a_{x+0:\bar{n}}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die ausreichende Prämie für das Überschusssystem C zu

(153)

$$\begin{aligned} \pi_{x \bar{n}} = & \left(\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + \alpha + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} \right. \\ & \left. - A^a_{x+0:\bar{n}}) + 0,01 (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \frac{\sum_c D'_{x+t} V_x}{D'_{x+0}} + 0,01 \beta \psi_{x \bar{n}} {}_n E'_{x+0} \right. \\ & \left. : (1 - \beta) a'_{x+0:\bar{n}} + \beta - A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} \right) \end{aligned}$$

Die ausreichende Prämie für das Überschusssystem A berechnet sich zu

(154)

$$\begin{aligned}\pi_{x\bar{n}} = & \left(\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A^{re}_{x+0:\bar{n}} + a + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} \right. \\ & \left. - A^a_{x+0:\bar{n}}) \right) : \left((1 - \beta) (a'_{x+0:\bar{n}} - 0,01 \psi_{x\bar{n}} {}_{c|} a'_{x+0:\bar{n+1}}) \right. \\ & \left. + \beta (1 - 0,01 \psi_{x\bar{n}} {}_n E'_{x+0}) - A''^{ra}_{x+0:\bar{n}} \right)\end{aligned}$$

und für das Überschusssystem B berechnet sie sich zu
(155)

$$\begin{aligned}\pi_{x\bar{n}} = & \left(\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A^{re}_{x+0:\bar{n}} + a + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} \right. \\ & \left. - A^a_{x+0:\bar{n}}) \right) : \left((1 - \beta) (a'_{x+0:\bar{n}} - 0,01 \psi_{x\bar{n}} ((c-1) {}_{c|} a'_{x+0:\bar{n+1}}) \right. \\ & \left. + {}_{c|} (Ia)'_{x+0:\bar{n+1}}) \right) + \beta (1 - 0,01 n \psi_{x\bar{n}} {}_n E'_{x+0}) - A''^{ra}_{x+0:\bar{n}}\end{aligned}$$

Die hier abgeleiteten Formeln sind für eine während der ganzen Versicherungsdauer gleichbleibende Prämie gültig. Findet mit dem $(c+1)$. Versicherungsjahre eine Zu- oder Abnahme der Prämie statt, so ist im Zähler des Bruches von Gleichung (148) zur Bestimmung des Dividendensatzes $\psi_{x\bar{n}}$ der Ausdruck

$$(156) \quad \pm (1 - \beta) b_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{c}} \pm \beta b_{x\bar{n}}$$

hinzuzufügen. Zur Bestimmung der ausreichenden Prämie $\pi_{x\bar{n}}$ ist in den Zählern der Brüche (149) bis (151) und (153) bis (155) derselbe Ausdruck zu subtrahieren. Dabei ist vorausgesetzt, dass über den Betrag $b_{x\bar{n}}$, der Zu- oder Abnahme der Prämie mit dem Anfang des $(c+1)$. Versicherungsjahres, eine bestimmte Annahme getroffen worden sei.

Die nach diesen Formeln berechneten ausreichenden Prämien werden nach den verschiedenen Dividenden-systemen, für dieselben Versicherungskombinationen

(gleiche Eintrittsalter, gleiche Versicherungsdauer und Versicherungsart) verschieden hoch ausfallen, auch wenn die Dividendensätze so gewählt werden, dass die Prämien für das durchschnittliche Eintrittsalter und die durchschnittliche Versicherungsdauer nach allen Systemen gleich hoch sich ergeben.

Bei der Bestimmung der ausreichenden Prämien ist die Annahme getroffen worden, dass die wirklichen Sterblichkeits-, Zins- und Abgangsverhältnisse, sowie die wirklichen Verwaltungskosten in Zukunft mit den theoretisch angenommenen Verhältnissen übereinstimmen werden. Da dies aber tatsächlich nie zutrifft, so wird die ausreichende Prämie die Auszahlung entweder einer höheren oder niedrigeren Dividende als die rechnungsmässig vorausgesetzte gestatten. Um solchen Abweichungen begegnen zu können, müsste die ausreichende Prämie mit einem Zuschlage versehen werden, über dessen Bestimmung die Arbeiten zum Thema V der Verhandlungen des 7. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft vom Jahre 1912 in Amsterdam: „Die Zuschlagsregelung der Prämien.“ „Berechnung der Bruttoprämien“ Auskunft geben.

Wir haben die ausreichende gleichbleibende Prämie für das System *B* der nach der Prämiensumme steigenden Dividende, bei einem Dividendensatz von 3 %, nach Gleichung 155 für eine nach 25 Jahren fällige gemischte Versicherung des 30 Jahre alt Eingetretenen, auf Grundlage der in Tabelle 4 aufgeführten Dekremententafel, der in den Tabellen 5 und 6 mitgeteilten diskontierten Zahlen, sowie der in den Tabellen 7 und 8 gegebenen Barwerte, berechnet. Die Rechnung ergibt, wenn der Dividendenbezug nach 5 Jahren beginnt, für Fr. 10.000 Versicherungssumme eine jährliche Prämie von Fran-

ken 409,7603. Wird diese Prämie auch bei den Systemen A und C der gleichbleibenden und der nach dem Deckungskapital steigenden Dividende zu Grunde gelegt und daraus rückwärts, mit Hülfe von Gleichung (148), der entsprechende Dividendensatz berechnet, so ergibt sich vom 6. Jahre an, entsprechend der Prämie von Franken 409,7603 eine Dividende von 39,3199 % der Prämie nach dem System A und von 3,77743 % des Deckungskapitals nach dem System C .

6. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen.

Der Barwert der Einnahmen an Überschüssen ist beim Eintritt durch die Gleichung (135) gegeben. Da keine Dividenden zu zahlen sind, so muss der Barwert der Einnahmen gleich 0 sein. Aus dieser Festsetzung ergibt sich die ausreichende Prämie zu

$$(157) \quad \pi_{x\bar{n}} = \frac{A'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + a + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A^a_{x+0:\bar{n}})}{(1 - \beta) a'_{x+0:\bar{n}} + \beta}$$

Wird der Rückkaufswert am Anfang der Jahre vom Deckungskapital einschliesslich der Brutto-Prämie berechnet, so findet sich die ausreichende Prämie nach der Formel

$$(158) \quad \pi_{x\bar{n}} = \frac{A'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + a + \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A^a_{x+0:\bar{n}})}{(1 - \beta) a'_{x+0:\bar{n}} + \beta - A'^{ra}_{x+0:\bar{n}}}$$

Für die gemischte Versicherung des 30-Jährigen, fällig nach 25 Jahren, ergibt sich die ausreichende

Prämie ohne Anteil an den Überschüssen, nach Formel (158) und der Dekremententafel berechnet, bei einer Versicherungssumme von Fr. 10.000 zu Fr. 297,0122.

Die nach den Formeln (157) oder (158) berechneten Prämien wird eine Gesellschaft nicht für ihre Tarife verwenden können, weil sie sonst auf diesen Versicherungen keinen Überschuss erzielen, unter Umständen sogar Verlust erleiden kann. Sie wird vielmehr die Prämien noch um einen bestimmten prozentualen Zuschlag erhöhen müssen, damit sie auf den Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen einen bescheidenen Überschuss zu erzielen imstande sein wird.

VI. Berechnung der ausreichenden Prämien nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der retrospektiven Methode.

1. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf das Ende des n . Jahres berechnet.

Der Barwert der theoretischen Einnahmen an Überschüssen findet sich auf Ende des Ablaufes der gemischten Versicherung berechnet, auf die folgende Weise: Aus dem Barwert der Prämien müssen sämtliche Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten bestritten werden. Was vom Barwert der Prämien nach Deckung dieser Ausgaben noch übrig bleibt, ist zur Verteilung verfügbarer Überschuss. Die Barwerte der Einnahmen an Prämien, der Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten haben wir bereits im Abschnitt III abgeleitet. Deshalb ist der Barwert der Einnahmen an Überschüssen, den wir am Ende des n . Jahres mit $(u)_{x+0:\bar{n}}$ bezeichnen, gleich

(159)

$$\begin{aligned}
 (u)_{x+0:\bar{n}} &= \pi_{x\bar{n}}' (\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n}} - (\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} - (A)_{x+0:\bar{n}}^{ra} - (A)_{x+0:\bar{n}}^{re} \\
 &\quad - \alpha_n (E)'_{x+0} - \beta \pi_{x\bar{n}} ((\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n}} - {}_n(E)'_{x+0}) + \beta \psi_{x\bar{n}} ((\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} \\
 &\quad - {}_n\varphi_{x\bar{n}}) - \gamma ((\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n}} - (A)_{x+0:\bar{n}}^a) \\
 &= (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}}' (\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n}} - (\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} - (A)_{x+0:\bar{n}}^{ra} - (A)_{x+0:\bar{n}}^{re} \\
 &\quad - (\alpha - \beta \pi_{x\bar{n}}) {}_n(E)'_{x+0} + \beta \psi_{x\bar{n}} ((\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n\varphi_{x\bar{n}}) \\
 &\quad - \gamma ((\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n}} - (A)_{x+0:\bar{n}}^a),
 \end{aligned}$$

indem das Deckungskapital am Ende des n . Jahres bereits im Barwert der Versicherungssumme mit enthalten ist.

Die Gleichung (159) erhalten wir auch, indem wir die gesamten Überschüsse der einzelnen Jahre auf das Ende der Versicherung aufzinsen und die Summe dieser aufgezinnten Beträge durch die Anzahl der Lebenden des Alters $x+n$ dividieren. So ergibt sich der Barwert der Überschüsse auch zu

(160)

$$\begin{aligned}
 (u)_{x+0:\bar{n}} &= \frac{1}{l'_{x+n}} (l'_{x+0,0} G_x (1+i)^{n-1} + l'_{x+1,1} G_x (1+i)^{n-2} \\
 &\quad + \dots + l'_{x+t,t} G_x (1+i)^{n-t-1} + \dots + l'_{x+n-1,n-1} G_x) \\
 &= \frac{v'}{D'_{x+n}} (D'_{x+0,0} G_x + D'_{x+1,1} G_x + \dots + D'_{x+t,t} G_x \\
 &\quad + \dots + D'_{x+n-1,n-1} G_x).
 \end{aligned}$$

Indem wir hier für die jährlichen Überschüsse ihre Werte einsetzen, fallen sämtliche Deckungskapitalien weg, und die Formel geht nach einigen Umformungen in Gleichung (159) über. Die Berechnungsart des

Deckungskapitals hat somit bei der gemischten Versicherung keinen Einfluss auf die Höhe des, auf Ende der Versicherungszeit berechneten, Barwertes aller Überschüsse.

Unter Benutzung der im Abschnitt III abgeleiteten Formeln (77), (81), (82), (86), (87), (102) und (109) geht die Gleichung (159) über in

$$(161) \quad (u)_{x+0:\bar{n}} = {}_n(E)'_{x+0} u_{x+0:\bar{n}}.$$

Dieses Resultat lässt sich übrigens auch direkt aus den Gleichungen (121) und (160) ablesen. Bei der Berechnung der ausreichenden Prämien ist der Barwert $(A)_{x+0:\bar{n}}^{ra}$ durch den Ausdruck (90) zu ersetzen, sofern der Rückkaufswert am Anfang des Jahres vom Deckungskapital mehr der Bruttoprämie ermittelt wird.

2. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf das Ende des n . Jahres berechnet.

Der Barwert der theoretischen Einnahmen an Überschüssen wird für eine Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende des n . Jahres aus Gleichung (159) erhalten, indem wir dort den Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden gleich 0 setzen, zu

$$(162)$$

$$\begin{aligned} (u)_{x+0:\bar{n}} &= (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} (a)_{x+0:\bar{n}}' - (\bar{A})_{x+0:\bar{n}}' - (A)_{x+0:\bar{n}}^{ra} \\ &\quad - (A)_{x+0:\bar{n}}^{re} - (\alpha - \beta \pi_{x\bar{n}}) {}_n(E)'_{x+0} - \gamma ((a)_{x+0:\bar{n}}' - (A)_{x+0:\bar{n}}''), \\ &= {}_n(E)'_{x+0} u_{x+0:\bar{n}}. \end{aligned}$$

Wird die Bruttoprämie $\pi_{x\bar{n}}$ als ausreichende Prämie ohne Anteil an den Überschüssen berechnet, so ist der Barwert der Einnahmen an Überschüssen nach Gleichung (162) gleich Null zu setzen.

3. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf das Ende des n . Jahres berechnet.

Nach den früher getroffenen Voraussetzungen wird die erste Dividende nach c Jahren, die letzte Dividende nach n Jahren ausbezahlt. Der Barwert der sämtlichen ausbezahlten Dividenden von 1% des Verteilungsmassstabes sei, einschliesslich der Schlussdividende, auf das Ende des n . Jahres berechnet, wie früher mit $(\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}}$ bezeichnet. Dieser findet sich zu

$$\begin{aligned}
 (163) \quad & (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} = \\
 & \frac{1}{l'_{x+n}} (l'_{x+c} {}_c \varphi_{x\bar{n}} (1+i')^{n-c} + l'_{x+c+1} {}_{c+1} \varphi_{x\bar{n}} (1+i')^{n-c-1} \\
 & + \dots + l'_{x+n-1} {}_{n-1} \varphi_{x\bar{n}} (1+i') + l'_{x+n} {}_n \varphi_{x\bar{n}}) \\
 & = \frac{1}{D'_{x+n}} (D'_{x+c} {}_c \varphi_{x\bar{n}} + D'_{x+c+1} {}_{c+1} \varphi_{x\bar{n}} + \dots \\
 & + D'_{x+n-1} {}_{n-1} \varphi_{x\bar{n}} + D'_{x+n} {}_n \varphi_{x\bar{n}}) \\
 & = \frac{1}{D'_{x+n}} \sum_c^n D'_{x+t} {}_t \varphi_{x\bar{n}}.
 \end{aligned}$$

Wie hieraus ersichtlich ist, ergibt sich der Barwert $(\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n}}$ ohne die Schlussdividende zu

$$(164) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n}} = (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n \varphi_{x\bar{n}}$$

[siehe Gleichung (97)]. Der Barwert der gesamten Ausgaben an Dividenden ist beim Dividendensatz $\psi_{x\bar{n}}$ gleich

$$(165) \quad \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}}.$$

Aus den Gleichungen (136) und (163) folgt die Formel

$$(166) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} = {}_n(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}},$$

mit deren Hilfe wir den auf den Eintritt bezogenen Barwert der Ausgaben an Dividenden aus dem auf das Ende der Versicherung bezogenen Barwert berechnen können und umgekehrt.

Ad System A. Der Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1% der Prämie ist auf Ende des n . Jahres berechnet

$$(167) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} &= \frac{0,01 \pi_{x\bar{n}}}{D'_{x+n}} \sum_c^n D'_{x+t} = 0,01 \pi_{x\bar{n}} \frac{N'_{x+c} - N'_{x+n+1}}{D'_{x+n}} \\ &= 0,01 \pi_{x\bar{n}} {}_c|(\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n+1}} \\ &= {}_n(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}. \end{aligned}$$

Ad System B. Am Ende des n . Jahres ist der Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden von 1% der Prämiensumme gleich

$$(168) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} &= \\ \frac{0,01 \pi_{x\bar{n}}}{D'_{x+n}} \sum_c^n t D'_{x+t} &= \frac{0,01 \pi_{x\bar{n}}}{D'_{x+n}} \left((c-1) (N'_{x+c} - N'_{x+n+1}) \right. \\ &\quad \left. + S'_{x+c} - S'_{x+n+1} - (n-c+1) N'_{x+n+1} \right) \\ &= 0,01 \pi_{x\bar{n}} \left((c-1) {}_c|(\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n+1}} + {}_c|((\mathbf{I}\mathbf{a})'_{x+0:\bar{n+1}}) \right) \\ &= {}_n(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}. \end{aligned}$$

Ad System C. Der Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1% des Deckungskapitals ist auf Ende des n . Jahres berechnet gleich

$$(169) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\overline{n+1}} = \frac{0,01}{D'_{x+n}} \sum_{c=1}^n D'_{x+t} V_x$$

$$= {}_n(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\overline{n+1}}.$$

4. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende des n . Jahres berechnet.

Auf Ende des n . Jahres ist der Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen gleich Null, weil keine Dividenden zur Auszahlung gelangen.

5. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen.

Die auf das Ende des n . Jahres bezogenen Barwerte der Einnahmen an Überschüssen und der Ausgaben an Dividenden müssen einander gleich sein. Setzen wir demnach die in den vorangehenden Abschnitten abgeleiteten Barwerte der Einnahmen und Ausgaben einander gleich, so erhalten wir die Gleichung

$$(170) \quad \psi_{x\overline{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\overline{n+1}} = (u)_{x+0:\overline{n}} = (1-\beta) \pi_{x\overline{n}} (a)'_{x+0:\overline{n}}$$

$$- (\overline{A})'_{x+0:\overline{n}} - (A)_{x+0:\overline{n}}^{ra} - (A)_{x+0:\overline{n}}^{re} - (a - \beta \pi_{x\overline{n}})_n (E)'_{x+0}$$

$$+ \beta \psi_{x\overline{n}} ((\mathfrak{D})_{x+0:\overline{n+1}} - {}_n \varphi_{x\overline{n}}) - \gamma ((a)'_{x+0:\overline{n}} - (A)_{x+0:\overline{n}}^a)$$

Hier sind für den Barwert $(\mathfrak{D})_{x+0:\overline{n+1}}$ der Ausgaben, je nach dem Dividendensystem die im zweitvorangehenden Abschnitt abgeleiteten Werte einzusetzen. Nach einer Umformung erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned}
 (171) \quad (1-\beta) \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{n+1}} &= (1-\beta) (u)_{x+0: \bar{n}} \\
 &= (1-\beta) \pi_{x \bar{n}} (\mathbf{a})'_{x+0: \bar{n}} - (\bar{A})'_{x+0: \bar{n}} - (A)^{ra}_{x+0: \bar{n}} \\
 &\quad - (A)^{re}_{x+0: \bar{n}} - (\alpha - \beta \pi_{x \bar{n}})_n (E)'_{x+0} - \beta \psi_{x \bar{n}} {}_n \varphi_{x \bar{n}} \\
 &\quad - \gamma ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{n}} - (A)^a_{x+0: \bar{n}}).
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich der theoretische Dividendensatz $\psi_{x \bar{n}}$ bei gegebener Prämie $\pi_{x \bar{n}}$, oder umgekehrt die ausreichende Prämie bei gegebenem Dividendensatz berechnen.

Der Dividendensatz findet sich aus der bekannten Prämie $\pi_{x \bar{n}}$ mittelst der Gleichung

$$\begin{aligned}
 (172) \quad \psi_{x \bar{n}} &= \frac{(u)_{x+0: \bar{n}}}{(\mathfrak{D})_{x+0: \bar{n+1}}} = \frac{u_{x+0: \bar{n}}}{\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}}} \\
 &= ((1-\beta) \pi_{x \bar{n}} (\mathbf{a})'_{x+0: \bar{n}} - (\bar{A})'_{x+0: \bar{n}} - (A)^{ra}_{x+0: \bar{n}} - (A)^{re}_{x+0: \bar{n}} \\
 &\quad - (\alpha - \beta \pi_{x \bar{n}})_n (E)'_{x+0} - \gamma ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{n}} - (A)^a_{x+0: \bar{n}})) : \\
 &\quad : ((1-\beta) (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{n+1}} + \beta {}_n \varphi_{x \bar{n}})
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (161) und (166) folgt, dass wir für den Dividendensatz denselben Wert erhalten, ob wir nach der prospektiven oder nach der retrospektiven Methode rechnen.

Aus der Gleichung (171) ergibt sich die ausreichende Prämie $\pi_{x \bar{n}}$ für das Dividendensystem C , wenn der Dividendensatz $\psi_{x \bar{n}}$ vorgeschrieben ist, zu

$$\begin{aligned}
 (173) \quad \pi_{x \bar{n}} &= ((\bar{A})'_{x+0: \bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0: \bar{n}} + (A)^{re}_{x+0: \bar{n}} + \alpha_n (E)'_{x+0} \\
 &\quad - \gamma ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{n}} - (A)^a_{x+0: \bar{n}}) + (1-\beta) \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{n+1}} + 0,01 \beta \psi_{x \bar{n}} \\
 &\quad ((1-\beta) (\mathbf{a})'_{x+0: \bar{n}} + \beta {}_n (E)'_{x+0}))
 \end{aligned}$$

Für die Dividendensysteme A und B lässt sich die Formel (173) nicht mehr zur Berechnung der ausreichenden Prämie verwenden, weil die Prämie im Barwert der Dividende, sowie in der Schlussdividende als Faktor enthalten ist. Setzen wir für $(\mathfrak{D})_{x+0:n+1}$ und ${}_n\varphi_{x\bar{n}}$ ihre Werte aus den Gleichungen (167), (168), (138) und (140) ein, so folgt die ausreichende Prämie für das Dividendensystem A zu

$$(174) \quad \pi_{x\bar{n}} = ((\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} + (A)^{re}_{x+0:\bar{n}} + \alpha_n(E)'_{x+0} \\ - \gamma ((a)'_{x+0:\bar{n}} - (A)^a_{x+0:\bar{n}})) : ((1 - \beta)((a)'_{x+0:\bar{n}} - 0,01\psi_{x\bar{n}}) \\ - \beta ({}_n(E)'_{x+0} - 0,01\psi_{x\bar{n}}))$$

und für das Dividendensystem B zu

$$(175) \quad \pi_{x\bar{n}} = ((\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} + (A)^{re}_{x+0:\bar{n}} + \alpha_n(E)'_{x+0} \\ - \gamma ((a)'_{x+0:\bar{n}} - (A)^a_{x+0:\bar{n}})) : ((1 - \beta)((a)'_{x+0:\bar{n}} \\ - 0,01\psi_{x\bar{n}}((c-1)_c(a)'_{x+0:\bar{n+1}} + {}_c((Ia))'_{x+0:\bar{n+1}})) + \beta ({}_n(E)'_{x+0} - 0,01n\psi_{x\bar{n}}))$$

Wenn der Rückkaufswert am Anfang des Jahres vom Deckungskapital mehr der Brutto Prämie berechnet wird, so können die drei letzten Gleichungen nicht mehr zur Bestimmung der ausreichenden Prämie verwendet werden. Wir schreiben alsdann die Gleichung (171) in der folgenden Form

$$(176) \quad (1 - \beta)\psi_{x\bar{n}}(\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} = (1 - \beta)\pi_{x\bar{n}}(a)'_{x+0:\bar{n}} \\ - (\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} - (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} - \pi_{x\bar{n}}(A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} - (A)^{re}_{x+0:\bar{n}} \\ - (\alpha - \beta\pi_{x\bar{n}}){}_n(E)'_{x+0} - \beta\psi_{x\bar{n}}{}_n\varphi_{x\bar{n}} \\ - \gamma ((a)'_{x+0:\bar{n}} - (A)^a_{x+0:\bar{n}}).$$

Die ausreichende Prämie folgt hieraus für das Überschusssystem C zu

(177)

$$\begin{aligned} \pi_{x\bar{n}} = & \left((\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} + (A)^{re}_{x+0:\bar{n}} + a_n(E)'_{x+0} \right. \\ & 0,01 \beta \psi_{x\bar{n}} + \gamma \left((a)'_{x+0:\bar{n}} - (A)^a_{x+0:\bar{n}} \right) + (1 - \beta) \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}} \\ & \left. : \left((1 - \beta) (a)'_{x+0:\bar{n}} + \beta a_n(E)'_{x+0} - (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} \right) \right) \end{aligned}$$

für das Überschusssystem A zu

(178)

$$\begin{aligned} \pi_{x\bar{n}} = & \left((\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} + (A)^{re}_{x+0:\bar{n}} + a_n(E)'_{x+0} \right. \\ & + \gamma \left((a)'_{x+0:\bar{n}} - (A)^a_{x+0:\bar{n}} \right) : \left((1 - \beta) \left((a)'_{x+0:\bar{n}} \right. \right. \\ & \left. \left. - 0,01 \psi_{x\bar{n}} \right) (a)'_{x+0:\bar{n+1}} \right) + \beta \left(a_n(E)'_{x+0} - 0,01 \psi_{x\bar{n}} \right) - (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} \left. \right) \end{aligned}$$

und für das Überschusssystem B zu

(179)

$$\begin{aligned} \pi_{x\bar{n}} = & \left((\bar{A})'_{x+0:\bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} + (A)^{re}_{x+0:\bar{n}} + a_n(E)'_{x+0} \right. \\ & + \gamma \left((a)'_{x+0:\bar{n}} - (A)^a_{x+0:\bar{n}} \right) : \left((1 - \beta) \left((a)'_{x+0:\bar{n}} \right. \right. \\ & - 0,01 \psi_{x\bar{n}} \left((c-1) a_{c|}'_{x+0:\bar{n+1}} + c|((Ia))'_{x+0:\bar{n+1}} \right) \left. \right) \\ & \left. + \beta \left(a_n(E)'_{x+0} - 0,01 n \psi_{x\bar{n}} \right) - (A)^{ra}_{x+0:\bar{n}} \right) \end{aligned}$$

Die einzelnen Glieder im Zähler und Nenner der Formeln (173) bis (179) sind das $a_n(E)'_{x+0}$ fache der Glieder in den Formeln (149) bis (155), so dass die nach der prospektiven und der retrospektiven Methode berechneten ausreichenden Prämien einander gleich sein müssen.

6. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen.

Da die ausreichende Prämie ohne Anteil an den Überschüssen derart bestimmt werden soll, dass auf derselben weder Überschuss noch Verlust erzielt wird, so muss der Barwert der auf Ende des n . Jahres bezogenen Einnahmen an Überschüssen nach Gleichung (162) gleich 0 sein. Demnach berechnet sich die ausreichende Prämie ohne Anteil an den Überschüssen zu

(180)

$$\begin{aligned} \pi_{x \bar{n}} = & \left((\bar{A})'_{x+0: \bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0: \bar{n}} + (A)^{re}_{x+0: \bar{n}} + \alpha_n(E)'_{x+0} \right. \\ & \left. + \gamma \left((a)'_{x+0: \bar{n}} - (A)^a_{x+0: \bar{n}} \right) \right) : \left((1 - \beta) (a)'_{x+0: \bar{n}} + \beta_n(E)'_{x+0} \right) \end{aligned}$$

Sofern der Rückkaufswert am Anfang der Jahre vom Deckungskapital mehr der Bruttoprämie berechnet wird, ist für die Ermittlung der ausreichenden Prämie die folgende Formel anzuwenden

(181)

$$\begin{aligned} \pi_{x \bar{n}} = & \left((\bar{A})'_{x+0: \bar{n}} + (A)^{ra}_{x+0: \bar{n}} + (A)^{re}_{x+0: \bar{n}} + \alpha_n(E)'_{x+0} \right. \\ & \left. + \gamma \left((a)'_{x+0: \bar{n}} - (A)^a_{x+0: \bar{n}} \right) \right) : \left((1 - \beta) (a)'_{x+0: \bar{n}} + \beta_n(E)'_{x+0} - (A)^{rra}_{x+0: \bar{n}} \right) \end{aligned}$$

Die nach diesen Formeln berechneten ausreichenden Prämien ohne Anteil an den Überschüssen haben dieselben Werte, wie die nach der prospektiven Methode berechneten Prämien.

VII. Berechnung der theoretischen Überschussreserve für eine einzelne Versicherung auf Ende eines Versicherungsjahres, nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der prospektiven Methode.

1. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Als Einnahmen haben wir am Ende des t . Jahres aufzuführen: Das Deckungskapital für die Versicherungssumme 1 und den Barwert der Bruttoprämie. Sollte eine Verwaltungskostenreserve zurückgestellt worden sein, so ist diese zum Deckungskapital hinzuzurechnen. Die Ausgaben bestehen im Barwert der Versicherungssummen, der Rückkaufssummen, der Inkassoprovisionen und der inneren Verwaltungskosten.

Der Barwert der künftigen Überschüsse, welchen wir mit $u_{x+t:\bar{n-t}}$ bezeichnen, ist als Differenz zwischen den oben aufgeführten Einnahmen und Ausgaben gleich

$$\begin{aligned} (182) \quad u_{x+t:\bar{n-t}} &= \\ &= {}_t V_x + \pi_{x\bar{n}} a'_{x+t:\bar{n-t}} - \bar{A}'_{x+t:\bar{n-t}} - A^{ra}_{x+t:\bar{n-t}} \\ &\quad - A^{re}_{x+t:\bar{n-t}} - \beta (\pi_{x\bar{n}} a'_{x+t:\bar{n-t}} - \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}} \\ &\quad - {}_{n-t} E'_{x+t\ n} \varphi_{x\bar{n}})) - \gamma (a'_{x+t:\bar{n-t}} - A^a_{x+t:\bar{n-t}}) \\ &= {}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} a'_{x+t:\bar{n-t}} - \bar{A}'_{x+t:\bar{n-t}} - A^{ra}_{x+t:\bar{n-t}} \\ &\quad - A^{re}_{x+t:\bar{n-t}} + \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}} - {}_{n-t} E'_{x+t\ n} \varphi_{x\bar{n}}) \\ &\quad - \gamma (a'_{x+t:\bar{n-t}} - A^a_{x+t:\bar{n-t}}). \end{aligned}$$

Die hier vorkommenden Barwerte sind mit Ausnahme von $\mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}}$ bereits im Abschnitt II abgeleitet worden. Der Barwert der künftigen Ausgaben an Dividenden wird im Abschnitt VII, 3, ermittelt. Für $t = n$ gibt die Formel als Barwert der Einnahmen den Wert

$$(183) \quad u_{x+n: 0} = 0,$$

wie sich übrigens auch aus der folgenden Formel (184) ersehen lässt. Die Gleichung (182) gilt nicht für den Eintritt, für welchen die Formel (120) Anwendung findet.

Wir können die Gleichung (182) auch ableiten, indem wir die Überschüsse des $(t+1)$. bis n . Jahres auf das Ende des t . Jahres bezogen addieren. Dadurch erhalten wir den Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen zu

$$(184) \quad \begin{aligned} u_{x+t: \overline{n-t}} &= \\ &= \frac{v'}{l'_{x+t}} (l'_{x+t} G_x + v' l'_{x+t+1} G_x + \dots \\ &\quad + v'^{n-t-1} l'_{x+n-1} G_x) \\ &= \frac{v'}{D'_{x+t}} (D'_{x+t} G_x + D'_{x+t+1} G_x + \dots \\ &\quad + D'_{x+n-1} G_x). \end{aligned}$$

Durch eine analoge Ableitung wie im Abschnitt V, 1, lässt sich der Nachweis erbringen, dass sämtliche Deckungskapitalien mit Ausnahme derjenigen nach t und n Jahren wegfallen und dass die Ausdrücke (182) und (184) identisch sind. Es ist somit der am Ende des t . Jahres zu erwartende Überschuss bei der gemischten Versicherung nur von dem bereits angesam-

melten Deckungskapital, nicht aber von den später zurückzustellenden Deckungskapitalien abhängig.

Aus der Formel (182) ist ersichtlich, dass für verschiedene Dividendensysteme die Barwerte der künftigen Überschüsse bei derselben Prämie und der nämlichen Berechnungsweise des Deckungskapitals, nur um die Barwerte der Inkassoprovisionen auf den künftigen Dividenden von einander abweichen. Die Differenz der Barwerte der künftigen Überschüsse folgt aus Gleichung (182) für zwei verschiedene Überschusssysteme a und b , wenn wir die auf die Überschusssysteme sich beziehenden Barwerte durch die Indices a und b unterscheiden zu

$$(185) \quad u_{x+t: \bar{n-t}}^a - u_{x+t: \bar{n-t}}^b = \beta \psi_{x \bar{n}}^a (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}}^a - {}_{n-t}E'_{x+t} \varphi_{x \bar{n}}^a) - \beta \psi_{x \bar{n}}^b (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}}^b - {}_{n-t}E'_{x+t} \varphi_{x \bar{n}}^b).$$

In der Tabelle 11 im Anhang geben wir die nach Gleichung (182) berechneten Barwerte der Einnahmen an Überschüssen für eine nach 25 Jahren fällige gemischte Versicherung mit Anteil an den Überschüssen des 30 Jahre alt Eingetretenen. Diese Barwerte sind auf Grundlage der im Abschnitt V, 5, berechneten ausreichenden und gleichbleibenden Prämie, für drei verschiedene Dividendensysteme und nach neun verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals getrennt aufgeführt.

Findet mit dem Beginn des $(c+1)$. Versicherungsjahres eine Zu- oder Abnahme der Prämie statt, so ist in der Gleichung (182) an Stelle des Barwertes der Brutto Prämie abzüglich dem Barwert der Inkassoprovi-

sion auf der Bruttoprämie für $t \leq c$ der Ausdruck einzusetzen

$$(186) \quad \pi_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} \pm b_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{c-t}} - \beta (\pi_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} \\ \pm b_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{c-t}}) = (1 - \beta) (\pi_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} \\ \pm b_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{c-t}}).$$

Für $t \geq c$ ist der Barwert der Einnahmen an Überschüssen durch die Gleichung (182) gegeben.

Ziehen wir von dem nach Gleichung (182) gegebenen Barwert der Einnahmen an Überschüssen am Ende des t . Jahres, den auf den Anfang des $(t+1)$. Jahres vordiskontierten Betrag des Überschusses dieses Jahres nach Gleichung (112) ab, so erhalten wir

$$(187) \quad u_{x+t: \bar{n-t}} - v' {}_t G_x \\ = (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} (\mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} - 1) - \left(\bar{A}'_{x+t: \bar{n-t}} - \frac{\bar{C}'_{x+t}}{D'_{x+t}} \right) \\ - \left(A'^{ra}_{x+t: \bar{n-t}} - \frac{K'^a_{x+t}}{D'_{x+t}} {}_t r_x^a \right) - \left(A'^{re}_{x+t: \bar{n-t}} - \frac{K'^e_{x+t}}{D'_{x+t}} {}_t r_x^e \right) \\ - \gamma \left(\mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} - A'^a_{x+t: \bar{n-t}} - \left(1 - \frac{K'^a_{x+t}}{D'_{x+t}} \right) \right) \\ + \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} {}_{t+1} V_x + \beta \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} \\ - {}_{n-t} E'_{x+t} \mathbf{a}'_{x \bar{n}} - {}_t \varphi_{x \bar{n}}).$$

Nun ist hier

$$(188) \quad \mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} - 1 = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \mathbf{a}'_{x+t+1: \bar{n-t-1}}$$

$$(189) \quad \overline{A}'_{x+t: \overline{n-t}} - \frac{\overline{C}'_{x+t}}{D'_{x+t}} = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}}$$

$$(190) \quad A'^{ra}_{x+t: \overline{n-t}} - \frac{K'^a_{x+t}}{D'_{x+t}} r'^a_x = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} A'^{ra}_{x+t+1: \overline{n-t-1}}$$

$$(191) \quad A'^{re}_{x+t: \overline{n-t}} - \frac{K'^e_{x+t}}{D'_{x+t}} r'^e_x = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} A'^{re}_{x+t+1: \overline{n-t-1}}$$

$$(192) \quad A'^a_{x+t: \overline{n-t}} - \frac{K'^a_{x+t}}{D'_{x+t}} = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} A'^a_{x+t+1: \overline{n-t-1}}$$

$$(193) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} - {}_t \varphi_{x \overline{n}} = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \mathfrak{D}_{x+t+1: \overline{n-t}}$$

Auf die Gleichung (193) werden wir im zweitfolgenden Abschnitt zurückkommen. Demnach ist

$$\begin{aligned}
 (194) \quad & u_{x+t: \overline{n-t}} - v' {}_t G_x = \\
 & = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \left({}_{t+1} V_x + (1-\beta) \pi_{x \overline{n}} \mathbf{a}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right. \\
 & \quad - \overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A'^{ra}_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A'^{re}_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \\
 & \quad - \gamma \left(\mathbf{a}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A'^a_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right) \\
 & \quad \left. + \beta \pi_{x \overline{n}} (\mathfrak{D}_{x+t+1: \overline{n-t}} - {}_{n-t-1} E'_{x+t+1} {}_n \varphi_{x \overline{n}}) \right) \\
 & = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} u_{x+t+1: \overline{n-t-1}}.
 \end{aligned}$$

Diese Formel können wir auch direkt aus der Gleichung (184) ableiten; es ist

$$\begin{aligned}
 (195) \quad & u_{x+t: \overline{n-t}} = \\
 & = \frac{v'}{D'_{x+t}} (D'_{x+t} G_x + D'_{x+t+1} G_x + \dots + D'_{x+n-1} G_x) \\
 & = v' {}_t G_x + \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \frac{v'}{D'_{x+t+1}} (D'_{x+t+1} G_x + \dots \\
 & \quad + D'_{x+n-1} G_x) \\
 & = v' {}_t G_x + \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} u_{x+t+1: \overline{n-t-1}}.
 \end{aligned}$$

Es ist dies eine Rekursionsformel zur Berechnung des Barwertes der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen am Ende des $(t+1)$. Jahres aus dem Barwert am Ende des t . Jahres und umgekehrt.

2. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen findet sich der Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen aus der Gleichung (182), indem wir den Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden gleich Null setzen zu

$$\begin{aligned}
 (196) \quad & u_{x+t: \overline{n-t}} = {}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t: \overline{n-t}} \\
 & - \overline{A}'_{x+t: \overline{n-t}} - A^{ra}_{x+t: \overline{n-t}} - A^{re}_{x+t: \overline{n-t}} \\
 & - \gamma (a'_{x+t: \overline{n-t}} - A^a_{x+t: \overline{n-t}}).
 \end{aligned}$$

Die Tabelle 17 im Anhang gibt die nach Formel (196) berechneten Barwerte der Überschüsse für die gemischte Versicherung 10 000 des 30-Jährigen, fällig

nach 25 Jahren, nach acht verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals. Der Berechnung liegt die ausreichende Bruttoprämie zugrunde.

3. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Bei der Berechnung des Barwertes der Ausgaben an Dividenden haben wir zu unterscheiden zwischen Versicherungen vor und nach Beginn des Dividendenbezuges.

Bezeichnet allgemein $\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-t+1}$ den Barwert der künftigen Ausgaben an Dividenden von 1% der in Betracht fallenden Verteilungsgröße nach t Jahren, so ist der Barwert der Ausgaben an Dividenden nach t Jahren

$$(197) \quad \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-t+1}.$$

Der Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1% der als Verteilungsmassstab dienenden Größe ist vor Beginn des Dividendenbezuges $t \leq c$ [siehe Gleichung (126)]

$$(198) \quad \begin{aligned} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-t+1} &= \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+c \ c} q_{x \bar{n}} + D'_{x+c+1 \ c+1} q_{x \bar{n}} \\ &+ \dots + D'_{x+t \ t} q_{x \bar{n}} + \dots + D'_{x+n \ n} q_{x \bar{n}}) \\ &= \frac{1}{D'_{x+t}} \sum_{c}^n D'_{x+t \ t} q_{x \bar{n}} \end{aligned}$$

und nach Beginn des Dividendenbezuges $t \geq c$

$$(199) \quad \begin{aligned} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-t+1} &= \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+t \ t} q_{x \bar{n}} + D'_{x+t+1 \ t+1} q_{x \bar{n}} \\ &+ \dots + D'_{x+n \ n} q_{x \bar{n}}) = \frac{1}{D'_{x+t}} \sum_{t}^n D'_{x+t \ t} q_{x \bar{n}}. \end{aligned}$$

Ad System A. Der Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1 % der Prämie ist vor Beginn des Dividendenbezuges [siehe Gleichung (139)]

$$(200) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+t}} \sum_c^n D'_{x+t} = 0,01 \pi_{x \bar{n}} |_{c=t} a'_{x+t: \overline{n-t+1}}$$

und nach Beginn des Dividendenbezuges

$$(201) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+t}} \sum_t^n D'_{x+t} = 0,01 \pi_{x \bar{n}} | a'_{x+t: \overline{n-t+1}} .$$

Ad System B. Der Barwert der Dividenden von 1 % der Summe aller bezahlten Prämien ergibt sich für die nicht dividendenberechtigten Versicherungen [siehe Gleichung (141)] zu

$$(202) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+t}} \sum_c^n t D'_{x+t} = 0,01 \pi_{x \bar{n}} ((c-1) |_{c=t} a'_{x+t: \overline{n-t+1}} + |_{c=t} (Ia)'_{x+t: \overline{n-t+1}})$$

und für die dividendenberechtigten Versicherungen zu

$$(203) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+t}} \sum_t^n t D'_{x+t} = \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+t}} ((t-1) (N'_{x+t} - N'_{x+n+1}) + S'_{x+t} - S'_{x+n+1} - (n-t+1) N'_{x+n+1}) = 0,01 \pi_{x \bar{n}} ((t-1) a'_{x+t: \overline{n-t+1}} + (Ia)'_{x+t: \overline{n-t+1}}).$$

Ad System C. Vor Beginn des Dividendenbezuges ist der Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1 % des Deckungskapitals [siehe Gleichung (143)]

$$(204) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{0,01}{D'_{x+t}} \sum_{t=0}^n D'_{x+t} V_x.$$

Nach Beginn des Dividendenbezuges ist der Barwert der Ausgaben

$$(205) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{0,01}{D'_{x+t}} \sum_{t=0}^n D'_{x+t} V_x.$$

Über die Berechnung dieser Summenwerte ist bereits zu Formel (143) das Nötige gesagt worden.

Die Formeln (199), (201), (203) und (205) ergeben für $t = n$ den Wert

$$(206) \quad \mathfrak{D}_{x+n: \overline{1}} = {}_n \varphi_{x \overline{n}},$$

also die am Ende der Versicherungszeit noch auszuzahlende Schlussdividende.

Wir haben noch den Nachweis zu leisten, dass die Gleichung (193) richtig ist. Vor Beginn des Dividendenbezuges ist die auszuzahlende Dividende ${}_t \varphi_{x \overline{n}} = 0$, so dass zufolge Gleichung (198)

$$(207) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \mathfrak{D}_{x+t+1: \overline{n-t}}.$$

Für einen Dividendenbezüger ist nach Gleichung (199)

$$(208) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = {}_t \varphi_{x \overline{n}} + \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+t+1} {}_{t+1} \varphi_{x \overline{n}} + D'_{x+t+2} {}_{t+2} \varphi_{x \overline{n}} + \dots + D'_{x+n} {}_n \varphi_{x \overline{n}}),$$

woraus sich ohne weiteres ergibt

$$(209) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \mathfrak{D}_{x+t+1: \overline{n-t}} + {}_t \varphi_{x \overline{n}}.$$

Wir können diese Formel auch direkt aus den Gleichungen (200) bis (205) ableiten.

Diese Rekursionsformeln (207) und (209) können benutzt werden zur Berechnung des Barwertes der Ausgaben an Dividenden auf Ende eines Jahres aus dem Barwert am Ende des Vorjahres und umgekehrt.

Die Gleichung (199) formen wir durch Addition von zwei sich aufhebenden Gliedern in die folgende um:

$$\begin{aligned}
 (210) \quad & \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} = \\
 & = \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+t} {}_t \varphi_{x \bar{n}} + \dots + D'_{x+n} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) \\
 & + \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+c} {}_c \varphi_{x \bar{n}} + \dots + D'_{x+t-1} {}_{t-1} \varphi_{x \bar{n}}) \\
 & - \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+c} {}_c \varphi_{x \bar{n}} + \dots + D'_{x+t-1} {}_{t-1} \varphi_{x \bar{n}}) \\
 & = \frac{D'_{x+0}}{D'_{x+t}} \left(\frac{1}{D'_{x+0}} (D'_{x+c} {}_c \varphi_{x \bar{n}} + \dots + D'_{x+t} {}_t \varphi_{x \bar{n}} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + D'_{x+n} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) - \frac{1}{D'_{x+0}} (D'_{x+c} {}_c \varphi_{x \bar{n}} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + D'_{x+t-1} {}_{t-1} \varphi_{x \bar{n}}) \right) \\
 & = {}_t(E)'_{x+0} (\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} - \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}),
 \end{aligned}$$

wobei das Glied $\mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}$ den Barwert beim Eintritt der während den ersten t Jahren zu zahlenden Dividenden von 1 % angibt und ${}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}$ den Barwert der bisher bezahlten Dividenden am Ende des t . Jahres bedeutet (siehe den Abschnitt VIII, 3).

Wir konstruieren nun für zwei verschiedene Überschusssysteme die Differenz der Barwerte der Ausgaben an Dividenden auf Ende des t . Jahres, unter Berücksichtigung der in Gleichung (210) abgeleiteten Werte, wobei wir wieder die auf die beiden Dividenden-

systeme sich beziehenden Grössen durch die Indices a und b unterscheiden. Demnach ist

$$\begin{aligned}
 (211) \quad & \psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-\bar{t}+1}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-\bar{t}+1}^b = \\
 & = \psi_{x \bar{n}}^a {}_t(E)'_{x+0} \left(\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^a - \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^a \right) \\
 & - \psi_{x \bar{n}}^b {}_t(E)'_{x+0} \left(\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^b - \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^b \right) \\
 & = {}_t(E)'_{x+0} \left(\psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^b \right. \\
 & \quad \left. - \left(\psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^b \right) \right) \\
 & = {}_t(E)'_{x+0} \left(u_{x+0: \bar{n}}^a - u_{x+0: \bar{n}}^b - \left(\psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^a \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^b \right) \right),
 \end{aligned}$$

indem nach Gleichung (146) die Barwerte der künftigen Einnahmen an Überschüssen und der Ausgaben an Dividenden beim Eintritt gleich sein müssen. Setzen wir hier für die Differenz der Barwerte der Einnahmen an Überschüssen den Wert nach Gleichung (185) für $t = 0$ ein, so wird

$$\begin{aligned}
 (212) \quad & \psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-\bar{t}+1}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-\bar{t}+1}^b = \\
 & = {}_t(E)'_{x+0} \left(\beta \psi_{x \bar{n}}^a \left(\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^a - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}^a \right) \right. \\
 & \quad \left. - \beta \psi_{x \bar{n}}^b \left(\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^b - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}^b \right) \right) \\
 & - {}_t(E)'_{x+0} \left(\psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^b \right) \\
 & = \beta \psi_{x \bar{n}}^a \left({}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^a - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}^a \right) \\
 & - \beta \psi_{x \bar{n}}^b \left({}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n}+1}^b - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}^b \right) \\
 & - {}_t(E)'_{x+0} \left(\psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0: \bar{t}}^b \right).
 \end{aligned}$$

Die Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Dividenden ist für zwei Dividendensysteme am Ende des t . Jahres, gleich der Differenz der Barwerte der Inkassoprovisionen auf den sämtlichen auf Ende des t . Jahres bezogenen Dividenden, vermindert um die Differenz der Barwerte der bisherigen Ausgaben an Dividenden nach beiden Systemen.

Aus der Gleichung (212) folgt nach einigen Umformungen durch Anwendung der Gleichung (210)

$$\begin{aligned}
 (213) \quad & \psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t:n\bar{t+1}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t:n\bar{t+1}}^b \\
 & = \beta \psi_{x\bar{n}}^a \left({}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^a + \mathfrak{D}_{x+t:n\bar{t+1}}^a - {}_{n-t}E'_{x+t} \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^a \right) \\
 & - \beta \psi_{x\bar{n}}^b \left({}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^b + \mathfrak{D}_{x+t:n\bar{t+1}}^b - {}_{n-t}E'_{x+t} \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^b \right) \\
 & - {}_t(E)'_{x+0} \left(\psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^b \right) \\
 & = \beta \psi_{x\bar{n}}^a \left(\mathfrak{D}_{x+t:n\bar{t+1}}^a - {}_{n-t}E'_{x+t} \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^a \right) \\
 & - \beta \psi_{x\bar{n}}^b \left(D_{x+t:n\bar{t+1}}^b - {}_{n-t}E'_{x+t} \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^b \right) \\
 & - (1 - \beta) {}_t(E)'_{x+0} \left(\psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^b \right).
 \end{aligned}$$

Die Barwerte der Ausgaben an Dividenden sind für zwei Dividendensysteme am Ende des t . Jahres, um die Differenz der Barwerte der Inkassoprovisionen auf den künftigen Dividenden, vermindert um die um die Inkassoprovisionen gekürzte Differenz der Barwerte der bisherigen Ausgaben an Dividenden, von einander abweichend.

Aus Gleichung (213) folgt die Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Dividenden für nicht dividendenberechtigte Versicherte, weil die Barwerte der bisherigen Ausgaben gleich 0 sind, zu

$$\begin{aligned}
 (214) \quad & \psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}}^b \\
 & = \beta \psi_{x \bar{n}}^a \left(\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}}^a - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}^a \right) - \\
 & \quad - \beta \psi_{x \bar{n}}^b \left(\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}}^b - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}^b \right).
 \end{aligned}$$

Die Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben ist demnach für noch nicht überschussberechtigte Versicherungen derselben Dauer, gleich der Differenz der Barwerte der Inkassoprovisionen auf den künftigen Dividenden.

Die Beziehungen (212) bis (214) sind für zwei Versicherungen desselben Eintrittsalters und der nämlichen Versicherungsdauer gültig, wenn die Dividendsätze der beiden Dividendensysteme auf Grundlage derselben Brutto Prämie berechnet sind und die Dekungskapitalien nach der gleichen Berechnungsmethode eingesetzt werden.

Nach den früher getroffenen Annahmen sind die Barwerte der Ausgaben an Dividenden für das Überschusssystem *A* ebenfalls nach den Formeln (200) und (201) zu bestimmen, wenn mit dem $(c+1)$. Versicherungsjahre eine Zu- oder Abnahme der Prämie stattfindet. Bei dem System *B* ist der Barwert der Ausgaben an Dividenden von 1 % der Summe der bezahlten Prämien für einen noch nicht im Dividendengenuss stehenden Versicherten

$$\begin{aligned}
 (215) \quad & \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} = \\
 & = \frac{0,01 \pi_{x \bar{n}}}{D'_{x+t}} \sum_c^n t D'_{x+t} \pm \frac{0,01 c b_{x \bar{n}}}{D'_{x+t}} \sum_c^n D'_{x+t} \\
 & = 0,01 \pi_{x \bar{n}} ((c-1) {}_{c-t} a'_{x+t: \bar{n-t+1}} + {}_{c-t} (Ia)'_{x+t: \bar{n-t+1}}) \\
 & \quad \pm 0,01 c b_{x \bar{n}} {}_{c-t} a'_{x+t: \bar{n-t+1}}
 \end{aligned}$$

und für einen Dividendenbezüger

$$\begin{aligned} (216) \quad \mathfrak{D}_{x+t: \overline{n-t+1}} &= \\ &= \frac{0,01 \pi_{x \overline{n}}}{D'_{x+t}} \sum_t^n t D'_{x+t} \pm \frac{0,01 c b_{x \overline{n}}}{D'_{x+t}} \sum_t^n D'_{x+t} \\ &= 0,01 \pi_{x \overline{n}} ((t-1) a'_{x+t: \overline{n-t+1}} + (Ia)'_{x+t: \overline{n-t+1}}) \\ &\quad \pm 0,01 c b_{x \overline{n}} a'_{x+t: \overline{n-t+1}}. \end{aligned}$$

Die Tabelle 8 im Anhang gibt die Barwerte der Ausgaben an Dividenden im Betrage der Prämie 1, System *A*, oder der Prämiensumme 1, System *B*, oder des Deckungskapitals für die Versicherungssumme 1, System *C*. In der Tabelle 12 geben wir die Barwerte der Ausgaben an Dividenden von 1 % und von $\psi_{x \overline{n}} \%$ nach den drei Dividendensystemen *A*, *B* und *C* für eine gemischte Versicherung 10.000 des 30-Jährigen, fällig nach 25 Jahren.

4. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Für eine Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen ist der Barwert der Ausgaben an Dividenden auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet immer gleich Null.

5. Berechnung der theoretischen Überschussreserve (Dividendenreserve) für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres.

Bei den meisten Dividendensystemen werden die erzielten Überschüsse nicht sofort ausbezahlt, sondern es wird anfänglich in der Regel nur ein Teil der

Überschüsse ausgerichtet, während der andere Teil aufgesammelt wird, um erst in späteren Jahren zur Auszahlung zu gelangen. Die nicht ausbezahlten Überschüsse, inklusive Zinsen, bilden die Dividendenreserve, welche dazu dient, die berechneten Dividendensätze beibehalten zu können, unter der Voraussetzung natürlich, dass die wirklichen Verhältnisse bei der Gesellschaft, nämlich die Sterblichkeit, der Zinsfuss, die Verwaltungskosten und der Abgang bei Lebzeiten, mit den theoretisch angenommenen Werten übereinstimmen.

Die Überschussreserve wird definiert als Differenz zwischen den Barwerten der künftigen Ausgaben an Dividenden und den Barwerten der künftigen Einnahmen an Überschüssen.

Die Überschussreserve sei für die Versicherungssumme 1 nach t Jahren allgemein mit ${}_t U_x$ bezeichnet. Nach der oben gegebenen Definition ist deshalb die Überschussreserve für die Versicherungssumme 1 nach t Jahren gleich

$$(217) \quad {}_t U_x = \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - u_{x+t: \bar{n-t}},$$

wobei für $\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}}$ und $u_{x+t: \bar{n-t}}$ die der Versicherungsart, dem Überschusssystem und der abgelaufenen Zahl der Versicherungsjahre entsprechenden Werte einzusetzen sind.

Am Ende des n . Versicherungsjahres erhalten wir die Dividendenreserve als Differenz der Gleichungen (206) und (183) zu

$$(218) \quad {}_n U_x = \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+n: \bar{1}} - u_{x+n: \bar{0}} = {}_n \varphi_{x \bar{n}}.$$

Die Dividendenreserve ist somit gleich dem Betrag der auszuzahlenden Schlussdividende.

Aus den Gleichungen (209) und (195) leiten wir den folgenden Wert für die Überschussreserve nach t Jahren ab

$$\begin{aligned}
 (219) \quad {}_t U_x &= \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}} - u_{x+t:\bar{n-t}} \\
 &= \psi_{x\bar{n}} \left(\frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \mathfrak{D}_{x+t+1:\bar{n-t}} + {}_t g_{x\bar{n}} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} u_{x+t+1:\bar{n-t-1}} + v' {}_t G_x \right) \\
 &= \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} (\psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t+1:\bar{n-t}} - u_{x+t+1:\bar{n-t-1}}) \\
 &\quad + \psi_{x\bar{n}} {}_t g_{x\bar{n}} - v' {}_t G_x \\
 &= \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} {}_{t+1} U_x + \psi_{x\bar{n}} {}_t g_{x\bar{n}} - v' {}_t G_x.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel lässt sich die Überschussreserve am Ende eines Jahres aus der Reserve am Ende des Vorjahres berechnen und umgekehrt.

Setzen wir für den Barwert der Einnahmen an Überschüssen in der Gleichung (217) den Wert aus Gleichung (182) ein, so wird die Überschussreserve nach t Jahren gleich

$$\begin{aligned}
 (220) \quad {}_t U_x &= (1 - \beta) \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}} \\
 &\quad - \left({}_t V_x + (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} a'_{x+t:\bar{n-t}} - \bar{A}'_{x+t:\bar{n-t}} - A'^{ra}_{x+t:\bar{n-t}} \right. \\
 &\quad \left. - A'^{re}_{x+t:\bar{n-t}} - \beta \psi_{x\bar{n}} {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n g_{x\bar{n}} \right. \\
 &\quad \left. - \gamma (a'_{x+t:\bar{n-t}} - A^a_{x+t:\bar{n-t}}) \right).
 \end{aligned}$$

Beim Eintritt ist die Überschussreserve zufolge der Gleichung (146)

$$(221) \quad {}_0 U_x = (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n-1}} - \left((1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+0: \bar{n}} - \bar{A}'_{x+0: \bar{n}} - A^{ra}_{x+0: \bar{n}} - A^{re}_{x+0: \bar{n}} - a + \beta (\pi_{x \bar{n}} - \psi_{x \bar{n}} {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) - \gamma (\mathbf{a}'_{x+0: \bar{n}} - A^a_{x+0: \bar{n}}) \right) = 0.$$

Aus Gleichung (220) folgt durch eine andere Anordnung der Glieder

$$(222) \quad {}_t U_x + {}_t V_x = \bar{A}'_{x+t: \bar{n-t}} + A^{ra}_{x+t: \bar{n-t}} + A^{re}_{x+t: \bar{n-t}} + (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}} + \gamma (\mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}} - A^a_{x+t: \bar{n-t}}) - (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t: \bar{n-t}}.$$

In der Gleichung (222) haben wir auf der linken Seite die Überschussreserve mehr dem Deckungskapital, also den gesamten von der Gesellschaft aufbewahrten Versicherungsfonds. Durch diesen, vermehrt um den Barwert der Bruttoprämiens, wird der Barwert der sämtlichen künftigen Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen, Verwaltungskosten und Dividenden gedeckt.

Die Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen, Verwaltungskosten und Dividenden, sowie der künftigen Einnahmen an Prämien werden durch die Höhe der in Zukunft einzusetzenden Deckungskapitalien nicht berührt. Demnach ist die Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben und Einnahmen, d. h. der gesamte Versicherungsfonds, bestehend aus der Überschussreserve und dem Deckungskapital, gleich gross, nach welchen Grundlagen das Deckungskapital berechnet wird. Sofern der

gesamte Versicherungsfonds wirklich vorhanden ist, könnte ein beliebiger Teil davon als Deckungskapital und der Rest als Überschussreserve zurückgelegt werden.

Bilden wir die Differenz der Gleichungen (213) und (185), so folgt die Differenz der Überschussreserven für zwei Dividendensysteme a und b zu

$$(223) \quad {}_t U_x^a - {}_t U_x^b = -(1 - \beta) {}_t (E)'_{x+0} (\psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+0:\bar{t}}^b).$$

Die Überschussreserven sind demnach für zwei Dividendensysteme dem absoluten Werte nach um die um die Inkassoprovision gekürzte Differenz der Barwerte der bisherigen Ausgaben an Dividenden von einander abweichend. Für Nicht-Dividendenbezüger sind die Überschussreserven zufolge Gleichung (223) einander gleich, weil die Barwerte der bisherigen Dividenden gleich 0 sind. Die Gleichung (223) ist nur bei derselben Bruttoprämie und der nämlichen Berechnungsweise des Deckungskapitals gültig.

Bei dem Zahlungssystem der steigenden oder fallenden Prämie ist für den Barwert der Prämie, abzüglich dem Barwert der Inkassoprovision auf der Prämie, in den Gleichungen (220) und (222) der Ausdruck (186), in der Gleichung (221) der Ausdruck (134) einzusetzen.

Die Tabelle 13 gibt die Überschussreserven für die gemischte Versicherung 10.000 des 30-Jährigen, wenn die Versicherungssumme nach 25 Jahren fällig ist, für die drei Überschusssysteme und nach neun verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals. Die Tabelle 14 enthält die Sicherheitsfonds für die drei Überschussysteme. Beide Tabellen sind auf Grundlage der ausreichenden gleichbleibenden Prämie berechnet worden.

6. Berechnung des theoretischen Verlustes für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres.

Bei den Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen gibt es keine Überschussreserve, vielmehr kann nur von dem auf der Versicherung erzielten Verlust oder Überschuss gesprochen werden. Beim Eintritt ist der Barwert der Einnahmen an Überschüssen gleich 0. Am Ende der folgenden Versicherungsjahre ergibt sich bei den verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals ein von Null verschiedener Barwert der Einnahmen an Überschüssen, sofern das erste Jahr einen Überschuss oder Verlust ergeben hat. Der Barwert der künftigen Dividenden ist gleich Null, so dass die Differenz zwischen dem Barwert der Ausgaben an Dividenden und dem Barwert der Einnahmen an Überschüssen gleich dem auf der Versicherung erzielten Verlust, resp. Überschuss ist. Dieser ist gleich

$$(224) \quad -u_{x+t:\overline{n-t}} = -\left({}_t V_x + (1-\beta) \pi_{x\overline{n}} a'_{x+t:\overline{n-t}} \right. \\ \left. - \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t}} - A^{ra}_{x+t:\overline{n-t}} - A^{re}_{x+t:\overline{n-t}} \right. \\ \left. - \gamma (a'_{x+t:\overline{n-t}} - A^a_{x+t:\overline{n-t}}) \right),$$

woraus

$$(225) \quad {}_t V_x - u_{x+t:\overline{n-t}} = \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t}} + A^{ra}_{x+t:\overline{n-t}} \\ + A^{re}_{x+t:\overline{n-t}} + \gamma (a'_{x+t:\overline{n-t}} - A^a_{x+t:\overline{n-t}}) \\ - (1-\beta) \pi_{x\overline{n}} a'_{x+t:\overline{n-t}}.$$

Die Differenz zwischen dem Deckungskapital und dem Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen ist demnach für alle Berechnungsarten des Deckungskapitals konstant (siehe die Schlussbemerkung zu Abschnitt X, 3, Seite 234).

Die Tabelle 18 im Anhang gibt den Gewinn oder Verlust am Ende der verschiedenen Versicherungsjahre nach acht Berechnungsarten des Deckungskapitals, wenn die ausreichende Prämie ohne Anteil an den Überschüssen bezahlt wird.

VIII. Berechnung der theoretischen Überschussreserve für eine einzelne Versicherung auf Ende eines Versicherungsjahres, nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der retrospektiven Methode.

1. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Die Anstalt nimmt am Anfang eines jeden Jahres für die Versicherungssumme 1 die Bruttoprämie $\pi_{x \bar{n}}$ ein. Beim Eintritt ist die Abschlussprovision auszuzahlen, im Laufe der Jahre sind die Versicherungssummen, die Rückkaufssummen, die Inkassoprovisionen und die inneren Verwaltungskosten auszurichten, und am Ende des t . Jahres ist das rechnungsmässige Deckungskapital zurückzustellen. Demnach ist der Barwert der bisherigen theoretischen Überschüsse, den wir am Ende des t . Jahres mit $(u)_{x+0:\bar{t}}$ bezeichnen, als Differenz zwischen den Barwerten der Einnahmen und Ausgaben gleich

$$\begin{aligned} (226) \quad (u)_{x+0:\bar{t}} &= \\ &= \pi_{x \bar{n}}' (a)_{x+0:\bar{t}}' - (\bar{A})_{x+0:\bar{t}}'^1 - (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} - (A)_{x+0:\bar{t}}^{re} \\ &\quad - \alpha_t (E)_{x+0}' - \beta (\pi_{x \bar{n}}' (a)_{x+0:\bar{t}}' - t (E)_{x+0}') \\ &\quad - \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}} - \gamma ((a)_{x+0:\bar{t}}' - (A)_{x+0:\bar{t}}^a) - t V_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} (\mathbf{a})'_{x+0: \bar{t}} - (\bar{A})'_{x+0: \bar{t}} - (A)_{x+0: \bar{t}}^{ra} \\
 &\quad - (A)_{x+0: \bar{t}}^{re} - \alpha_t (E)'_{x+0} + \beta (\pi_{x \bar{n}})_t (E)'_{x+0} \\
 &\quad + \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{t}} - \gamma ((\mathbf{a})'_{x+0: \bar{t}} - (A)_{x+0: \bar{t}}^a) - {}_t V_x,
 \end{aligned}$$

wobei $(\mathfrak{D})_{x+0: \bar{t}}$ den Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden bezeichnet (siehe den Abschnitt VIII, 3).

Diese Formel sagt uns, dass der Barwert der bisherigen theoretischen Überschüsse nur abhängig ist vom Verlauf der Sterblichkeit, vom erzielten Zinsfuss, von den Rückkaufssummen und der Höhe der Verwaltungskosten, dass nur das Deckungskapital am Ende des t . Jahres in Betracht kommt, während die Deckungskapitalien der vorangehenden Jahre keinen Einfluss auf den Barwert ausüben.

Aus der Gleichung (226) folgt, dass für zwei Dividendensysteme a und b , die Differenz der Barwerte der bisherigen Einnahmen an Überschüssen bei derselben Versicherungskombination, der nämlichen Prämie $\pi_{x \bar{n}}$ und dem gleichen Deckungskapital, wenn wir die bezüglichen Barwerte durch die Indices a und b unterscheiden, gleich ist

$$\begin{aligned}
 (227) \quad & (u)_{x+0: \bar{t}}^a - (u)_{x+0: \bar{t}}^b \\
 &= \beta (\psi_{x \bar{n}}^a (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{t}}^a - \psi_{x \bar{n}}^b (\mathfrak{D})_{x+0: \bar{t}}^b).
 \end{aligned}$$

Die Barwerte der bisherigen Einnahmen sind somit für zwei Dividendensysteme um die Barwerte der Inkassoprovisionen auf den bisherigen Dividenden von einander abweichend, so dass für Nicht-Dividendenbezüger die Barwerte der bisherigen Einnahmen für alle Dividendensysteme gleich gross sind.

Die Gleichung (226) lässt sich auch ableiten, indem wir die Überschüsse der ersten t Versicherungsjahre

auf das Ende des t . Jahres vordiskontieren, die einzelnen Beträge addieren und deren Summe durch l'_{x+t} dividieren. Dadurch ergibt sich der Barwert der bisherigen Überschüsse zu

$$\begin{aligned}
 (228) \quad (u)_{x+0:\bar{t}} &= \\
 &= \frac{1}{l'_{x+t}} (l'_{x+0} G_x (1+i')^{t-1} + l'_{x+1} G_x (1+i')^{t-2} \\
 &\quad + \dots + l'_{x+t-1} G_x) \\
 &= \frac{v'}{D'_{x+t}} (D'_{x+0} G_x + D'_{x+1} G_x + \dots + D'_{x+t-1} G_x).
 \end{aligned}$$

Indem wir hier für die einzelnen Glieder ihre Werte nach den Gleichungen (110) und (113) einsetzen, fallen sämtliche Deckungskapitalien mit Ausnahme desjenigen nach t Jahren weg, und es geht die Formel nach einigen Umformungen in Gleichung (226) über.

Bilden wir die Summe der Barwerte der bisherigen und künftigen Einnahmen an Überschüssen nach den Gleichungen (182) und (226), so folgt unter Benutzung der im Abschnitt III abgeleiteten Beziehungen

$$\begin{aligned}
 (229) \quad (u)_{x+0:\bar{t}} + u_{x+t:\bar{n-t}} &= \\
 &= (1-\beta) \pi_{x\bar{n}} (a)_{x+0:\bar{t}}' - (\bar{A})_{x+0:\bar{t}}'^1 - (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} - \\
 &\quad - (A)_{x+0:\bar{t}}^{re} - \alpha_t (E)_{x+0}' + \beta (\pi_{x\bar{n}} t (E)_{x+0}' \\
 &\quad + \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}) - \gamma ((a)_{x+0:\bar{t}}' - (A)_{x+0:\bar{t}}^a) - {}_t V_x \\
 &\quad + {}_t V_x + (1-\beta) \pi_{x\bar{n}} a_{x+t:\bar{n-t}}' - \bar{A}_{x+t:\bar{n-t}}' \\
 &\quad - A_{x+t:\bar{n-t}}^{ra} - A_{x+t:\bar{n-t}}^{re} + \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}} \\
 &\quad - {}_{n-t} E_{x+t:\bar{n-t}}' \varphi_{x\bar{n}}) - \gamma (a_{x+t:\bar{n-t}}' - A_{x+t:\bar{n-t}}^a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= {}_t(E)'_{x+0} \left((1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} \mathbf{a}'_{x+0: \bar{n}} - \bar{A}'_{x+0: \bar{n}} - A^{ra}_{x+0: \bar{n}} \right. \\
 &\quad \left. - A^{re}_{x+0: \bar{n}} - \alpha + \beta \left(\pi_{x \bar{n}} + \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - {}_n E'_{x+0: n} \varphi_{x \bar{n}}) \right) - \gamma \left(\mathbf{a}'_{x+0: \bar{n}} - A^a_{x+0: \bar{n}} \right) \right) \\
 &= {}_t(E)'_{x+0} u_{x+0: \bar{n}}.
 \end{aligned}$$

Die zwischen den Barwerten der bisherigen und der künftigen Ausgaben an Dividenden bestehende Gleichung (243) werden wir im zweitfolgenden Abschnitt ableiten.

Die Gleichung (229) lässt sich auch durch Addition der Formeln (228) und (184) erhalten. Es ergibt sich alsdann

$$\begin{aligned}
 (230) \quad & (u)_{x+0: \bar{t}} + u_{x+t: \bar{n-t}} = \\
 &= \frac{v'}{D'_{x+t}} (D'_{x+0: 0} G_x + D'_{x+1: 1} G_x + \dots + D'_{x+t-1: t-1} G_x) \\
 &+ \frac{v'}{D'_{x+t}} (D'_{x+t: t} G_x + D'_{x+t+1: t+1} G_x + \dots \\
 &+ D'_{x+n-1: n-1} G_x) \\
 &= \frac{v'}{D'_{x+t}} (D'_{x+0: 0} G_x + D'_{x+1: 1} G_x + \dots + D'_{x+t: t} G_x \\
 &+ \dots + D'_{x+n-1: n-1} G_x) \\
 &= {}_t(E)'_{x+0} u_{x+0: \bar{n}} = {}_{n-t} E'_{x+t} (u)_{x+0: \bar{n}}
 \end{aligned}$$

[siehe die Gleichungen (121) und (160)]. Mit Hilfe dieser Gleichungen (229) oder (230) lässt sich somit nach t Jahren der Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen aus dem auf das Ende des t . Jahres diskontierten Barwert der Einnahmen beim Eintritt, sowie dem Barwert der bisherigen Einnahmen berechnen, und ebenso lässt sich der Barwert der bisherigen Ein-

nahmen aus dem Barwert der auf Ende des t . Jahres diskontierten Gesamteinnahmen und dem Barwert der künftigen Einnahmen ermitteln.

Setzen wir für den Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen auf der linken Seite der Gleichung (229) den Wert aus Gleichung (195) ein, so wird

$$(231) \quad (u)_{x+0:\overline{t}} + v' {}_t G_x + \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} u_{x+t+1:\overline{n-t-1}} \\ = {}_t (E)'_{x+0} u_{x+0:\overline{n}}.$$

Hieraus folgt

$$(232) \quad (u)_{x+0:\overline{t}} + v' {}_t G_x = \\ = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \left(\frac{D'_{x+0}}{D'_{x+t+1}} u_{x+0:\overline{n}} - u_{x+t+1:\overline{n-t-1}} \right) \\ = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} ((u)_{x+0:\overline{t+1}} + u_{x+t+1:\overline{n-t-1}} - u_{x+t+1:\overline{n-t-1}}) \\ = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} (u)_{x+0:\overline{t+1}}.$$

Diese Formel leitet sich auch direkt aus Gleichung (228) ab; es ist nämlich

$$(233) \quad D'_{x+t} (u)_{x+0:\overline{t}} = v' (D'_{x+0} {}_0 G_x + D'_{x+1} {}_1 G_x \\ + \dots + D'_{x+t-1} {}_{t-1} G_x)$$

und analog

$$(234) \quad D'_{x+t+1} (u)_{x+0:\overline{t+1}} = v' (D'_{x+0} {}_0 G_x \\ + D'_{x+1} {}_1 G_x + \dots + D'_{x+t-1} {}_{t-1} G_x + D'_{x+t} {}_t G_x).$$

Durch Subtraktion der Formel (233) von (234) folgt

$$(235) \quad D'_{x+t+1} (u)_{x+0:\overline{t+1}} - D'_{x+t} (u)_{x+0:\overline{t}} \\ = v' D'_{x+t} {}_t G_x.$$

Demnach ist

$$(236) \quad (u)_{x+0:\bar{t}} + v' {}_t G_x = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} (u)_{x+0:\bar{t+1}},$$

welche Gleichung mit (232) übereinstimmt. Wir haben hier eine Rekursionsformel, welche zur Berechnung des Barwertes der bisherigen Einnahmen an Überschüssen am Ende eines Versicherungsjahres aus dem Wert am Ende des vorangehenden Jahres dient und umgekehrt.

2. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen ist der Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden gleich 0, weil keine Dividenden zur Auszahlung gelangen. Demnach ist der Barwert der bisherigen Einnahmen an Überschüssen [siehe Gleichung (226)]

$$(237) \quad (u)_{x+0:\bar{t}} = (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}} (a)'_{x+0:\bar{t}} - (\bar{A})'_{x+0:\bar{t}} \\ - (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} - (A)_{x+0:\bar{t}}^{re} - (\alpha - \beta \pi_{x\bar{n}}) {}_t (E)'_{x+0} \\ - \gamma ((a)'_{x+0:\bar{t}} - (A)_{x+0:\bar{t}}^a) - {}_t V_x.$$

3. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Solange sich der Versicherte noch nicht im Dividendengenuss befindet, ist der Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden gleich 0. Während dem Dividendengenuss bezeichnen wir den Barwert der bis-

herigen Ausgaben an Dividenden von 1% des Verteilungsmassstabes am Ende des t . Jahres mit $(\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}$. Dieser Barwert ist für alle Dividendensysteme gleich

$$\begin{aligned}
 (238) \quad & (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}} = \\
 & = \frac{1}{l'_{x+t}} \left(l'_{x+c} \varphi_{x\bar{n}} (1+i')^{t-c} + l'_{x+c+1} \varphi_{x\bar{n}} (1+i')^{t-c-1} \right. \\
 & \quad \left. + \dots + l'_{x+t-1} \varphi_{x\bar{n}} (1+i') \right) \\
 & = \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+c} \varphi_{x\bar{n}} + D'_{x+c+1} \varphi_{x\bar{n}} + \dots \\
 & \quad + D'_{x+t-1} \varphi_{x\bar{n}}).
 \end{aligned}$$

Die Gesamtausgabe an Dividenden ist beim Dividendsatz $\psi_{x\bar{n}}$ gleich

$$(239) \quad \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}.$$

Auf Grundlage der Formel (238) leiten wir für die verschiedenen Überschusssysteme die Barwerte der bisherigen Ausgaben an Dividenden ab, indem wir für die Dividenden der einzelnen Jahre ihre Werte einsetzen.

Ad System A. Am Ende des t . Jahres ist der Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden von 1% der Prämie für den einzelnen Dividendenbezüger

$$\begin{aligned}
 (240) \quad & (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}} = \frac{0,01 \pi_{x\bar{n}}^{t-1}}{D'_{x+t}} \sum_c D'_{x+t} \\
 & = 0,01 \pi_{x\bar{n}} \mathbf{a}'_{x+0:\bar{t}}.
 \end{aligned}$$

Ad System B. Für einen Dividendenbezüger ist am Ende des t . Jahres der Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden von 1% der Prämiensumme gleich

$$\begin{aligned}
 (241) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}} &= \frac{0,01 \pi_{x\bar{n}}}{D'_{x+t}} \sum_c^{t-1} t D'_{x+t} \\
 &= \frac{0,01 \pi_{x\bar{n}}}{D'_{x+t}} ((c-1) (N'_{x+c} - N'_{x+t}) + S'_{x+c} - S'_{x+t} \\
 &\quad - (t-c) N'_{x+t}) \\
 &= 0,01 \pi_{x\bar{n}} ((c-1) {}_c(\mathbf{a})'_{x+0:\bar{t}} + {}_c((\mathbf{I}\mathbf{a}))'_{x+0:\bar{t}}),
 \end{aligned}$$

wobei ${}_c((\mathbf{I}\mathbf{a}))'_{x+0:\bar{t}}$ den Barwert der bisherigen im Alter $x+c$ mit 1 beginnenden und jährlich um 1 bis zum Alter $x+t$ steigenden Rente angibt.

Ad System C. Der Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden von 1% des Deckungskapitals ist am Ende des t . Jahres für einen Dividendenbezüger gleich

$$(242) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}} = \frac{0,01}{D'_{x+t}} \sum_c^{t-1} D'_{x+t} {}_t V_x.$$

Die zwischen den Barwerten der bisherigen und der künftigen Ausgaben an Dividenden bestehende Gleichung (siehe Abschnitt VIII, 1), leiten wir für einen Dividendenbezüger durch Addition der Gleichungen (199) und (238) ab. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 (243) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}} + \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}} &= \\
 &= \frac{1}{D'_{x+t}} (D'_{x+c} {}_c \varphi_{x\bar{n}} + D'_{x+c+1} {}_{c+1} \varphi_{x\bar{n}} + \dots \\
 &\quad + D'_{x+t} {}_t \varphi_{x\bar{n}} + \dots + D'_{x+n} {}_n \varphi_{x\bar{n}}) \\
 &= {}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} = {}_{n-t} E'_{x+t} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{n+1}}
 \end{aligned}$$

[siehe Gleichung (210)]. Diese Gleichung lässt sich auch direkt für jedes der drei Dividendensysteme ableiten.

Aus Gleichung (238) folgt für alle Dividendenbezüger der gesamte Barwert der bisherigen Ausgaben nach t Jahren zu

$$(244) \quad D'_{x+t}(\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t}} = D'_{x+c} q_{x\overline{n}} + D'_{x+c+1} q_{x\overline{n}} + \dots + D'_{x+t-1} q_{x\overline{n}}$$

und nach $t+1$ Jahren zu

$$(245) \quad D'_{x+t+1}(\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t+1}} = D'_{x+c} q_{x\overline{n}} + D'_{x+c+1} q_{x\overline{n}} + \dots + D'_{x+t-1} q_{x\overline{n}} + D'_{x+t} q_{x\overline{n}}.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt

$$(246) \quad D'_{x+t+1}(\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t+1}} - D'_{x+t}(\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t}} = D'_{x+t} q_{x\overline{n}}.$$

Hieraus folgt

$$(247) \quad (\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t}} + {}_t q_{x\overline{n}} = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} (\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t+1}}.$$

Für einen Nicht-Dividendenbezüger sind beide Seiten dieser Gleichung gleich 0. Wir haben in der Gleichung (247) eine Rekursionsformel, mittelst welcher wir für einen Dividendenbezüger den Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden am Ende eines Jahres aus dem Barwert am Ende des Vorjahres und umgekehrt berechnen können.

Aus den Gleichungen (212) und (213) folgt nach einigen Umformungen die Differenz der Barwerte der bisherigen Ausgaben an Dividenden für zwei Überschusssysteme zu

$$\begin{aligned}
 (248) \quad & \psi_{x\bar{n}}^a (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}^b = \\
 & = \beta \left(\psi_{x\bar{n}}^a (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}^b \right) \\
 & + \beta \psi_{x\bar{n}}^a \left(\mathfrak{D}_{x+t:n-\bar{t+1}}^a - {}_{n-t}E'_{x+t} {}_n \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^a \right) \\
 & - \beta \psi_{x\bar{n}}^b \left(\mathfrak{D}_{x+t:n-\bar{t+1}}^b - {}_{n-t}E'_{x+t} {}_n \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^b \right) \\
 & - \left(\psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t:n-\bar{t+1}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t:n-\bar{t+1}}^b \right) \\
 & = \beta \psi_{x\bar{n}}^a \left({}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}^a - {}_{n-t}E'_{x+t} {}_n \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^a \right) \\
 & - \beta \psi_{x\bar{n}}^b \left({}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}}^b - {}_{n-t}E'_{x+t} {}_n \mathfrak{g}_{x\bar{n}}^b \right) \\
 & - \left(\psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t:n-\bar{t+1}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t:n-\bar{t+1}}^b \right).
 \end{aligned}$$

Am Ende des t . Jahres sind somit für zwei Dividendensysteme die Barwerte der bisherigen Ausgaben an Dividenden verschieden um die Differenz der Barwerte der Inkassoprovisionen auf den sämtlichen auf das Ende des t . Jahres bezogenen Dividenden, vermindert um die Differenz der Barwerte auf den künftigen Dividenden. Diese Beziehung ist gültig für Dividendenbezüger bei derselben Bruttoprämie und derselben Berechnungsart des Deckungskapitals.

Für Nicht-Dividendenbezüger ist die Differenz der Barwerte der bisherigen Dividenden gleich Null, weil noch keine Dividenden ausbezahlt wurden. Es folgt dies auch aus Gleichung (248), in welcher die rechte Seite zufolge Gleichung (214) gleich 0 ist.

4. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet.

Für eine Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen ist der Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden gleich Null.

5. Berechnung der theoretischen Überschussreserve für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres.

Bei der retrospektiven Methode wird die Überschussreserve definiert, als Differenz der Barwerte der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen und der Barwerte der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden. Die Überschussreserve ist also gleich dem Betrag der durch die Dividenden nicht aufgegebrauchten Überschüsse. Gemäss dieser Definition ist die Überschussreserve am Ende des t . Jahres, wenn wir dieselbe mit ${}_t(U)_x$ bezeichnen, gleich

$$(249) \quad {}_t(U)_x = (u)_{x+0:\overline{t}} - \psi_{x\overline{n}} (\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t}},$$

wobei die Werte $(u)_{x+0:\overline{t}}$ und $(\mathfrak{D})_{x+0:\overline{t}}$ nach den in den Abschnitten VIII, 1 und 3, abgeleiteten Formeln einzusetzen sind und $\psi_{x\overline{n}}$ den theoretischen Dividendensatz angibt. Diese Gleichung ist für einen Dividendenbezüger gültig; für einen Nicht-Dividendenbezüger ist die Überschussreserve

$$(250) \quad {}_t(U)_x = (u)_{x+0:\overline{t}}.$$

Setzen wir in Gleichung (249) für den Barwert der bisherigen Einnahmen an Überschüssen den Wert aus Gleichung (230) und für den Barwert der bisherigen Ausgaben an Dividenden von 1% des Verteilungsmassstabes den Wert aus Gleichung (243) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (251) \quad {}_t(U)_x &= {}_t(E)'_{x+0} u_{x+0:\overline{n}} - u_{x+t:\overline{n-t}} \\ &\quad - \psi_{x\overline{n}} ({}_t(E)'_{x+0} \mathfrak{D}_{x+0:\overline{n+1}} - \mathfrak{D}_{x+t:\overline{n-t+1}}) \\ &= {}_t(E)'_{x+0} (u_{x+0:\overline{n}} - \psi_{x\overline{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\overline{n+1}}) \\ &\quad + \psi_{x\overline{n}} \mathfrak{D}_{x+t:\overline{n-t+1}} - u_{x+t:\overline{n-t}} \\ &= {}_t U_x. \end{aligned}$$

Demnach ergeben die beiden Berechnungsmethoden denselben Wert für die theoretische Überschussreserve.

Setzen wir in Gleichung (249) für den Barwert der bisherigen Einnahmen den Wert aus Gleichung (226) ein, so wird die Überschussreserve für einen Dividendenbezüger

$$(252) \quad {}_t(U)_x = (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}}' (a)'_{x+0: \bar{t}} - (\bar{A})'_{x+0: \bar{t}} \\ - (A)^{ra}_{x+0: \bar{t}} - (A)^{re}_{x+0: \bar{t}} - (a - \beta \pi_{x \bar{n}}) {}_t(E)'_{x+0} \\ - \gamma ((a)'_{x+0: \bar{t}} - (A)^a_{x+0: \bar{t}}) - (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} (\mathcal{D})_{x+0: \bar{t}} - {}_t V_x.$$

Hieraus folgt nach einer Umstellung

$$(253) \quad {}_t(U)_x + {}_t V_x = (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}}' (a)'_{x+0: \bar{t}} \\ - (\bar{A})'_{x+0: \bar{t}} - (A)^{ra}_{x+0: \bar{t}} - (A)^{re}_{x+0: \bar{t}} - (a - \beta \pi_{x \bar{n}}) {}_t(E)'_{x+0} \\ - \gamma ((a)'_{x+0: \bar{t}} - (A)^a_{x+0: \bar{t}}) - (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} (\mathcal{D})_{x+0: \bar{t}}.$$

Der gesamte Sicherheitsfonds, bestehend aus der Überschussreserve und dem Deckungskapital, ist somit nur abhängig von den einbezahlten Prämien, den bisherigen Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen, Verwaltungskosten und Dividenden, sowie von der Höhe des Zinsfusses. Das Deckungskapital der einzelnen Versicherungsjahre spielt bei der Berechnung des Sicherheitsfonds keine Rolle.

Die Überschussreserve ist für einen Nicht-Dividendenbezüger zufolge Gleichung (252) gleich

$$(254) \quad {}_t(U)_x = (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}}' (a)'_{x+0: \bar{t}} - (\bar{A})'_{x+0: \bar{t}} \\ - (A)^{ra}_{x+0: \bar{t}} - (A)^{re}_{x+0: \bar{t}} - (a - \beta \pi_{x \bar{n}}) {}_t(E)'_{x+0} \\ - \gamma ((a)'_{x+0: \bar{t}} - (A)^a_{x+0: \bar{t}}) - {}_t V_x.$$

Die Überschussreserve können wir auch erhalten durch Einsetzen der Werte von $(u)_{x+0:\bar{t}}$ und $(\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}$ aus den Gleichungen (236) und (247); daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (255) \quad & {}_t(U)_x = \\
 & = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} (u)_{x+0:\bar{t+1}} - v' {}_t G_x - \psi_{x\bar{n}} \left(\frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t+1}} \right. \\
 & \quad \left. - {}_t \varphi_{x\bar{n}} \right) \\
 & = \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} {}_{t+1}(U)_x + \psi_{x\bar{n}} {}_t \varphi_{x\bar{n}} - v' {}_t G_x.
 \end{aligned}$$

Diese Rekursionsformel stimmt mit der Formel (219) überein.

Aus der ersten Gleichung (248) folgt unter Benutzung der Gleichung (227)

$$\begin{aligned}
 (256) \quad & \psi_{x\bar{n}}^a (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b (\mathfrak{D})_{x+0:\bar{t}}^b = (u)_{x+0:\bar{t}}^a \\
 & - (u)_{x+0:\bar{t}}^b + \beta \psi_{x\bar{n}}^a (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^a - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x\bar{n}}^a) - \\
 & - \beta \psi_{x\bar{n}}^b (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^b - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x\bar{n}}^b) \\
 & - (\psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^a - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^b),
 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
 (257) \quad & {}_t(U)_x^a - {}_t(U)_x^b = \psi_{x\bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^a \\
 & - \psi_{x\bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^b - \beta \left(\psi_{x\bar{n}}^a (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^a \right. \\
 & \left. - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x\bar{n}}^a) - \psi_{x\bar{n}}^b (\mathfrak{D}_{x+t:\bar{n-t+1}}^b - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x\bar{n}}^b) \right).
 \end{aligned}$$

Die Differenz der Überschussreserven ist nach der retrospektiven Methode für zwei Dividendensysteme gleich der Differenz der Barwerte der künftigen Aus-

gaben an Dividenden, gekürzt um die Differenz der Barwerte der Inkassoprovisionen auf den künftigen Dividenden, resp. gleich der um die Inkassoprovision gekürzten Differenz der Barwerte der künftigen Dividenden.

Für Nicht-Dividendenbezüger ist die Differenz der Überschussreserven nach zwei Systemen zufolge den Gleichungen (257) und (214) gleich Null. Es ergibt sich dies übrigens auch aus den Gleichungen (250) und (227).

Aus der Gleichung (257) folgt für Dividendenbezüger unter Benutzung von Gleichung (185)

$$\begin{aligned} (258) \quad & {}_t(U)_x^a - {}_t(U)_x^b = \\ & = \psi_{x \bar{n}}^a \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-t+1}^a - \psi_{x \bar{n}}^b \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n}-t+1}^b \\ & - (u_{x+t: \bar{n}-t}^a - u_{x+t: \bar{n}-t}^b) \\ & = {}_t U_x^a - {}_t U_x^b. \end{aligned}$$

Die Differenz der Überschussreserven ist demnach nach der prospektiven und retrospektiven Berechnungsmethode dieselbe, wie es zufolge Gleichung (251) sein muss. Diese Beziehungen haben nur Gültigkeit bei derselben Bruttoprämie $\pi_{x \bar{n}}$ und derselben Berechnungsart des Deckungskapitals.

6. Berechnung des theoretischen Verlustes für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres.

Für eine Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen ist der Barwert der Ausgaben an Dividenden gleich 0. Somit ist der am Ende des t . Versicherungsjahres vorhandene Überschuss, resp. Verlust durch die Gleichung (237) gegeben. Aus derselben folgt

$$(259) \quad (u)_{x+0:\bar{t}} + {}_t V_x = (1 - \beta) \pi_{x\bar{n}}' (a)'_{x+0:\bar{t}} \\ - (\bar{A})'_{x+0:\bar{t}} - (A)_{x+0:\bar{t}}^{ra} - (A)_{x+0:\bar{t}}^{re} \\ - (\alpha - \beta \pi_{x\bar{n}}) {}_t (E)'_{x+0} - \gamma ((a)'_{x+0:\bar{t}} - (A)_{x+0:\bar{t}}^a).$$

Demnach ist am Ende des t . Jahres die Summe aus dem Barwert der bisherigen Überschüsse und dem Deckungskapital, von den in den vorangehenden Jahren eingestellten Deckungskapitalien unabhängig.

IX. Berechnung des Deckungskapitals nach neun verschiedenen Grundlagen für die Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen.

Bei der Berechnung des Deckungskapitals unterscheiden wir zwei verschiedene Methoden, indem wir das Deckungskapital a) als Differenz zwischen dem Barwert der Ausgaben an Versicherungssummen, eventuell mehr Rückkaufssummen und Verwaltungskosten, und dem Barwert der Einnahmen an Netto- oder Bruttoprämien, nach den Grundlagen erster oder zweiter Ordnung definieren und b) als Barwert der Bruttoprämiendifferenz, ebenfalls nach den beiden Grundlagen erklären. Von anderen Berechnungsarten des Deckungskapitals mittelst Bruttoprämien wollen wir hier absehen.

1. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Nettoprämiien, nach den Grundlagen erster Ordnung.

Bei der sogenannten Nettomethode wird das Deckungskapital ohne Berücksichtigung der Abschlussprovision berechnet. Das Deckungskapital ist am Ende

des t . Jahres für die gemischte Versicherung 1 des x -Jährigen, fällig nach n Jahren, gleich

$$(260) \quad {}_t \bar{V}_x = \bar{A}_{x+t: \bar{n-t}} - \bar{P}_{x \bar{n}} a_{x+t: \bar{n-t}},$$

wobei die Nettoprämie

$$(261) \quad \bar{P}_{x \bar{n}} = \frac{\bar{A}_{x+0: \bar{n}}}{a_{x+0: \bar{n}}}.$$

Sind die Versicherungssummen im Todesfall erst als am Ende des Sterbejahres zahlbar vorausgesetzt, so tritt $\bar{A}_{x+t: \bar{n-t}}$, resp. $\bar{A}_{x+0: \bar{n}}$ an Stelle von $\bar{A}_{x+t: \bar{n-t}}$, resp. $\bar{A}_{x+0: \bar{n}}$.

Wird ein Teil der Abschlusskosten mit α_1 % der Versicherungssumme erst im Laufe der Jahre amortisiert, während der Rest mit α_2 % der Versicherungssumme sofort beim Abschluss zu tilgen ist, wobei

$$(262) \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

so ist das Deckungskapital nach t Jahren

$$(263) \quad {}_t \bar{V}_x^z = \bar{A}_{x+t: \bar{n-t}} - (\bar{P}_{x \bar{n}} + P_{x \bar{n}}^z) a_{x+t: \bar{n-t}} \\ = {}_t \bar{V}_x - P_{x \bar{n}}^z a_{x+t: \bar{n-t}}.$$

Hier ist ${}_t \bar{V}_x$ das ungezillmerte Deckungskapital und $P_{x \bar{n}}^z$ die Zillmerprämie zur Amortisation der Abschlusskosten von α_1 % der Versicherungssumme. Die Zillmerprämie berechnet sich zu

$$(264) \quad P_{x \bar{n}}^z = \frac{\alpha_1}{a_{x+0: \bar{n}}}.$$

Die Formel (263) ergibt als Deckungskapital für $t = 0$ den Betrag $-\alpha_1$. Hierzu ist zu bemerken, dass dieser Wert bei der Berechnung des Überschusses für

das erste Jahr, sowie des Barwertes der Einnahmen an Überschüssen beim Eintritt nicht benutzt werden darf, weil hierbei die gesamte Abschlussprovision abgezogen wird.

Wird die ganze Abschlussprovision durch Prämien amortisiert, so ist in der Formel (264) statt α_1 der Wert α einzusetzen.

Als Grundlagen erster Ordnung wählen wir die Tafel M W I bei einem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$, wobei wir voraussetzen, dass die Sterbesummen am Ende des Sterbejahres zahlbar sind. Die Deckungskapitalien berechnen wir unter drei Voraussetzungen, nämlich *a)* auf Grundlage der reinen Nettoprämie (1. Methode), *b)* auf Grundlage einer Zillmerquote von $12\frac{1}{2}\%$ (2. Methode) und *c)* auf Grundlage einer Zillmerquote von 30% der Versicherungssumme (3. Methode). Die nach diesen Methoden für die gemischte Versicherung, Eintrittsalter 30, Verfall nach 25 Jahren, für 10.000 Versicherungssumme berechneten Deckungskapitalien sind in den ersten drei Kolumnen der Tabelle 9 enthalten. Wie schon bekannt ist, gibt die Nettomethode die grössten Deckungskapitalien; diese werden um so kleiner, je grösser die Zillmerquote gewählt wird. Bei einer Zillmerquote von 30% wird das Deckungskapital am Ende des ersten Jahres negativ.

Aus den drei ersten Kolumnen der Tabelle 10 sind die jährlichen Überschüsse zu entnehmen, welche sich für die drei Überschusssysteme nach den drei Berechnungsarten des Deckungskapitals auf Grundlage der ausreichenden Prämien ergeben. Die jährlichen Überschüsse sind bei derselben Berechnungsmethode des Deckungskapitals für die verschiedenen Überschusssysteme nur um die Differenzen der Inkassoprovisionen auf den Dividenden von einander verschieden.

Wird das Deckungskapital nach der Nettomethode berechnet, so ergibt das erste Versicherungsjahr auf jeder einzelnen Versicherung einen starken Verlust. Wenn eine Zillmerquote von $12\frac{1}{2}\%$ verrechnet wird, so zeigt das erste Versicherungsjahr ebenfalls noch einen, wenn auch kleineren Verlust. Bei einer Zillmerquote von 30% ergibt dagegen das erste Versicherungsjahr einen Überschuss. Für die übrigen Versicherungsjahre ist der jährliche Überschuss am grössten, wenn das Deckungskapital nicht gezillmert wird, am kleinsten bei einer Zillmerung des Deckungskapitals von 30% . Im übrigen zeigen die jährlichen Überschüsse denselben Verlauf. Für die fünf ersten Versicherungsjahre ist der Überschuss nur von der Berechnungsart des Deckungskapitals abhängig. Mit dem 6. Versicherungsjahr findet ein Sprung wegen der Inkassoprovision auf den Dividenden statt. Die Überschüsse steigen bis zum 16. Versicherungsjahr, um von dort an wieder abzunehmen.

Die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen sind beim Eintritt, wie auch Tabelle 11 zeigt, für dasselbe Überschusssystem von der Berechnungsmethode des Deckungskapitals unabhängig; sie sind dagegen für die verschiedenen Überschusssysteme um die Barwerte der Inkassoprovisionen auf den künftigen Dividenden von einander abweichend. Am Ende der folgenden Versicherungsjahre sind die Barwerte der Überschüsse, ausser vom Deckungskapital am Ende der einzelnen Jahre, ebenfalls von den Barwerten der Inkassoprovisionen auf den künftigen Dividenden abhängig. Die Barwerte der Überschüsse haben ihr Maximum bei der ersten und zweiten Berechnungsmethode des Deckungskapitals am Ende des ersten Versicherungsjahres, bei der dritten Berechnungsmethode am Ende des 0. Ver-

sicherungsjahres. Am Ende des n . Versicherungsjahres ist der Barwert der Einnahmen gleich 0. Wird das Deckungskapital nach der Nettomethode berechnet, so sind die Barwerte der Überschüsse vom Ende des ersten Versicherungsjahres an grösser als bei der Berechnungsmethode mit $12\frac{1}{2}\%$ Zillmerung. Diese sind wieder grösser als bei der Berechnungsmethode mit 30% Zillmerung.

Aus den letzten drei Kolumnen der Tabelle 12 sind die Barwerte der gesamten Ausgaben an Dividenden zu entnehmen. Diese sind von der Berechnungsweise des Deckungskapitals unabhängig. Vom Ende des 0. bis 5. Versicherungsjahres sind die Barwerte der Ausgaben an Dividenden für die drei Überschusssysteme um die Barwerte der Inkassoprovisionen auf den künftigen Dividenden von einander abweichend. Vom Ende des 6. Versicherungsjahres an zeigen die Barwerte der Ausgaben einen vom Überschusssystem abhängigen ganz verschiedenen Verlauf. Beim System *A* der gleichbleibenden Dividende nehmen die Barwerte der Ausgaben vom Ende des 5. Versicherungsjahres an beständig ab. Beim System *B* der nach der Prämiensumme steigenden Dividende nehmen die Barwerte der Ausgaben bis zum Ende des 10. Versicherungsjahres zu, um von dort an abzunehmen. Einen ähnlichen Verlauf zeigen die Barwerte der Ausgaben beim System *C* der im Verhältnis des Deckungskapitals steigenden Dividende, bei dem das Maximum auf das Ende des 11. Versicherungsjahres fällt. Die Barwerte der Ausgaben sind vom Ende des 6. Versicherungsjahres ab am kleinsten nach dem System *A*; das System *B* zeigt mittlere, das System *C* die höchsten Werte. Am Ende des 25. Versicherungsjahres sind die Barwerte der Ausgaben gleich der mit der Versicherungssumme auszuzahlenden Schlussdividende.

Die Tabelle 13 enthält in den drei ersten Kolumnen die Überschussreserven nach den drei Berechnungsarten des Deckungskapitals und für die drei Überschusssysteme. Am Ende der fünf ersten Versicherungsjahre sind die Reserven für alle drei Überschusssysteme, bei der nämlichen Berechnungsweise des Deckungskapitals, dieselben. Wird das Deckungskapital nach der Nettomethode berechnet, so ist die Überschussreserve nach einem und zwei Jahren negativ. Ebenso ist die Reserve nach einem Jahr negativ, wenn das Deckungskapital mit $12\frac{1}{2}\%$ Zillmerung ermittelt wird. Die Überschussreserven haben die kleinsten Werte bei der Berechnung des Deckungskapitals nach der Nettomethode, mittlere Werte bei der Berechnung des Deckungskapitals mit $12\frac{1}{2}\%$ Zillmerung und die grössten Werte, wenn das Deckungskapital mit 30% Zillmerquote berechnet wird. Nach Überschusssystemen betrachtet, sind die Überschussreserven am kleinsten für das System *A* der gleichbleibenden Dividende; sie haben mittlere Werte für das System *B* der nach der Prämiensumme steigenden Dividende, und die höchsten Werte beim System *C* der nach dem Deckungskapital steigenden Dividende. Beim Überschusssystem *A* findet sich das Maximum der Überschussreserve nach fünf Jahren; beim System *B* steigt die Reserve bis zum Ende des 15., resp. 16. Versicherungsjahres, um von dort an wieder abzunehmen; beim System *C* findet sich das Maximum der Reserven nach 16, bzw. nach 17 Jahren. Nach 25 Jahren ist die Überschussreserve gleich der Schlussdividende.

Aus der Tabelle 14 sind für die drei Überschusssysteme die Beträge der Versicherungsfonds, d. h. der Überschussreserven mehr den Deckungskapitalien zu entnehmen. Die Versicherungsfonds sind, wie nachge-

wiesen wurde, unabhängig von der Berechnungsart des Deckungskapitals. Am Ende der fünf ersten Versicherungsjahre sind die Versicherungsfonds für alle drei Überschusssysteme dieselben. Die Versicherungsfonds steigen fortwährend, bis sie am Ende der Versicherungszeit den Betrag der Versicherungssumme mehr der Schlussdividende erreicht haben. Die Versicherungsfonds sind am kleinsten für das Überschusssystem *A*, weil bei diesem schon mit dem 6. Jahre erhebliche Dividenden ausgerichtet werden. Beim System *B* erreichen die Versicherungsfonds mittlere und beim System *C* die höchsten Werte.

2. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Bruttoprämiens, resp. an Nettoprämiens mit Verrechnung der Verwaltungskosten, nach den Grundlagen erster Ordnung.

Wir berechnen das Deckungskapital nach zwei verschiedenen Methoden, indem wir den Barwert der Ausgaben an Versicherungssummen nach den Grundlagen erster Ordnung vermindern um den Barwert

- a)* der tarifmässigen Bruttoprämie ohne irgendwelche Anrechnung von Verwaltungskosten (4. Methode),
- b)* einer unter Verrechnung der Verwaltungskosten aus der Bruttoprämie abzuleitenden Nettoprämie (5. Methode).

Als Grundlage erster Ordnung dient wieder die Tafel M. W. I bei einem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$, nach der die Barwerte der Einnahmen an Prämien und der Ausgaben an Versicherungssummen zu berechnen sind.

Ad a). Nach den getroffenen Voraussetzungen ist das Deckungskapital ohne Verrechnung von Verwaltungskosten

$$(265) \quad {}_t V_x = \bar{A}_{x+t: \bar{n-t}} - \pi_{x \bar{n}} a_{x+t: \bar{n-t}},$$

wenn die Sterbesummen als unmittelbar nach dem Todesfall zahlbar vorausgesetzt werden.

Ad b). Wir konstruieren eine Nettoprämie $\mathfrak{P}_{x \bar{n}}$, indem wir die Brutto-Prämie um die den Verwaltungskosten entsprechende Prämie kürzen. Wir finden diese Nettoprämie aus der Gleichung

$$(266) \quad \mathfrak{P}_{x \bar{n}} a_{x+0: \bar{n}} = \pi_{x \bar{n}} a_{x+0: \bar{n}} \\ - \alpha - \beta \pi_{x \bar{n}} a_{x+0: \bar{n}} - \gamma a_{x+0: \bar{n}},$$

so dass die gesuchte Nettoprämie gleich wird

$$(267) \quad \mathfrak{P}_{x \bar{n}} = (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} - \frac{\alpha}{a_{x+0: \bar{n}}} - \gamma.$$

Das Deckungskapital wird nach t Jahren gleich

$$(268) \quad {}_t V_x = \bar{A}_{x+t: \bar{n-t}} - \mathfrak{P}_{x \bar{n}} a_{x+t: \bar{n-t}}.$$

Die Nettoprämie berechnet sich, da

$$\pi_{x \bar{n}} = 0,040.9760 \\ \frac{0,030}{a_{x \bar{n}}} = 0,001.9637 \\ \beta \pi_{x \bar{n}} = 0,000.8195 \\ \gamma = \frac{0,002}{\mathfrak{P}_{x \bar{n}}} \\ \text{zu} \quad \mathfrak{P}_{x \bar{n}} = 0,036.1928$$

In der Tabelle 9 geben wir in der vierten und fünften Kolumne die nach den Formeln (265) und (268) unter der Voraussetzung berechneten Deckungskapitalien, dass die Sterbesummen am Ende des Sterbe-

jahres zahlbar seien. Nach dieser Tabelle sind die Deckungskapitalien am Ende des 1. bis 4. Versicherungsjahres negativ, wenn sie nach der 4. Methode mit der tarifmässigen Bruttoprämie bestimmt werden, während sie am Ende des 1. und 2. Versicherungsjahres negativ ausfallen, wenn sie nach der 5. Methode mit der um die Verwaltungskostenprämie gekürzten Bruttoprämie berechnet werden. Nach der 4. Methode ergeben sich kleinere Deckungskapitalien als nach der 5. Methode; die anfänglich grossen Differenzen nehmen aber mit zunehmender Versicherungsdauer immer ab. Die nach der 4. und 5. Methode berechneten Deckungskapitalien sind durchgehends kleiner als die nach der 1. bis 3. Methode erhaltenen Werte. Die Differenzen sind am grössten zwischen den nach der 1. und 4. Methode berechneten Werten, am kleinsten zwischen den Deckungskapitalien nach der 3. und 5. Methode.

Die jährlichen Überschüsse sind für die gemischte Versicherung 10.000, nach den beiden Berechnungsmethoden des Deckungskapitals und für die drei Überschusssysteme, aus der 4. und 5. Kolumne der Tabelle 10 zu entnehmen. Die Überschüsse der fünf ersten Versicherungsjahre sind für alle drei Überschusssysteme bei der nämlichen Berechnungsweise des Deckungskapitals dieselben. Die Überschüsse des ersten Versicherungsjahres sind, entsprechend den niedrig eingesetzten Deckungskapitalien, ausnahmsweise hoch, und zwar bei der 4. Berechnungsmethode mehr als doppelt so hoch wie bei der 5. Methode. Für die folgenden Jahre sind dagegen die Überschüsse auffallend klein, und zwar bei der 4. Methode viel kleiner als bei der 5. Methode; sie nehmen vom 3. Versicherungsjahre an zu und erreichen das Maximum im 16. Versicherungsjahre, um von dort an wieder abzunehmen.

Vergleichen wir die jährlichen Überschüsse, welche sich nach der 4. und 5. Berechnungsmethode des Deckungskapitals ergeben, mit denen nach der 1. bis 3. Berechnungsmethode, so zeigen sich erhebliche Unterschiede, indem nach der 4. und 5. Methode die Überschüsse des ersten Versicherungsjahres sehr bedeutend grösser, die der folgenden Versicherungsjahre dagegen zum Teil beträchtlich kleiner als nach der 1. bis 3. Methode ausfallen.

Die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen (siehe die 4. und 5. Kolumne der Tabelle 11) sind beim Eintritt nur vom Dividendensystem, nicht aber von der Berechnungsweise des Deckungskapitals abhängig. Sie sind für die verschiedenen Dividendensysteme bei derselben Berechnungsmethode des Deckungskapitals um die Differenzen der Barwerte der Inkassoprovisionen auf den Dividenden abweichend. Die Barwerte der Einnahmen weisen vom 0. bis zum 1. Versicherungsjahre eine starke Abnahme auf, die besonders beträchtlich bei der 4. Berechnungsmethode ist. Nach der 4. Methode nehmen die Barwerte bis zum Ende des 4. Versicherungsjahres zu, um von dort an abzunehmen; bei der 5. Methode nehmen die Barwerte vom 1. Versicherungsjahr an fortwährend ab. Die Vergleichung der Barwerte der Einnahmen nach der 4. und 5. Berechnungsmethode des Deckungskapitals mit denen nach der 1. bis 3. Methode zeigt, dass, abgesehen von den Barwerten nach 0 Jahren, welche immer gleich sind, die Barwerte nach der 4. Methode gegenüber den Werten nach der 1. bis 3. Methode erheblich kleiner sind, während die Barwerte nach der 5. Methode von denen nach der 1. bis 3. Methode weniger abweichen.

Die Barwerte der Ausgaben an Dividenden in Tabelle 12 sind, wie bereits ausgeführt, von der Berechnungsweise des Deckungskapitals unabhängig.

Aus der 4. und 5. Kolumne der Tabelle 13 sind die Überschussreserven zu entnehmen. Am Ende der fünf ersten Versicherungsjahre sind die Reserven von dem Überschusssystem unabhängig. Vom 6. Versicherungsjahre an nehmen die Reserven beim Überschusssystem *A* fortwährend ab, beim Überschusssystem *B* steigen sie bis zum 11., resp. 13. Versicherungsjahr, beim System *C* bis zum 13., resp. 15. Versicherungsjahr, um vom Maximalwert an immer abzunehmen. Am Ende des 25. Versicherungsjahres ist die Überschussreserve gleich der Schlussdividende. Die Überschussreserven sind bei der 4. Berechnungsmethode des Deckungskapitals durchgehends grösser als bei der 5. Methode. Entsprechend den hohen Überschüssen des ersten Versicherungsjahres sind die Überschussreserven von Anfang an sehr hoch, und zwar zum Teil verhältnismässig viel höher, als wenn die Deckungskapitalien nach der 1. bis 3. Methode berechnet werden.

Die Tabelle 14 gibt die Beträge des Sicherheitsfonds, welche, wie schon früher erwähnt, von der Berechnungsart des Deckungskapitals unabhängig sind.

3. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten und der künftigen Einnahmen an Brutto-, resp. Nettoprämiens, nach den Grundlagen zweiter Ordnung.

Wir ermitteln das Deckungskapital nach zwei verschiedenen Methoden, indem wir vom Barwert der Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten abziehen

- a) den Barwert der tarifmässigen Brutto-Prämie (6. Methode),

- b) den Barwert der Nettoprämie, welche zur Dekkung der Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten hinreicht (7. Methode).

Ad a). Wird der Barwert der Einnahmen mittelst der tarifmässigen Brutto-prämie berechnet, so ergibt sich das Deckungskapital am Ende des t . Jahres zu

$$\begin{aligned}
 (269) \quad {}_t V'_x &= \\
 &= \bar{A}'_{x+t: \bar{n}-t} + A^{ra}_{x+t: \bar{n}-t} + A^{re}_{x+t: \bar{n}-t} + \beta \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t: \bar{n}-t} \\
 &\quad + \gamma (a'_{x+t: \bar{n}-t} - A^a_{x+t: \bar{n}-t}) - \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t: \bar{n}-t} \\
 &= \bar{A}'_{x+t: \bar{n}-t} + A^{ra}_{x+t: \bar{n}-t} + A^{re}_{x+t: \bar{n}-t} + \gamma (a'_{x+t: \bar{n}-t} \\
 &\quad - A^a_{x+t: \bar{n}-t}) - (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t: \bar{n}-t}.
 \end{aligned}$$

Das Deckungskapital nach 0 Jahren wird sich entsprechend nach der Formel berechnen

$$\begin{aligned}
 (270) \quad {}_0 V'_x &= \bar{A}'_{x+0: \bar{n}} + A^{ra}_{x+0: \bar{n}} + A^{re}_{x+0: \bar{n}} \\
 &\quad + \alpha - \beta \pi_{x \bar{n}} + \gamma (a'_{x+0: \bar{n}} - A^a_{x+0: \bar{n}}) - (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+0: \bar{n}}
 \end{aligned}$$

Nach dieser Formel ergibt sich ein negativer Wert des Deckungskapitals, den wir aber für unsere Berechnungen nicht benützen können, indem wir das Deckungskapital unmittelbar vor dem Eintritt gleich 0 gesetzt haben.

Setzen wir den Wert des Deckungskapitals nach Gleichung (269) in der Gleichung (112) für den Überschuss des $(t+1)$. Jahres ein, so geht derselbe über in

$$\begin{aligned}
 (271) \quad & {}_t G_x = \\
 & = \left[\overline{A}'_{x+t: \overline{n-t}} + A_{x+t: \overline{n-t}}^{ra} + A_{x+t: \overline{n-t}}^{re} + \gamma (a'_{x+t: \overline{n-t}} \right. \\
 & \quad \left. - A_{x+t: \overline{n-t}}^a) - (1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t: \overline{n-t}} + (1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} \right. \\
 & \quad + \beta \psi_{x \overline{n}} t \varphi_{x \overline{n}} - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} r_x^a - \gamma \left(1 - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} \right) - \frac{\overline{C}'_{x+t}}{D'_{x+t}} \\
 & \quad - \frac{K_{x+t}^e}{D'_{x+t}} r_x^e - \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \left(\overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{ra} \right. \\
 & \quad \left. + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{re} + \gamma (a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^a) \right. \\
 & \quad \left. - (1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right) \right] (1 + i').
 \end{aligned}$$

Hier ist nach den Gleichungen (188) bis (192)

$$(272) \quad (a'_{x+t: \overline{n-t}} - 1) (1 + i') = \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}}.$$

$$(273) \quad \left(\overline{A}'_{x+t: \overline{n-t}} - \frac{\overline{C}'_{x+t}}{D'_{x+t}} \right) (1 + i') = \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} \overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}}.$$

$$(274) \quad \left(A_{x+t: \overline{n-t}}^{ra} - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} r_x^a \right) (1 + i') = \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{ra}.$$

$$(275) \quad \left(A_{x+t: \overline{n-t}}^{re} - \frac{K_{x+t}^e}{D'_{x+t}} r_x^e \right) (1 + i') = \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{re}.$$

$$(276) \quad \gamma \left(a'_{x+t: \overline{n-t}} - A^a_{x+t: \overline{n-t}} - \left(1 - \frac{K^a_{x+t}}{D'_{x+t}} \right) \right) (1+i') \\ = \gamma \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} \left(a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A^a_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right).$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung (271) ein, so folgt

$$(277) \quad {}_t G_x = \\ = \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} \left(\overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + A^{ra}_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + A^{re}_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right. \\ \left. + \gamma \left(a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A^a_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right) \right. \\ \left. - (1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right) + \beta \psi_{x \overline{n}} {}_t \varphi_{x \overline{n}} (1+i') \\ - \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} \left(\overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + A^{ra}_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + A^{re}_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right. \\ \left. + \gamma \left(a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A^a_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right) \right. \\ \left. - (1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right) \\ = \beta \psi_{x \overline{n}} {}_t \varphi_{x \overline{n}} (1+i').$$

Der Überschuss des $(t+1)$. Jahres ist demnach gleich dem zum Zinsfuss von i' % auf Ende des Jahres aufgezinsten Wert der Inkassoprovision auf der Dividende dieses Jahres, so dass vor Beginn des Dividendenbezuges ein Überschuss überhaupt nicht erzielt wird.

Eine Ausnahme macht das erste Versicherungsjahr, für welches die Gleichung (277) nicht mehr gültig ist, so dass für dasselbe eine besondere Gleichung abzuleiten ist. Der Überschuss des ersten Versicherungsjahres ist nach Gleichung (115)

$$(278) \quad {}_0 G_x = {}_0 V'_x (1 + i') + \left(\pi_{x \bar{n}} - a - \gamma \left(1 - \frac{K'_{x+0}}{D'_{x+0}} \right) - \frac{\bar{C}'_{x+0}}{D'_{x+0}} - \frac{D'_{x+1}}{D'_{x+0}} {}_1 V_x \right) (1 + i') - {}_0 V'_x (1 + i').$$

Wir haben hier den Ausdruck

$$(279) \quad {}_0 V'_x (1 + i') - {}_0 V'_x (1 + i') = 0$$

addiert, wobei ${}_0 V'_x$ das Deckungskapital nach 0 Jahren zufolge Gleichung (270) bedeutet. Setzen wir für die Deckungskapitalien in Gleichung (278) ihre Werte ein, so hebt sich die Abschlussprovision a auf, und es folgt durch eine analoge Ableitung wie vorhin

$$(280) \quad {}_0 G_x = - {}_0 V'_x (1 + i').$$

Hier ist das Deckungskapital ${}_0 V'_x$ negativ, so dass der aufgezinste Überschuss des ersten Jahres gleich dem um ein Jahr aufgezinsten absoluten Wert des Deckungskapitals nach 0 Jahren ist.

Setzen wir in der Gleichung (120) für das Deckungskapital nach 0 Jahren den Wert aus Gleichung (270) ein, so folgt der Barwert der Überschüsse nach 0 Jahren zu

$$(281) \quad u_{x+0: \bar{n}} = \beta \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n-1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) - {}_0 V'_x.$$

Der Barwert der Überschüsse ist somit nach 0 Jahren gleich dem absoluten Wert des Deckungskapitals nach 0 Jahren, mehr dem Barwert der Inkassoprovision auf den künftigen Dividenden.

Da der Barwert der Einnahmen an Überschüssen beim Eintritt gleich dem Barwert der Ausgaben an Dividenden sein muss, so besteht die Gleichung

$$(282) \quad \beta \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) - {}_0 V'_x \\ = \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}},$$

so dass

$$(283) \quad \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} \\ - \beta \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) = - {}_0 V'_x.$$

Somit ist beim Eintritt der um die Inkassoprovision verminderte Barwert der künftigen Ausgaben an Dividenden gleich dem absoluten Wert des Deckungskapitals nach 0 Jahren.

Wird in der Gleichung (182) der Wert des Deckungskapitals nach t Jahren eingesetzt, so erhalten wir nach t Jahren den Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen zu

$$(284) \quad u_{x+t: \bar{n-t}} \\ = \beta \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}),$$

also gleich dem Barwert der Inkassoprovision auf den künftigen Dividenden.

Die Überschussreserve ist nach 0 Jahren als Differenz der Barwerte der Ausgaben an Dividenden und der Einnahmen an Überschüssen gleich

$$(285) \quad {}_0 U_x = \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} - u_{x+0: \bar{n}} \\ = (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}} + {}_0 V'_x = 0.$$

Die Überschussreserve folgt nach t Jahren, wenn in Gleichung (217) der Barwert der Einnahmen nach Gleichung (284) eingesetzt wird, zu

$$(286) \quad {}_t U_x = (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} \\ + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}.$$

Die Überschussreserve ist deshalb nach t Jahren gleich dem um die Inkassoprovision gekürzten Barwert der künftigen Ausgaben an Dividenden.

Ad b). Nach den Grundlagen zweiter Ordnung konstruieren wir eine Nettoprämie $P'_{x\bar{n}}$, aus welcher alle Ausgaben für Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten gedeckt werden können. Diese Nettoprämie finden wir mit Hilfe der Gleichung

$$(287) \quad P'_{x\bar{n}} \mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}} = \bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} \\ + \alpha + \beta \pi_{x\bar{n}} (\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}} - 1) + \gamma (\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}} - A'^a_{x+0:\bar{n}}).$$

Hier haben wir die Rückkaufswerte, nach denen die Barwerte der Rückkaufssummen zu berechnen sind, als gegeben vorausgesetzt und sie von den nach den Grundlagen zweiter Ordnung zu berechnenden Deckungskapitalien als unabhängig betrachtet. Aus der Gleichung (287) folgt alsdann die Nettoprämie

$$(288) \quad P'_{x\bar{n}} = \frac{1}{\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}}} (\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + \alpha) \\ + \beta \pi_{x\bar{n}} \left(1 - \frac{1}{\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}}} \right) - \gamma \left(1 - \frac{A'^a_{x+0:\bar{n}}}{\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}}} \right).$$

Auf Grundlage dieser Nettoprämie ergibt sich das Deckungskapital nach t Jahren zu

$$(289) \quad {}_t V'_x = \bar{A}'_{x+t:\bar{n}-t} + A'^{ra}_{x+t:\bar{n}-t} + A'^{re}_{x+t:\bar{n}-t} \\ + \beta \pi_{x\bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t:\bar{n}-t} + \gamma (\mathbf{a}'_{x+t:\bar{n}-t} - A'^a_{x+t:\bar{n}-t}) \\ - P'_{x\bar{n}} \mathbf{a}'_{x+t:\bar{n}-t}$$

und nach 0 Jahren zu

$$(290) \quad {}_0 V'_x = \bar{A}'_{x+0:\bar{n}} + A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} + A'^{re}_{x+0:\bar{n}} + \alpha \\ + \beta \pi_{x\bar{n}} (\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}} - 1) + \gamma (\mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}} - A'^a_{x+0:\bar{n}}) \\ - P'_{x\bar{n}} \mathbf{a}'_{x+0:\bar{n}} = 0.$$

Die Nettoprämie $P'_{x\bar{n}}$ eines 30 Jahre alt Eingetretenen berechnet sich für die gemischte Versicherung 1, fällig nach 25 Jahren, auf die folgende Weise. Es ist

$$\bar{A}'_{x+0:\bar{n}} = 0,326.715$$

$$A'^a_{x+0:\bar{n}} = 0,006.401$$

$$A'^{re}_{x+0:\bar{n}} = 0,014.761$$

$$\alpha = 0,030$$

$$\gamma a'_{x+0:\bar{n}} = 0,027.814$$

$$\frac{\beta \pi_{x\bar{n}} a'_{x+0:\bar{n}}}{0,417.088} = \frac{0,011.397}{0,417.088}$$

$$\beta \pi_{x\bar{n}} = 0,000.819$$

$$\frac{\gamma A'^a_{x+0:\bar{n}}}{0,416.195} = \frac{0,000.074}{0,416.195}$$

so dass $P'_{x\bar{n}} = \frac{0,416.195}{13,9068} = 0,029.9274.$

Diese Nettoprämie ist etwas grösser als die Bruttoprämie für die Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen (siehe Abschnitt V, 6). Dies erklärt sich dadurch, dass hier die Inkassoprovision auf der Bruttoprämie mit Anteil an den Überschüssen zu verrechnen ist.

Auf Grundlage der hier definierten Nettoprämien und Deckungskapitalien lässt sich für den Überschuss des $(t+1)$. Jahres nach Gleichung (112) ein anderer Wert ableiten. Setzen wir in Gleichung (112) für die Deckungskapitalien nach t und $t+1$ Jahren die entsprechenden Werte nach Gleichung (289) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 (291) \quad & {}_t G_x = \\
 & \left[\overline{A}'_{x+t: \overline{n-t}} + A_{x+t: \overline{n-t}}^{ra} + A_{x+t: \overline{n-t}}^{re} + \beta \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t: \overline{n-t}} \right. \\
 & - \gamma (a'_{x+t: \overline{n-t}} - A_{x+t: \overline{n-t}}^a) - P'_{x \overline{n}} a'_{x+t: \overline{n-t}} \\
 & + (1 - \beta) \pi_{x \overline{n}} + \beta \psi_{x \overline{n}} {}_t \varphi_{x \overline{n}} - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} r_x^a - \gamma \left(1 - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} \right) \\
 & - \frac{\overline{C}'_{x+t}}{D'_{x+t}} - \frac{K_{x+t}^e}{D'_{x+t}} r_x^e - \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} \left(\overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right. \\
 & + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{ra} + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{re} + \beta \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \\
 & + \gamma (a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^a) \\
 & \left. \left. - P'_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \right) \right] (1 + i') + (P'_{x \overline{n}} - P'_{x \overline{n}}) (1 + i').
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichungen (272) bis (276) folgt hieraus

$$\begin{aligned}
 (292) \quad & {}_t G_x = \\
 & = \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} \left(\overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{ra} + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{re} \right. \\
 & + \beta \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + \gamma (a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^a) \\
 & - P'_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \left. \right) + (\pi_{x \overline{n}} - P'_{x \overline{n}} + \beta \psi_{x \overline{n}} {}_t \varphi_{x \overline{n}}) (1 + i') \\
 & - \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} \left(\overline{A}'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{ra} + A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^{re} \right. \\
 & + \beta \pi_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} + \gamma (a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} - A_{x+t+1: \overline{n-t-1}}^a) \\
 & - P'_{x \overline{n}} a'_{x+t+1: \overline{n-t-1}} \left. \right) \\
 & = (\pi_{x \overline{n}} - P'_{x \overline{n}} + \beta \psi_{x \overline{n}} {}_t \varphi_{x \overline{n}}) (1 + i').
 \end{aligned}$$

Für das erste Versicherungsjahr lässt sich der aufgezinste Überschuss nach Gleichung (115) auch schreiben

$$(293) \quad {}_0G_x = {}_0V'_x (1 + i') \\ + \left(\pi_{x \bar{n}} - \alpha - \gamma \left(1 - \frac{K_{x+0}^a}{D'_{x+0}} \right) - \frac{\bar{C}'_{x+0}}{D'_{x+0}} - \frac{D'_{x+1}}{D'_{x+0}} V'_x \right) (1 + i'),$$

indem hier das Deckungskapital nach 0 Jahren gleich 0 ist. Da sich in dieser Gleichung die Abschlussprovision α durch Einsetzen der Werte für die Deckungskapitalien aufhebt, so folgt durch eine analoge Ableitung wie vorhin

$$(294) \quad {}_0G_x = (\pi_{x \bar{n}} - P'_{x \bar{n}}) (1 + i').$$

Aus den Gleichungen (292) und (294) ist zu ersehen, dass der jährliche aufgezinste Überschuss einer Versicherung für die dividendenfreien Jahre gleich der um ein Jahr zum Zinsfuss von $i' \%$ aufgezinsten Differenz zwischen Brutto- und Nettoprämie, also gleich einer konstanten Zahl ist, und dass er für die Dividendenjahre gleich dieser konstanten Zahl, erhöht um die aufgezinste Inkassoprovision auf der Dividende des betreffenden Jahres ist. Beim System der gleichbleibenden Dividende ist demnach der aufgezinste Überschuss der Dividendenjahre ebenfalls konstant, während für die steigenden Dividendensysteme vom $(c + 1)$. Jahre an eine schwache Zunahme der Überschüsse stattfindet.

Hierbei ist die Differenz

$$\begin{aligned} \pi_{x \bar{n}} &= 0,040.9760 \\ P'_{x \bar{n}} &= 0,029.9274 \\ \pi_{x \bar{n}} - P'_{x \bar{n}} &= 0,011.0486 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (120) folgt der Barwert der theoretischen Einnahmen an Überschüssen beim Eintritt nach einer kleinen Umformung zu

$$\begin{aligned}
 (295) \quad & u_{x+0:\bar{n}} = \\
 & = (\pi_{x\bar{n}} - P'_{x\bar{n}} + P'_{x\bar{n}}) a'_{x+0:\bar{n}} - \bar{A}'_{x+0:\bar{n}} - A'^{ra}_{x+0:\bar{n}} \\
 & - A'^{re}_{x+0:\bar{n}} - \alpha - \beta (\pi_{x\bar{n}} (a'_{x+0:\bar{n}} - 1) \\
 & - \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x\bar{n}})) \\
 & - \gamma (a'_{x+0:\bar{n}} - A'^a_{x+0:\bar{n}}) \\
 & = (\pi_{x\bar{n}} - P'_{x\bar{n}}) a'_{x+0:\bar{n}} + \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x\bar{n}})
 \end{aligned}$$

Da beim Eintritt der Barwert der Einnahmen an Überschüssen nach Gleichung (146) gleich dem Barwert der Ausgaben an Dividenden sein muss, so ist

$$\begin{aligned}
 (296) \quad & (\pi_{x\bar{n}} - P'_{x\bar{n}}) a'_{x+0:\bar{n}} + \beta \psi_{x\bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} \\
 & - {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x\bar{n}}) = \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}},
 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
 (297) \quad & (\pi_{x\bar{n}} - P'_{x\bar{n}}) a'_{x+0:\bar{n}} \\
 & = (1 - \beta) \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} + \beta \psi_{x\bar{n}} {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x\bar{n}}.
 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Differenz $\pi_{x\bar{n}} - P'_{x\bar{n}}$ als Prämienzuschlag, so ist der Barwert desselben beim Eintritt gleich dem um die Inkassoprovision gekürzten Barwert der künftigen Dividenden. Durch den Prämienzuschlag werden somit die sämtlichen Dividenden, abzüglich der Inkassoprovision auf denselben gedeckt.

Aus der Gleichung (297) folgt die Bruttoprämie zu

$$\begin{aligned}
 (298) \quad & \pi_{x\bar{n}} = \\
 & = P'_{x\bar{n}} + \frac{1}{a'_{x+0:\bar{n}}} ((1 - \beta) \psi_{x\bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0:\bar{n+1}} \\
 & + \beta \psi_{x\bar{n}} {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x\bar{n}}) \\
 & = P'_{x\bar{n}} + (\pi_{x\bar{n}} - P'_{x\bar{n}}),
 \end{aligned}$$

wobei

$$(299) \quad \pi_{x \bar{n}} - P'_{x \bar{n}} = \frac{1}{a'_{x+0: \bar{n}}} ((1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} + \beta \psi_{x \bar{n}} E'_{x+0 \bar{n}} \varphi_{x \bar{n}})$$

den Prämienzuschlag zur Deckung der um die Inkassoprovision gekürzten Dividenden bedeutet. Die Gleichung (298) könnte auch zur Berechnung der ausreichenden Bruttoprämie verwendet werden; sie wäre aber zu diesem Zwecke entsprechend umzuformen.

Der Barwert der Einnahmen an Überschüssen folgt am Ende des t . Jahres aus Gleichung (182) nach einer kleinen Umformung zu

$$(300) \quad \begin{aligned} u_{x+t: \bar{n-t}} &= \\ &= {}_t V'_x + (\pi_{x \bar{n}} - P'_{x \bar{n}} + P'_{x \bar{n}}) a'_{x+t: \bar{n-t}} - \bar{A}'_{x+t: \bar{n-t}} \\ &\quad - A^{ra}_{x+t: \bar{n-t}} - A^{re}_{x+t: \bar{n-t}} - \beta (\pi_{x \bar{n}} a'_{x+t: \bar{n-t}} \\ &\quad - \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - {}_{n-t} E'_{x+t \bar{n}} \varphi_{x \bar{n}})) \\ &\quad - \gamma (a'_{x+t: \bar{n-t}} - A^a_{x+t: \bar{n-t}}) \\ &= (\pi_{x \bar{n}} - P'_{x \bar{n}}) a'_{x+t: \bar{n-t}} + \beta \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} \\ &\quad - {}_{n-t} E'_{x+t \bar{n}} \varphi_{x \bar{n}}), \end{aligned}$$

indem sich die übrigen Glieder nach Gleichung (289) aufheben. Aus den Gleichungen (295) und (300) folgt, dass der Barwert der Einnahmen an Überschüssen am Ende der verschiedenen Versicherungsjahre gleich ist dem Barwert des Prämienzuschlages, vermehrt um den Barwert der Inkassoprovision auf den Dividenden. Es sind dies somit zwei bequeme Formeln zur Berechnung des Barwertes der Einnahmen an Überschüssen, sofern der Barwert der Ausgaben an Dividenden bereits bekannt ist.

Setzen wir für den Barwert der Einnahmen an Überschüssen in Gleichung (217) seinen Wert aus Gleichung (300) ein, so ergibt sich die Überschussreserve nach t Jahren zu

$$\begin{aligned}
 (301) \quad & {}_t U_x = \\
 & = \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - (\pi_{x \bar{n}} - P'_{x \bar{n}}) \mathfrak{a}'_{x+t: \bar{n-t}} \\
 & \quad - \beta \psi_{x \bar{n}} (\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) \\
 & = (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - (\pi_{x \bar{n}} - P'_{x \bar{n}}) \mathfrak{a}'_{x+t: \bar{n-t}} \\
 & \quad + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}}.
 \end{aligned}$$

Die Überschussreserve ist deshalb gleich dem um die Inkassoprovision gekürzten Barwert der künftigen Dividenden, vermindert um den Barwert der Prämienzuschläge. Wir haben damit eine bequeme Formel zur direkten Berechnung der Überschussreserve erhalten. Diese Formel kann aber auch zur Kontrolle benutzt werden, wenn die Barwerte der Ausgaben an Dividenden und der Einnahmen an Überschüssen gegeben sind.

Indem wir für den Prämienzuschlag seinen Wert aus (299) in Gleichung (301) einsetzen, erhalten wir als Wert für die Überschussreserve

$$\begin{aligned}
 (302) \quad & {}_t U_x = \\
 & = (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - ((1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} \\
 & \quad + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_n E'_{x+0} {}_n \varphi_{x \bar{n}}) \frac{\mathfrak{a}'_{x+t: \bar{n-t}}}{\mathfrak{a}'_{x+0: \bar{n}}} \\
 & \quad + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_{n-t} E'_{x+t} {}_n \varphi_{x \bar{n}} \\
 & = (1 - \beta) \psi_{x \bar{n}} \left(\mathfrak{D}_{x+t: \bar{n-t+1}} - \mathfrak{D}_{x+0: \bar{n+1}} \frac{\mathfrak{a}'_{x+t: \bar{n-t}}}{\mathfrak{a}'_{x+0: \bar{n}}} \right) \\
 & \quad + \beta \psi_{x \bar{n}} {}_n \varphi_{x \bar{n}} \left({}_{n-t} E'_{x+t} - {}_n E'_{x+0} \frac{\mathfrak{a}'_{x+t: \bar{n-t}}}{\mathfrak{a}'_{x+0: \bar{n}}} \right).
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (301) und (302) sind auch für $t=0$ gültig; beide geben für diesen Fall als Überschussreserve den Wert 0.

Aus der 6. und 7. Kolumne der Tabelle 9 sind die nach der Dekremententafel bei einem Zinsfuss von $4\frac{1}{8}\%$, als Differenz der Barwerte der Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten und der Einnahmen an Brutto-, resp. Nettoprämiien, berechneten Deckungskapitalien zu entnehmen. Nach der 6. Methode ergeben sich bis zum Ende des 6. Versicherungsjahres negative, anfänglich sehr niedrige Deckungskapitalien. Bei der 7. Methode ist das Deckungskapital nur am Ende des ersten Versicherungsjahres negativ. Die nach der 6. Methode berechneten Deckungskapitalien sind anfänglich ganz erheblich kleiner als die nach der 7. Methode erhaltenen Werte, immerhin nehmen die Differenzen aus begreiflichen Gründen mit zunehmender Versicherungsdauer fortwährend ab. Die Vergleichung mit den Deckungskapitalien nach der 1. bis 5. Methode zeigt, dass die 6. Methode durchgehends die niedrigsten Werte liefert, welche sogar noch erheblich niedriger als nach der 4. Methode sind. Die Deckungskapitalien nach der 7. Methode sind, wenn auch nicht erheblich kleiner als nach der 1. und 2. Methode, während sie mit den nach der 3. Methode berechneten Werten für 4 bis 14 Versicherungsjahre nahezu übereinstimmen und für die übrigen Jahre nur um unbedeutende Beträge davon abweichen. Die Deckungskapitalien nach der 4. und 5. Methode sind durchgehends kleiner als nach der 7. Methode, und zwar sind die Differenzen namentlich zwischen den Werten nach der 4. und 7. Methode auffallend gross.

Die jährlichen Überschüsse sind für die drei Überschusssysteme in der 6. und 7. Kolumne der Tabelle 10

enthalten. Nach der 6. Berechnungsmethode des Dekungskapitals ergibt sich für das erste Versicherungsjahr ein sehr grosser Überschuss; die vier folgenden Jahre liefern keinen Überschuss, während die übrigen Jahre einen Ertrag gleich der aufgezinsten Inkassoprovision auf den Dividenden geben. Nach der 7. Berechnungsmethode sind die Überschüsse der verschiedenen Versicherungsjahre gleich einer konstanten Zahl, mehr der aufgezinsten Inkassoprovision auf den Dividenden. Die beiden Methoden zeigen somit hinsichtlich der erzielten Überschüsse einen ganz verschiedenen Verlauf.

Vergleichen wir die jährlichen Überschüsse nach der 6. Methode mit denen nach den fünf ersten Methoden, so zeigt sich, dass der Überschuss des ersten Jahres grösser ist, während die Überschüsse der folgenden Jahre erheblich kleiner sind, wobei zu bemerken ist, dass die Unterschiede gegenüber der 4. Methode am kleinsten ausfallen. Nach der 1. und 2. Methode sind die jährlichen Überschüsse des ersten Jahres kleiner, die Überschüsse der folgenden Jahre dagegen grösser als nach der 7. Methode. Nach der 3. Methode sind die Überschüsse bald grösser, bald kleiner als nach der 7. Methode, doch sind die Unterschiede im allgemeinen nicht bedeutend. Nach der 4. und 5. Methode sind die Überschüsse des 1. Versicherungsjahres erheblich grösser, die der folgenden Jahre dagegen kleiner als nach der 7. Methode, und zwar zeigen sich nach der 4. Methode die bedeutendsten Unterschiede.

Die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen sind aus der 6. und 7. Kolumne der Tabelle 11 zu entnehmen. Nach 0 Jahren sind die Barwerte die-

selben. Bei der 6. Methode zeigt sich am Ende des 1. Jahres ein bedeutender Sprung, während sich nach der 7. Methode eine gleichmässige Abnahme einstellt. Die Barwerte der Einnahmen sind nach der 6. Methode vom 1. Jahre ab sehr klein gegenüber denen nach der 7. Methode, weil sich bei der erstenen die grösste Einnahme im 1. Jahr ergibt. Die Barwerte der Einnahmen sind nach der 6. Methode, abgesehen vom 1. Versicherungsjahr, nur ganz unbedeutend im Vergleich mit den Werten nach den fünf ersten Methoden. Nach der 1. und 2. Methode sind die Barwerte, wieder vom 1. Jahre abgesehen, durchgehends grösser als nach der 7. Methode. Die 3. Methode der Berechnung des Deckungskapitals zeigt bald etwas grössere, bald etwas kleinere Barwerte der Einnahmen als die 7. Methode, doch ist hervorzuheben, dass die Abweichungen nur unbedeutend sind. Die 4. und 5. Methode ergeben, namentlich die erstere, erheblich kleinere Barwerte als die 7. Methode.

Die Überschussreserven finden sich in der 6. und 7. Kolumne der Tabelle 13. Bis zum Ablauf des 5. Versicherungsjahres nehmen die Reserven, die nach allen drei Überschusssystemen dieselben sind, gleichmässig zu. Von dort an nehmen sie beim System *A* wieder ab, beim System *B* steigen sie bis zum 10., resp. 14. Versicherungsjahr, beim System *C* tritt das Maximum der Reserven beim 11., resp. 16. Versicherungsjahr ein. Die Überschussreserven haben nach der 6. Methode die grössten Werte, am nächsten kommen die Reserven nach der 4. Methode. Die Reserven nach der 1. und 2. Methode sind durchgehends kleiner als nach der 7. Methode. Die 3. Methode gibt bald etwas grössere, bald etwas kleinere Werte wie die 7. Methode, doch sind die Unterschiede nicht bedeutend.

Die 4. und 5. Methode ergeben durchgehends grössere Reserven wie die 7. Methode.

Die gesamten Versicherungsfonds nach Tabelle 14 geben keine Veranlassung zu weiteren Bemerkungen.

4. Berechnung des Deckungskapitals, als Barwert der Differenzen der Bruttoträmen mit Anteil an den Überschüssen, nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung.

Bezeichnen wir mit $\pi_{x+t:\overline{n-t}}$ die Bruttoträme mit Anteil an den Überschüssen für den $x+t$ Jahre alt Eingetretenen für eine gemischte Versicherung, fällig nach $n-t$ Jahren, d. h. ebenfalls im Alter $x+n$, so wird am Ende des t . Jahres das Deckungskapital des x Jahre alt Eingetretenen definiert, nach den Grundlagen erster Ordnung (8. Methode) zu

$$(303) \quad {}_t V_x = (\pi_{x+t:\overline{n-t}} - \pi_{x\overline{n}}) a_{x+t:\overline{n-t}},$$

nach den Grundlagen zweiter Ordnung (9. Methode) zu

$$(304) \quad {}_t V'_x = (\pi_{x+t:\overline{n-t}} - \pi_{x\overline{n}}) a'_{x+t:\overline{n-t}}.$$

Die Bruttoträmen mit Anteil an den Überschüssen sind bei der gemischten Versicherung für die Eintrittsalter 30, 32, 35, 37, 40, 42, 45 bis 50 und die entsprechenden Versicherungsdauern 25, 23, 20, 18, 15, 13, 10 bis 5 direkt auf Grundlage der diesen Eintrittsaltern entsprechenden Dekremententafeln, für das steigende Dividendensystem B , bei einem Zinsfuss von $4\frac{1}{8}\%$ und einem Dividendensatz von 3% nach der Formel (155) berechnet worden. Für die dazwischenliegenden Alter wurden die Prämien durch Interpolation gefunden. Beim Eintrittsalter 50, also der Vertragsdauer von 5 Jahren, wurde die Zahlung einer Schlussdividende von 15% der Bruttoträme gleichzeitig mit der Versicherungssumme vorausgesetzt. Die Brutto-

prämien sind somit nur für das nach der Prämien-
summe steigende Dividendensystem *B* gültig. Für die
beiden andern Dividendensysteme *A* und *C* wurden
die Prämien nicht ermittelt, weil die nach den ent-
sprechenden Bruttoprämiendifferenzen berechneten Dek-
kungskapitalien voraussichtlich von den für das System
B erhaltenen Deckungskapitalien etwas abweichende
Werte ergeben hätten. Um die Deckungskapitalien bis
zum Ende der Versicherungszeit berechnen zu können,
wurden die Prämien für die Eintrittsalter 51 bis 54 gleich
den Prämien der Versicherungen ohne Anteil an den
Überschüssen gesetzt (siehe den Abschnitt X, 4).

Die der Berechnung der Deckungskapitalien zu-
grunde gelegten Bruttoprämien und deren Differenzen
sind bei der gemischten Versicherung für die Ver-
sicherungssumme 10.000 die folgenden:

Eintritts- alter	Verfall nach Jahren	Bruttoprämien	Differenzen der Prämien
30	25	409,7603	0,0000
31	24	426,8616	17,1013
32	23	445,5192	35,7589
33	22	465,8532	56,0929
34	21	488,0574	78,2971
35	20	512,3989	102,6386
36	19	539,2188	129,4585
37	18	568,9314	159,1711
38	17	602,0246	192,2643
39	16	639,0600	229,2997
40	15	680,6727	270,9124
41	14	728,2271	318,4668
42	13	782,6858	372,9255
43	12	845,7952	436,0349
44	11	920,0856	510,3253
45	10	1008,8714	599,1111

Eintritts- alter	Verfall nach Jahren	Bruttoprämiens	Differenzen der Prämien
46	9	1116,2505	706,4902
47	8	1249,4705	839,7102
48	7	1418,8723	1009,1120
49	6	1642,1254	1232,3651
50	5	1947,7245	1537,9642
51	4	2397,7911	1988,0308
52	3	3220,1319	2810,3716
53	2	4840,1747	4430,4144
54	1	9798,7573	9388,9970

Die auf Grundlage dieser Prämiendifferenzen berechneten Deckungskapitalien finden sich für die Versicherungen nach dem steigenden Dividendensystem *B* in den beiden letzten Kolumnen der Tabelle 9. Diese Deckungskapitalien zeigen bis zum Ende des 19. Versicherungsjahres einen ziemlich regelmässigen Verlauf; vom 20. Versicherungsjahre an stellt sich aber ein sprunghafter Verlauf der Deckungskapitalien ein. Am Ende der Versicherungszeit ist das Deckungskapital gleich 1 gesetzt worden.

Nach der 8. Berechnungsmethode sind die Deckungskapitalien durchgehends etwas grösser als nach der 9. Methode. Die 8. Methode ergibt für den grössten Teil der Versicherungsjahre etwas höhere Deckungskapitalien als die 1., 2., 3., 5. und 7. Methode, während sie durchgehends bedeutend grössere Werte aufweist als die 4. und 6. Methode. Die 9. Methode gibt anfänglich nur wenig von der 1. Methode abweichende Deckungskapitalien; gegenüber den Werten nach den andern Methoden zeigt sich ungefähr derselbe Verlauf wie bei der 8. Methode.

In den beiden letzten Kolumnen der Tabelle 10, erste Fortsetzung, sind die jährlichen Überschüsse mit-

geteilt, welche sich beim steigenden Dividendensystem B ergeben, sofern das Deckungskapital nach den beiden Methoden 8 und 9 berechnet wird. Bei beiden Methoden ergibt sich im ersten Jahre ein Verlust, der bei der 8. Methode grösser als bei der 9. ist. Für das 2. bis 7. Versicherungsjahr sind die Überschüsse nach der 8. Methode geringer als nach der 9., während für die folgenden Jahre das umgekehrte Verhältnis eintritt. Für das 22. bis 25. Versicherungsjahr zeigen die jährlichen Überschüsse einen sehr unregelmässigen Verlauf; für das 24. Versicherungsjahr sind sie sogar negativ. Der Überschuss nach der 8. und 9. Methode ist anfänglich kleiner, später bis zum 21. Jahre grösser als nach der 1. Methode. Die 2. Methode weist fast allgemein für die Jahre 2 bis 21 kleinere Werte als die 8. und 9. Methode auf. Nach der 3. bis 7. Methode sind die Überschüsse des 2. bis 21. Versicherungsjahres durchgehends kleiner als nach der 8. und 9. Methode, wobei zu beachten ist, dass sich gegenüber der 6. Methode die grösssten, gegenüber der 4. Methode die zweitgrössten Differenzen ergeben.

Nach der 8. und 9. Berechnungsmethode sind die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen für das steigende Dividendensystem B in den beiden letzten Kolumnen der Tabelle 11, erste Fortsetzung, enthalten. Nach 0 Jahren ist der Barwert der Überschüsse nach sämtlichen Berechnungsmethoden derselbe. Nach einem Jahre zeigt sich eine starke Zunahme der Barwerte; von dort an nehmen sie ziemlich regelmässig ab, bis gegen das Ende der Versicherungszeit wieder Unregelmässigkeiten auftreten. Die Barwerte der Überschüsse sind nach der 8. Methode nur um unbedeutende Beträge grösser als nach der 9. Methode. Gegenüber der 1. und 2. Methode sind die Barwerte für

etwa zwei Dritteile der Versicherungsdauer um nicht sehr erhebliche Beträge grösser, für den Rest dagegen kleiner. Die 3. und 7. Methode zeigen für etwa vier Fünfteile der Versicherungsjahre ziemlich erheblich kleinere Barwerte als die 8. und 9. Methode. Nach der 4. bis 6. Methode sind durchgehends kleinere Barwerte als nach der 8. und 9. Methode vorhanden, und zwar sind die Unterschiede gegenüber der 6. Methode am grössten, gegenüber der 5. Methode am kleinsten.

In den beiden letzten Kolumnen der Tabelle 13, erste Fortsetzung, geben wir die Überschussreserven nach der 8. und 9. Berechnungsmethode des Deckungskapitals für das Überschusssystem *B* der steigenden Dividende. Beim Eintritt ist die Überschussreserve gleich 0, nach einem und zwei Jahren fällt dieselbe negativ aus. Vom Ende der folgenden Versicherungsjahre an findet eine fortwährende Zunahme bis zum Ende des 21. Jahres statt. Die Abnahme für die folgenden Jahre ist eine etwas unregelmässige. Die 9. Methode weist durchgehends etwas grössere Reserven als die 8. auf. Die Überschussreserven zeigen nach der 8. und 9. Methode einen nach den sieben übrigen Methoden ganz verschiedenen Verlauf, indem bei diesen das Maximum um eine erhebliche Anzahl von Jahren früher liegt. Demgemäß sind auch die Überschussreserven nach der 1. bis 7. Methode für die ersten $\frac{4}{5}$ der Versicherungsjahre grösser als nach der 8. und 9. Methode.

X. Berechnung des Deckungskapitals nach acht verschiedenen Grundlagen für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen.

Wir unterscheiden auch hier wieder zwei verschiedene Methoden der Berechnung des Deckungskapitals, indem wir dasselbe *a)* als Differenz zwischen

dem Barwert der Ausgaben an Versicherungssummen, eventuell vermehrt um den Barwert der Rückkaufssummen und Verwaltungskosten, und dem Barwert der Einnahmen an Netto- oder Bruttoprämi en nach den Grundlagen erster oder zweiter Ordnung, oder *b*) als Barwert der Prämiedifferenzen, ebenfalls nach den beiden Grundlagen, definieren.

1. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Nettoprämi en, nach den Grundlagen erster Ordnung.

Wir setzen das nach den Grundlagen erster Ordnung mittelst Nettoprämi en berechnete Deckungskapital wieder ein *a*) nach der reinen Nettomethode (1. Methode), *b*) bei einer Zillmerquote von $12\frac{1}{2}\%$ (2. Methode) und *c*) bei einer Zillmerquote von 30% (3. Methode). Wir verweisen diesfalls auf die Ausführungen im Abschnitt IX, 1. Das Deckungskapital wird somit gleich hoch eingesetzt, wie für die Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen. Wir geben die Deckungskapitalien nach den drei Berechnungsmethoden in den drei ersten Kolumnen der Tabelle 15 wieder.

Auf Grundlage dieser Deckungskapitalien wurden die jährlichen Überschüsse einer Versicherung ermittelt, welche wir in den drei ersten Kolumnen der Tabelle 16 geben. Nach der reinen Nettomethode gibt das erste Versicherungsjahr einen sehr starken Verlust, während die folgenden Versicherungsjahre alle einen Überschuss zur Ausgleichung des Verlustes im ersten Jahre aufweisen. Bei einer Zillmerung von $12\frac{1}{2}\%$ ergibt das erste Versicherungsjahr ebenfalls noch einen starken Verlust, der immerhin kleiner als nach der ersten Methode ausfällt. Die folgenden Jahre ergeben sämtlich

Überschüsse, die jedoch kleiner als nach der ersten Methode sind. Die dritte Berechnungsmethode des Deckungskapitals gibt abwechselnd bald unbedeutende Verluste, bald geringe Überschüsse. Abgesehen vom ersten Versicherungsjahr zeigen die jährlichen Überschüsse bei allen drei Berechnungsmethoden einen ganz gleichmässigen Verlauf.

Aus den drei ersten Kolumnen der Tabelle 17 sind die Barwerte der künftigen Überschüsse nach den drei Berechnungsmethoden des Deckungskapitals zu entnehmen. Nach 0 Jahren ist der Barwert der Überschüsse gleich 0. Die ersten beiden Berechnungsmethoden ergeben vom 1. Jahre an durchwegs positive Barwerte der Überschüsse, und zwar sind die Werte nach der ersten Methode immer grösser als nach der zweiten. Das Maximum der Barwerte weist bei beiden Methoden das Ende des 1. Versicherungsjahres auf. Nach der dritten Methode sind die Barwerte der Überschüsse verhältnismässig gering und abwechselnd bald positiv, bald negativ.

Die Anstalt muss, wenn sie nur die ausreichende Bruttoprämie bezieht, bei den beiden ersten Berechnungsmethoden des Deckungskapitals auf Ende des 1. Versicherungsjahres einen Verlust in Rechnung stellen, dessen absoluter Betrag durch den Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen gegeben ist. Durch die in den späteren Jahren zu erwartenden Überschüsse wird allerdings der Verlust nach und nach amortisiert, so dass er bis zum Ablauf der Versicherung vollständig verschwunden ist. Bei der 3. Berechnungsmethode des Deckungskapitals ist am Ende des ersten Jahres ein kleiner Überschuss vorhanden. Durch die Verluste der folgenden Jahre wird der Überschuss der beiden ersten Jahre aufgezehrt, so dass am Ende des

7. Jahres wieder ein Verlust ausgewiesen wird. Vom Ende des 13. bis zum Ende des 24. Jahres erzeugt die Rechnung einen Überschuss.

2. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Bruttoprämien, resp. Nettoprämiens mit Verrechnung der Verwaltungskosten, nach den Grundlagen erster Ordnung.

Das Deckungskapital berechnen wir wieder nach zwei verschiedenen Methoden, indem wir den Barwert der Ausgaben an Versicherungssummen kürzen:

- a) um den Barwert der ausreichenden Bruttoprämie (4. Methode),
- b) um den Barwert der Nettoprämie, welche aus der Bruttoprämie durch Kürzung um die zur Deckung der Verwaltungskosten dienende Prämie erhalten wird (5. Methode).

Das Deckungskapital berechnet sich nach a) mittelst der Formel (265), wobei für $\pi_{x\bar{n}}$ die ausreichende Prämie ohne Anteil an den Überschüssen einzusetzen ist. Nach der Methode b) berechnet sich die nach Abzug der Verwaltungskostenprämie übrig bleibende Prämie nach der Gleichung (267), das Deckungskapital nach Gleichung (268). Die Nettoprämie berechnet sich, da

$$\pi_{x\bar{n}} = 0,029.7012$$

$$\frac{0,030}{a_{x\bar{n}}} = 0,001.9637$$

$$\beta \pi_{x\bar{n}} = 0,000.5940$$

$$\gamma = 0,002$$

zu $\mathfrak{P}_{x\bar{n}} = 0,025.1435$

Dasselbe Deckungskapital wie nach Gleichung (268) erhält man übrigens auch, indem man den Barwert der Versicherungssumme um den Barwert der Prämie zur Deckung der Verwaltungskosten, also um den Betrag

$$(305) \quad \left(\frac{\alpha}{a_{x+0:\bar{n}}} + \beta \pi_{x\bar{n}} + \gamma \right) a_{x+t:\bar{n-t}}$$

erhöht und mit Bruttoprämiien rechnet.

Aus der 4. und 5. Kolumne der Tabelle 15 sind die Deckungskapitalien nach den oben angeführten Berechnungsmethoden zu entnehmen. Wie hieraus ersichtlich ist, sind die Deckungskapitalien nach diesen beiden Methoden sehr hoch, so dass sie nach einem Jahre nach der 4. Methode beinahe das Doppelte, nach der 5. Methode mehr als das Vierfache einer Prämie ausmachen. Dies röhrt davon her, dass die beiden für die Berechnung in Betracht fallenden Prämien kleiner als die Nettoprämie nach M. W. I sind. Entsprechend den hohen Anfangswerten bleiben die Deckungskapitalien auch für die folgenden Versicherungsjahre sehr hoch, und zwar für die 5. Methode höher als für die 4. Methode. Ein Vergleich mit den Werten nach den drei ersten Berechnungsmethoden zeigt, dass diese namentlich für die ersten Versicherungsjahre, erheblich geringere Deckungskapitalien zurückstellen. Die Differenzen sind am kleinsten zwischen der 1. und 4. Methode, am grössten zwischen der 3. und 5. Methode.

Die Tabelle 16 enthält in der 4. und 5. Kolumne die jährlichen Überschüsse, welche sich bei Einstellung der Deckungskapitalien nach der 4. und 5. Methode ergeben. Das erste Versicherungsjahr weist entsprechend den hoch eingesetzten Deckungskapitalien einen starken Verlust auf, der nach der 5. Methode mehr als doppelt so hoch als nach der 4. Methode ist. Die folgenden Ver-

sicherungsjahre ergeben sehr hohe Überschüsse zur Deckung des Verlustes im 1. Jahre, und zwar die 5. Methode mehr als doppelt so hohe Werte wie die 4. Methode. Die Überschüsse nehmen zuerst langsam ab, steigen dann etwas, um nachher wieder abzunehmen. Bei beiden Methoden ist der Verlust im ersten Jahre, ebenso der Überschuss der folgenden Jahre erheblich grösser als nach der 1. und 2. Methode.

Die 4. und 5. Kolumne der Tabelle 17 geben die Barwerte der Einnahmen an künftigen Überschüssen nach der 4. und 5. Berechnungsmethode des Deckungskapitals. Diese Barwerte sind nach 0 Jahren gleich 0, sie erreichen aber nach einem Jahr entsprechend dem starken Verlust des 1. Jahres, sehr hohe positive Werte. Vom 1. Jahre an nehmen die Barwerte ziemlich gleichmässig ab, doch bleiben sie nach der 5. Methode immer mehr als doppelt so hoch wie nach der 4. Vergleichen wir die Barwerte der Einnahmen mit denen nach den ersten drei Methoden, so zeigt es sich, dass sie durchgehends erheblich grösser sind, und zwar sind die Unterschiede am stärksten zwischen der 3. und 5. Methode, am geringsten zwischen der 1. und 4. Methode.

Beide Berechnungsmethoden weisen am Ende des ersten Versicherungsjahres einen starken Verlust auf, der wieder durch die Überschüsse der folgenden Jahre nach und nach amortisiert wird (siehe Tabelle 18).

3. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten und der künftigen Einnahmen an Bruttoprämien, nach den Grundlagen zweiter Ordnung.

Das Deckungskapital soll nur nach einer Methode (6. Methode) berechnet werden. Den Barwert der Aus-

gaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten vermindern wir um den Barwert der ausreichenden Bruttoprämie, da diese bei den Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen zugleich auch die Nettoprämie darstellt. Wir erhalten das Deckungskapital nach den beiden Formeln (269) und (270), wobei wir statt $\pi_{x \bar{n}}$ die ausreichende Prämie für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen einzusetzen haben.

Indem wir in der Formel (117) für den jährlichen Überschuss des $(t+1)$. Jahres den Wert des Deckungskapitals aus Gleichung (269) einsetzen, ergibt sich der Überschuss zu

$$\begin{aligned}
 (306) \quad & {}_t G_x = \\
 & = \left[\bar{A}'_{x+t: \bar{n-t}} + A_{x+t: \bar{n-t}}^{ra} + A_{x+t: \bar{n-t}}^{re} + \gamma (a'_{x+t: \bar{n-t}} \right. \\
 & \quad \left. - A_{x+t: \bar{n-t}}^a) - (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t: \bar{n-t}} + (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} r_x^a - \gamma \left(1 - \frac{K_{x+t}^a}{D'_{x+t}} \right) - \frac{C'_{x+t}}{D'_{x+t}} - \frac{K_{x+t}^e}{D'_{x+t}} r_x^e \right. \\
 & \quad \left. - \frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}} (\bar{A}'_{x+t+1: \bar{n-t-1}} + A_{x+t+1: \bar{n-t-1}}^{ra} \right. \\
 & \quad \left. + A_{x+t+1: \bar{n-t-1}}^{re} + \gamma (a'_{x+t+1: \bar{n-t-1}} - A_{x+t+1: \bar{n-t-1}}^a) \right. \\
 & \quad \left. - (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t+1: \bar{n-t-1}}) \right] (1 + i').
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichungen (272) bis (276) folgt hieraus

$$\begin{aligned}
 (307) \quad & {}_t G_x = \\
 & = \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} (\bar{A}'_{x+t+1: \bar{n-t-1}} + A_{x+t+1: \bar{n-t-1}}^{ra} \\
 & + A_{x+t+1: \bar{n-t-1}}^{re} + \gamma (a'_{x+t+1: \bar{n-t-1}} - A_{x+t+1: \bar{n-t-1}}^a) \\
 & - (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t+1: \bar{n-t-1}}) - \frac{D'_{x+t+1}}{v' D'_{x+t}} (\bar{A}'_{x+t+1: \bar{n-t-1}})
 \end{aligned}$$

$$+ A_{x+t+1:n-t-1}^{ra} + A_{x+t+1:n-t-1}^{re} + \gamma (a'_{x+t+1:n-t-1} \\ - A_{x+t+1:n-t-1}^a) - (1 - \beta) \pi_{x \bar{n}} a'_{x+t+1:n-t-1} = 0.$$

Der Überschuss des ersten Jahres ergibt sich aus Gleichung (293). Da sich in dieser die Abschlussprovision α nach Einsetzung der Werte für die Deckungskapitalien aufhebt, so folgt durch eine analoge Ableitung wie vorhin

$$(308) \quad {}_0 G_x = 0.$$

Demnach ist der Überschuss für die sämtlichen Versicherungsjahre gleich Null.

Nach der Gleichung (135) ist der Barwert der künftigen Überschüsse beim Eintritt gleich 0. Setzen wir den Wert des Deckungskapitals nach Gleichung (269) in Gleichung (196) ein, so folgt der Barwert der Überschüsse nach t Jahren zu

$$(309) \quad u_{x+t:n-t} = {}_t V'_x - {}_t V_x' = 0.$$

Es ist somit auch der Barwert der künftigen Überschüsse für alle Versicherungsjahre gleich Null.

Hier mag noch erwähnt werden, dass die rechte Seite der Gleichung (225) gleich dem Deckungskapital nach Gleichung (269) ist. Demnach ist für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen, die Differenz zwischen dem Deckungskapital nach irgend-einer Berechnungsmethode und dem Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen, gleich dem Deckungskapital, das sich nach den Grundlagen zweiter Ordnung mittelst der ausreichenden Brutto-prämie ermitteln lässt.

Die 6. Kolumne der Tabelle 15 gibt die nach der 6. Berechnungsmethode erhaltenen Deckungskapitalien. Nach dieser Tabelle fällt das Deckungskapital am

Ende des ersten Versicherungsjahres negativ aus. Die Deckungskapitalien sind nach der 6. Methode für alle Versicherungsjahre durchgehends kleiner als nach der 1., 2., 4. und 5. Methode, wobei die Differenzen gegenüber der 2. Methode am kleinsten, gegenüber der 5. Methode am grössten sind. Die Deckungskapitalien nach der 3. Methode sind nicht wesentlich von denen nach der 6. Methode verschieden.

Es ist oben nachgewiesen worden, dass die jährlichen Überschüsse und die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen nach der 6. Berechnungsmethode des Deckungskapitals gleich 0 ausfallen, was auch durch die Rechnung bestätigt wird. Ebenso sind nach der 6. Methode die Verluste für alle Versicherungsjahre gleich Null.

4. Berechnung des Deckungskapitals, als Barwert der Differenzen der Bruttoprämien ohne Anteil an den Überschüssen, nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung.

Die Deckungskapitalien berechnen sich nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung mit Hülfe der Formeln (303) und (304), indem wir dort die entsprechenden Prämien ohne Anteil an den Überschüssen einsetzen (7. und 8. Methode).

Die Bruttoprämien ohne Anteil an den Überschüssen sind für die gemischte Versicherung mit den Eintrittsaltern 30, 32, 35, 37, 40, 42, 45 bis 54 und den Versicherungsdauern 25, 23, 20, 18, 15, 13, 10 bis 1, direkt nach den Dekremententafeln mit Hülfe der Formel (158) bei einem Zinsfuss von $4\frac{1}{8}\%$ ermittelt worden. Dabei ist zu bemerken, dass sich die ausreichende Prämie für das Alter 54 und die Versicherungsdauer 1 nach der Formel berechnet

$$(310) \quad \pi_{x\bar{1}} = \bar{A}'_{x\bar{1}} + \alpha + \gamma (1 - A^a_{x\bar{1}}).$$

Für die dazwischenliegenden Alter wurden die Prämien durch Interpolation gefunden.

Die folgende Zusammenstellung gibt die Brutto-
prämien für die gemischte Versicherung ohne Anteil
an den Überschüssen, für die Eintrittsalter 30 bis 54
und das Verfallalter 55, sowie die zur Berechnung
der Deckungskapitalien dienenden Brutto-
prämiedifferenzen bei einer Versicherungssumme von 10.000.

Eintritts- alter	Verfall nach Jahren	Brutto- prämien	Differenzen der Prämien
30	25	297,0122	0,0000
31	24	313,1590	16,1468
32	23	330,9083	33,8961
33	22	350,3868	53,3746
34	21	371,7996	74,7874
35	20	395,4300	98,4178
36	19	421,6398	124,6276
37	18	450,8689	153,8567
38	17	483,6354	186,6232
39	16	520,5361	223,5239
40	15	562,2457	265,2335
41	14	610,1959	313,1837
42	13	665,4018	368,3896
43	12	729,7420	432,7298
44	11	805,9584	508,9462
45	10	897,6563	600,6441
46	9	1009,3043	712,2921
47	8	1148,8792	851,8670
48	7	1328,0087	1030,9965
49	6	1566,7252	1269,7130
50	5	1898,4520	1601,4398
51	4	2397,7911	2100,7789
52	3	3220,1319	2923,1197
53	2	4840,1747	4593,1625
54	1	9798,7573	9501,7451

Die Deckungskapitalien, welche sich auf Grundlage dieser Prämiedifferenzen nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung ergeben, sind in den beiden letzten Kolumnen der Tabelle 15 enthalten. Auch diese Deckungskapitalien zeigen bis zum Ende des 19. Versicherungsjahres einen ziemlich regelmässigen Verlauf; für die letzten Jahre dagegen treten einzelne Sprünge auf. Am Ende des 25. Versicherungsjahres wurde das Deckungskapital gleich 1 gesetzt.

Nach der 7. Berechnungsmethode sind die Deckungskapitalien immer etwas grösser als nach der 8. Methode. Die 7. Methode gibt durchgehends grössere Deckungskapitalien als die 1., 2., 3. und 6. Methode; die Differenzen sind unbedeutend gegenüber der 1. Methode, am stärksten gegenüber der 3. und 6. Methode. Die 4. und 5. Methode geben anfänglich erheblich höhere Deckungskapitalien als die 7. Methode, doch kehrt sich das Verhältnis gegen das Ende der Versicherungsdauer um. Die 8. und 1. Methode geben nicht wesentlich verschiedene Deckungskapitalien, welche anfänglich nach der 8. Methode etwas grösser, später aber kleiner sind. Die Deckungskapitalien sind nach der 8. Methode grösser als nach der 2., 3. und 6. Methode, kleiner als nach der 4. und 5. Methode.

Die beiden letzten Kolumnen der Tabelle 16 geben die jährlichen Überschüsse der Versicherung, wenn das Deckungskapital nach der 7. oder 8. Methode berechnet wird. Das erste Versicherungsjahr zeigt nach beiden Methoden einen Verlust, der kleiner nach der 8. als nach der 7. Methode ist. Die übrigen Versicherungsjahre ergeben kleine, nicht wesentlich verschiedene Überschüsse, die anfänglich nach der 8. Methode grösser als nach der 7. Methode sind. Das 24. Versicherungsjahr ergibt bei beiden Methoden einen Verlust. Die

7. und 8. Methode geben nicht wesentlich von der 1. und 2. Methode abweichende Überschüsse; beide weisen dagegen grössere Überschüsse als die 3. und 6. Methode und erheblich kleinere Überschüsse als die 4. und 5. Methode auf.

Die beiden letzten Kolumnen der Tabelle 17 enthalten die Barwerte der künftigen Einnahmen an Überschüssen, welche sich für die verschiedenen Versicherungsjahre, nach den beiden Berechnungsmethoden des Dekkungskapitals ergeben. Beim Eintritt ist der Barwert der Überschüsse gleich 0; nach einem Jahre ist er entsprechend dem Verlust des ersten Jahres verhältnismässig gross, und zwar grösser nach der 7. als nach der 8. Methode. Für die folgenden Jahre nehmen die Barwerte allmählich ab; gegen das Ende der Versicherungszeit sind die Abnahmen unregelmässig. Nach der 7. Methode sind die Barwerte der Überschüsse durchgehends grösser als nach der 8. Methode. Der Vergleich mit den Barwerten nach der 1. bis 6. Methode zeigt, dass die 7. Methode grössere Barwerte als die 1. bis 3. und 6. Methode, im allgemeinen kleinere Barwerte als die 4. und 5. Methode aufweist, während die 8. Methode grössere Barwerte als die 2., 3. und 6., sowie die 1. Methode bis zum 12. Versicherungsjahr, kleinere Barwerte als die 4. Methode bis zum 18. Versicherungsjahr und als die 5. Methode gibt.

Die Verluste sind für die verschiedenen Versicherungsjahre aus den beiden letzten Kolumnen der Tabelle 18 zu entnehmen. Das erste Versicherungsjahr ergibt einen starken Verlust, welcher im Laufe der folgenden Versicherungsjahre durch deren Überschüsse nach und nach amortisiert wird. Über das Verhalten der Verluste nach der 7. und 8. Methode unter sich

und gegenüber der 1. bis 6. Methode gelten dieselben Bemerkungen wie für die Barwerte der Einnahmen.

XI. Schlussbemerkungen.

1. Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen.

Wie nachgewiesen wurde, ist der Bestand des Versicherungsfonds, d. h. das Deckungskapital mehr der Überschussreserve, von der Berechnungsmethode des Deckungskapitals unabhängig, so dass es ohne Be- lang zu sein scheint, welche Beträge als Deckungs- kapital und welche als Überschussreserve zurückgestellt werden, sofern deren Summe in der rechnungsmässigen Höhe vorhanden ist. Für den praktischen Betrieb ist es aber keineswegs gleichgültig, in welcher Höhe das Deckungskapital eingestellt wird, weil dadurch die jährlichen Überschüsse, wie Tabelle 10 zeigt, er- heblich beeinflusst werden. Von einigen Autoren ist die Forderung aufgestellt worden, dass die erzielten Über- schüsse bei einer Lebensversicherungsgesellschaft, ohne Rücksicht auf den grösseren oder geringeren Neuzugang der einzelnen Jahre, Jahr für Jahr, in einem nahezu konstanten Verhältnis zur Prämieneinnahme stehen sollen, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass in der Wirklichkeit keine erheblichen Abweichungen von den theoretischen Voraussetzungen über Sterblichkeit, Zins- fuss, Abgang bei Lebzeiten und Höhe der Verwaltungs- kosten eintreten werden.

Von dem Gesichtspunkte der konstanten Über- schüsse der einzelnen Versicherung aus betrachtet, gibt die 7. Methode der Berechnung des Deckungs- kapitals die günstigsten Resultate. Bei dieser Methode sind die Überschüsse einer jeden einzelnen Versiche-

rung, wenn von der Inkassoprovision auf den ausbezahlten Dividenden abgesehen wird, für alle Versicherungsjahre dieselben, so dass sich also bei einer Gesellschaft für die sämtlichen Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen nahezu ein konstantes Verhältnis zwischen Überschuss und Prämieneinnahme für die aufeinander folgenden Jahre einstellen wird. Die Deckungskapitalien sind nach der 7. Methode verhältnismässig hoch, und die Barwerte der Einnahmen, sowie die Überschussreserven zeigen von Anfang an einen regelmässigen Verlauf.

Ähnliche, doch nicht so regelmässig verlaufende Resultate ergibt die 3. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung mittelst Nettoprämiens bei 30 % Zillmerung.

Die 1. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung mit den reinen Nettoprämiens, stellt die höchsten Deckungskapitalien zurück. Das erste Versicherungsjahr ergibt einen erheblichen Verlust, während die folgenden Jahre nicht stark verschiedene Überschüsse liefern. Bei einer Gesellschaft mit stark steigendem Neuzugang kann deshalb eine Abnahme des Prozentverhältnisses zwischen Überschuss und Prämieneinnahme eintreten. Für das zweite und die folgenden Jahre sind die jährlichen Überschüsse und die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen grösser, die Dividendenreserven dagegen kleiner als nach der 7. Methode.

Bei der zweiten Berechnungsmethode des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung mittelst Nettoprämiens bei 12½ % Zillmerung, liegen sämtliche Werte zwischen denen nach der 1. und 7. Methode, nähern sich aber für die ersten zwei Dritt-

teile der Versicherungsjahre mehr den Zahlen nach der 1. Methode.

Die 6. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen zweiter Ordnung mittelst den tarifmässigen Bruttoträmen, stellt während der ganzen Versicherungsdauer die niedrigsten Deckungskapitalien zurück. Der Überschuss des ersten Versicherungsjahres ist ein sehr hoher, während die folgenden Versicherungsjahre nur Überschüsse in der Höhe der Inkassoprovisionen auf den Dividenden geben. Eine Gesellschaft, welche ihre Deckungskapitalien nach der 6. Methode berechnet, wird somit ihre Überschüsse hauptsächlich im ersten Versicherungsjahr erzielen, während die mehr als ein Jahr alten Versicherungen nur unwesentliche Beiträge zum Überschuss liefern. Das Verhältnis des Überschusses zur Prämienannahme wird deshalb grossen Schwankungen unterworfen sein und wesentlich von dem Verhältnis des Neuzuganges zum Versicherungsbestand abhängig sein. Findet ein Neuzugang nicht statt, so wird der Überschuss nur ganz unbedeutend ausfallen. Nach dem ersten Versicherungsjahr sind die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen sehr klein, während die Überschussreserven vom Ende des 1. Jahres an höhere Werte als nach irgendeiner der andern Methoden erreichen.

Bei der 4. und 5. Berechnungsmethode des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung mittelst tarifmässigen Bruttoträmen oder mittelst um die Verwaltungskostenträmen gekürzten Bruttoträmen, sind sämtliche Werte zwischen denen nach der 6. und 7. Methode gelegen. Die Deckungskapitalien, die jährlichen Überschüsse und die Barwerte der Einnahmen sind grösser als nach der 6. und kleiner als nach der

7. Methode, die Überschussreserven sind kleiner als nach der 6., grösser als nach der 7. Methode.

Die nach der 8. und 9. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung mit Hülfe der Bruttoprämiendifferenzen ermittelten Werte, zeigen einen Verlauf, der zum Teil ganz verschieden von dem Verlauf ist, den die nach der 1. bis 3. und der 7. Methode berechneten Werte aufweisen.

Die nach der 7. Methode, nach den Grundlagen zweiter Ordnung und mittelst Nettoprämiien berechneten Deckungskapitalien sind genügend hoch, um, in Verbindung mit den künftigen Einnahmen an Nettoprämiien, die sämtlichen Ausgaben für Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten zu decken. Demnach können die Deckungskapitalien nach der 7. Methode als Normal-Deckungskapitalien betrachtet werden. Diesen Werten gegenüber sind die Deckungskapitalien nach der 1. und 2. Methode zu gross, nach der 4. bis 6. Methode zu klein, nach der 8. und 9. Methode für etwa die ersten $\frac{4}{5}$ der Versicherungsjahre zu gross, später zu klein, während die Werte nach der 3. Methode bald etwas grösser, bald etwas kleiner als nach der 7. Methode sind. Ebenso sind die Überschussreserven nach der 7. Methode genügend hoch, um, in Verbindung mit den künftigen Einnahmen an Prämienzuschlägen, die künftigen Ausgaben an Dividenden decken zu können, so dass diese als Normalwerte für die Dividendenreserve anzusehen sind. Die Vergleichung mit den nach den übrigen Methoden berechneten Dividendenreserven zeigt, dass die Reserven nach der 1. und 2. Methode kleiner, nach der 4. bis 6. Methode grösser, nach der 8. und 9. Methode bis zum 19. Versicherungsjahr kleiner, später

grösser, nach der 3. Methode bald etwas grösser, bald etwas kleiner sind. Aus diesem zwischen den Deckungskapitalien und den Überschussreserven bestehenden Verhältnis geht deutlich hervor, dass bei der 1. und 2. Methode, sowie bei der 8. und 9. Methode während den ersten $\frac{4}{5}$ der Versicherungsjahre, alljährlich aus den zu hohen Deckungskapitalien bestimmte Teile an den Überschuss abgegeben werden, während umgekehrt bei der 4. bis 6. Methode, sowie bei der 8. und 9. Methode für den Rest der Versicherungsdauer, die zu niedrigen Deckungskapitalien aus den zu hohen Überschussreserven zu ergänzen sind.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, dass die Berechnung des Deckungskapitals nach der 4. bis 6. Methode, bei denen Bruttoprämien zur Verwendung gelangen, für die praktische Anwendung in keiner Weise zu empfehlen sind. Die Berechnungsmethoden des Deckungskapitals nach der 1. und 2. Methode, bei denen mit Nettoprämiien gerechnet wird, genügen der Forderung der gleichbleibenden Überschüsse ebenfalls nicht, trotzdem die 1. Methode in der Praxis fast ausschliesslich benutzt wird. Von der 8. und 9. Berechnungsmethode, welchen die Bruttoprämiendifferenzen als Grundlage dienen, gilt ebenfalls das von den zwei ersten Methoden Gesagte. Die günstigsten Resultate weist in jeder Beziehung die 7. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen zweiter Ordnung mittelst Nettoprämiien auf, indem sie die Konstanz der Überschüsse gewährleistet, vorausgesetzt, dass die theoretischen Annahmen über die Sterblichkeit, den Zinsfuss, den Abgang bei Lebzeiten und die Höhe der Verwaltungskosten in Wirklichkeit zutreffen. Bei der Berechnung des Deckungskapitals nach der 3. Methode, wobei Nettoprämiien und eine

Zillmerung von 30 ‰ zur Anwendung kommen, ergeben sich Resultate, die von denen nach der 7. Methode nur unwesentlich abweichen.

2. Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen.

Wir haben bei den Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen den Nachweis geleistet, dass die Differenz zwischen dem Deckungskapital und dem Barwert der künftigen Einnahmen an Überschüssen von der Berechnungsweise des Deckungskapitals unabhängig, und gleich dem nach den Grundlagen zweiter Ordnung mittelst der Bruttoprämie berechneten Deckungskapital ist. Demnach möchte es gleichgültig erscheinen, nach welchen Grundlagen das Deckungskapital berechnet wird. Die Resultate der Tabelle 16, in welcher die jährlichen Überschüsse bei verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals gegeben sind, sagen uns aber, dass die jährlichen Ergebnisse der Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen stark durch die eingesetzten Deckungskapitalien beeinflusst werden.

Bei den Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen sollte man erwarten, dass die einzelnen Versicherungsjahre weder Gewinn noch Verlust aufweisen. Dies ist aber nur bei der 6. Berechnungsweise des Deckungskapitals, nach den Grundlagen zweiter Ordnung mittelst der ausreichenden Bruttoprämie der Fall, indem die jährlichen Überschüsse und die Barwerte der künftigen Einnahmen durchgehends gleich Null sind.

Die 3. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung mittelst Nettoprämiens bei 30 ‰ Zillmerung, gibt ähnliche Resultate wie die 6. Methode. Die Deckungskapitalien sind nur unbedeutend von denen nach der 6. Methode abweichend, die jährlichen Überschüsse sind nur wenig

von 0 verschieden, und ebenso zeigen die Barwerte der künftigen Überschüsse nur geringe Abweichungen von Null.

Bei der ersten Methode der Berechnung des Deckungskapitals, der sogenannten Nettomethode, ergibt das erste Versicherungsjahr einen erheblichen Verlust, während die folgenden Versicherungsjahre dagegen mässige Überschüsse abwerfen. Bei einer Gesellschaft, welche im Verhältnis zum bisherigen Bestand, viele neue Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen abschliesst, kann deshalb diese Abteilung einen Verlust abwerfen, selbst dann, wenn die Sterblichkeit derselben günstig verlaufen ist. Die Deckungskapitalien sind nach dieser Methode grösser als nach der 6. Methode, die Barwerte der künftigen Überschüsse und damit die Barwerte der einzustellenden Verluste sind namentlich am Anfang der Versicherung ziemlich beträchtlich, indem sie am Ende des ersten Jahres den Betrag einer Prämie erreichen.

Die zweite Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung mittelst Nettoprämiien bei $12\frac{1}{2}\%$ Zillmerung, gibt Resultate, welche zwischen denen nach der 1. und 6. Methode liegen, sich aber gegen den Ablauf der Versicherung hin mehr den Werten nach der ersten Methode nähern.

Die 4. und 5. Berechnungsmethode des Deckungskapitals geben von Anfang an sehr hohe Deckungskapitalien, welche während der ganzen Versicherungsdauer höher als nach einer der übrigen Methoden bleiben. Entsprechend den anfänglich hoch eingesetzten Deckungskapitalien gibt das erste Versicherungsjahr starke Verluste, während die übrigen Versicherungsjahre dagegen ansehnliche Überschüsse liefern. Es können deshalb die Versicherungen ohne Anteil an den

Überschüssen, bei einer im Verhältnis zum Bestand grossen Zahl von neuen Versicherungen, trotz normaler Sterblichkeit, während einer Reihe von Jahren beständig Verluste abwerfen. Die Barwerte der Überschüsse sind vom Ende des 1. Versicherungsjahres an sehr hoch, und zwar viel höher als nach einer der übrigen Methoden. Dementsprechend sind auch die zu deckenden Verluste vom Ende des 1. Jahres an sehr hoch.

Nach der 7. und 8. Berechnungsmethode des Deckungskapitals ergeben sich durchgehends grössere Deckungskapitalien als nach der 6. Methode; der jährliche Überschuss ist für das 1. und 24. Versicherungsjahr negativ, für die übrigen Versicherungsjahre positiv, die Barwerte der Einnahmen an Überschüssen sind überall hoch, und dementsprechend sind auch die Verluste recht kräftig.

Die 6. Berechnungsmethode des Deckungskapitals, nach den Grundlagen zweiter Ordnung mittelst Bruttoprämiens, stellt Deckungskapitalien zurück, welche gerade hinreichen, um, in Verbindung mit den künftigen Einnahmen an Prämien, die gesamten Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten zu decken. Es sind dies somit wieder Normal-Deckungskapitalien. Die 1., 2., 4., 5., 7. und 8. Methode stellen höhere Deckungskapitalien zurück, während die 3. Methode bald etwas grössere, bald etwas kleinere Deckungskapitalien vorsieht. Nach der 6. Methode geben die einzelnen Versicherungsjahre bei normalem Verlauf weder Überschüsse noch Verluste; nach den übrigen Methoden, mit Ausnahme der 3., sind dagegen recht erhebliche Verluste in Aussicht zu nehmen. Hieraus ist ersichtlich, dass bei allen Berechnungsmethoden, mit Ausnahme der 3. und 6., alljährlich aus den zu hohen Deckungskapitalien bedeutende Be-

träge zur Deckung des Verlustes im 1. Jahre abgegeben werden müssen.

Aus diesen Ausführungen ist zu entnehmen, dass die 4. und 5. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung, wobei Bruttoprämien oder um die Verwaltungskostenprämien gekürzte Bruttoprämien zur Verwendung gelangen, in jeder Beziehung ungünstige Resultate ergeben, so dass deren Anwendung in der Praxis nicht zu empfehlen ist. Die 1. und 2. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen erster Ordnung mittelst Nettoprämien bei 0 \% und $12\frac{1}{2}\text{ \%}$ Zillme-
rung, sowie die 7. und 8. Methode der Berechnung, nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung mittelst der Bruttoprämiendifferenzen, genügen der Forderung, dass die einzelnen Versicherungsjahre weder Überschüsse noch Verluste ergeben dürfen, ebenfalls nicht, wenn sie auch nicht so ungünstige Resultate wie die 4. und 5. Methode aufweisen. Bei der 6. Methode der Berechnung des Deckungskapitals, nach den Grundlagen zweiter Ordnung mittelst der ausreichenden Bruttoprämie, ergeben sich dagegen weder Überschüsse noch Verluste, so dass bei deren Anwendung in der Tat von einer Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen gesprochen werden kann. Die 3. Methode der Berechnung weist nur wenig von der 6. Methode abweichende Resultate auf.

Zürich, Juli 1916.

Tab. 1.

Reduktionsfaktoren für das Eintrittsalter 30.

Alter	Reduktionsfaktoren								
30	0,5601	42	0,5931	54	0,7297	66	0,8770	78	0,9292
31	0,5621	43	0,5990	55	0,7456	67	0,8845	79	0,9309
32	0,5641	44	0,6059	56	0,7618	68	0,8914	80	0,9325
33	0,5660	45	0,6138	57	0,7774	69	0,8976	81	0,9340
34	0,5679	46	0,6228	58	0,7922	70	0,9031	82	0,9354
35	0,5699	47	0,6329	59	0,8058	71	0,9080	83	0,9367
36	0,5720	48	0,6442	60	0,8184	72	0,9124	84	0,9380
37	0,5743	49	0,6565	61	0,8301	73	0,9163	85	0,9392
38	0,5769	50	0,6698	62	0,8409	74	0,9197	86	0,9404
39	0,5800	51	0,6840	63	0,8509	75	0,9226	87	0,9415
40	0,5837	52	0,6988	64	0,8602	76	0,9251	88	0,9426
41	0,5880	53	0,7141	65	0,8689	77	0,9273	89	0,9438

Tab. 2. Reduzierte Selektionstafel von Gotha für das Eintrittsalter 30.

Erreichtes Alter	Sterblichkeit in ‰	Anzahl der		Erreichtes Alter	Sterblichkeit in ‰	Anzahl der		Erreichtes Alter	Sterblichkeit in ‰	Anzahl der	
		Lebenden	Gestorbenen			Lebenden	Gestorbenen			Lebenden	Gestorbenen
30	1,714	981 570	1682	50	10,047	886 850	8 910	70	64,084	496 110	31 793
31	2,350	979 888	2303	51	11,081	877 940	9 728	71	69,725	464 317	32 375
32	2,753	977 585	2691	52	12,229	868 212	10 617	72	75,766	431 942	32 727
33	3,068	974 894	2991	53	13,504	857 595	11 581	73	82,366	399 215	32 882
34	3,294	971 903	3201	54	14,900	846 014	12 606	74	89,708	366 333	32 863
35	3,505	968 702	3395	55	16,455	833 408	13 714	75	97,925	333 470	32 655
36	3,792	965 307	3660	56	18,192	819 694	14 912	76	107,099	300 815	32 217
37	4,106	961 647	3949	57	20,111	804 782	16 185	77	117,201	268 598	31 480

	38	4,384	957 698	4199	58	22,182	788 597	17 493	78	128,025	237 118	30 357	
	39	4,692	953 499	4474	59	24,400	771 104	18 815	79	139,346	206 761	28 811	
	40	5,020	949 025	4764	60	26,721	752 289	20 102	80	150,953	177 950	26 862	
	41	5,351	944 261	5053	61	29,161	732 187	21 351	81	162,759	151 088	24 591	
	42	5,676	939 208	5331	62	31,752	710 836	22 570	82	174,948	126 497	22 130	
	43	6,008	933 877	5611	63	34,530	688 266	23 766	83	187,846	104 367	19 605	
	44	6,350	928 266	5894	64	37,591	664 500	24 979	84	201,980	84 762	17 120	249
	45	6,727	922 372	6205	65	41,003	639 521	26 222	85	217,697	67 642	14 726	
	46	7,175	916 167	6573	66	44,841	613 299	27 501	86	235,514	52 916	12 462	
	47	7,709	909 594	7012	67	49,099	585 798	28 762	87	255,457	40 454	10 334	
	48	8,362	902 582	7547	68	53,760	557 036	29 946	88	277,539	30 120	8 360	
18	49	9,145	895 035	8185	69	58,775	527 090	30 980	89	301,705	21 760	6 565	

Wahrscheinlichkeiten des Austretens
am Anfang und Ende der Versicherungsjahre in ‰,
Tab. 3. für das Eintrittsalter 30.

Nach Jahren	Wahrscheinlichkeiten des Austretens am		Nach Jahren	Wahrscheinlichkeiten des Austretens am	
	Anfang	Ende		Anfang	Ende
	der Jahre in ‰			der Jahre in ‰	
0	1,000	18,095	14	1,533	3,810
1	9,578	13,716	15	1,495	3,732
2	5,763	10,119	16	1,464	3,662
3	3,820	8,063	17	1,436	3,591
4	2,961	6,983	18	1,409	3,519
5	2,536	6,248	19	1,381	3,448
6	2,267	5,644	20	1,352	3,383
7	2,068	5,176	21	1,328	3,330
8	1,926	4,806	22	1,308	3,285
9	1,828	4,528	23	1,291	3,253
10	1,752	4,317	24	1,277	3,226
11	1,688	4,151	25	1,265	3,205
12	1,630	4,016	26	1,255	3,185
13	1,578	3,903	27	1,247	3,166

Nach Jahren	Wahrscheinlichkeiten des Austretens am		Nach Jahren	Wahrscheinlichkeiten des Austretens am	
	Anfang	Ende		Anfang	Ende
	der Jahre in ‰			der Jahre in ‰	
28	1,240	3,148	44	1,558	4,138
29	1,233	3,132	45	1,624	4,312
30	1,227	3,118	46	1,693	4,485
31	1,222	3,107	47	1,761	4,652
32	1,218	3,102	48	1,827	4,811
33	1,216	3,107	49	1,890	4,964
34	1,218	3,133	50	1,950	5,111
35	1,228	3,179	51	2,007	5,256
36	1,247	3,246	52	2,065	5,398
37	1,273	3,327	53	2,121	5,530
38	1,305	3,417	54	2,173	5,647
39	1,340	3,505	55	2,220	5,752
40	1,375	3,594	56	2,261	5,857
41	1,410	3,694	57	2,302	5,974
42	1,449	3,820	58	2,349	6,107
43	1,499	3,970	59	2,401	6,250

Tab. 4. Dekremententafel der Lebenden für das Eintrittsalter 30.

Nach Jahren	Erreichtes Alter	Anzahl der					Nach Jahren	Erreichtes Alter	Anzahl der				
		Lebenden am Anfang der Jahre	Austretenden am Anfang der Jahre	Gestorbenen im Laufe der Jahre	Austretenden am Ende der Jahre	Austretenden überhaupt			Lebenden am Anfang der Jahre	Austretenden am Anfang der Jahre	Gestorbenen im Laufe der Jahre	Austretenden am Ende der Jahre	Austretenden überhaupt
0	30	1 000 000	1000	1 712	18 046	19 046	30	60	617 265	757	16 474	1871	2628
1	31	979 242	9379	2 279	13 272	22 651	31	61	598 163	731	17 422	1802	2533
2	32	954 312	5500	2 612	9 574	15 074	32	62	578 208	704	18 337	1735	2439
3	33	936 626	3578	2 862	7 501	11 079	33	63	557 432	678	19 225	1670	2348
4	34	922 685	2732	3 030	6 403	9 135	34	64	535 859	653	20 119	1614	2267
5	35	910 520	2309	3 183	5 654	7 963	35	65	513 473	631	21 028	1563	2194
6	36	899 374	2039	3 402	5 046	7 085	36	66	490 251	611	21 956	1518	2129
7	37	888 887	1838	3 643	4 572	6 410	37	67	466 166	593	22 859	1473	2066
8	38	878 834	1693	3 846	4 197	5 890	38	68	441 241	576	23 690	1425	2001
9	39	869 098	1589	4 070	3 910	5 499	39	69	415 550	557	24 391	1369	1926
10	40	859 529	1506	4 307	3 686	5 192	40	70	389 233	535	24 909	1308	1843

11	41	850 030	1435	4 541	3 504	4 939	41	71	362 481	511	25 239	1244	1755
12	42	840 550	1370	4 764	3 351	4 721	42	72	335 487	486	25 382	1182	1668
13	43	831 065	1311	4 986	3 219	4 530	43	73	308 437	462	25 367	1122	1584
14	44	821 549	1259	5 209	3 105	4 364	44	74	281 486	438	25 212	1059	1497
15	45	811 976	1214	5 454	3 005	4 219	45	75	254 777	414	24 909	989	1403
16	46	802 303	1175	5 748	2 912	4 087	46	76	228 465	387	24 427	913	1300
17	47	792 468	1138	6 100	2 820	3 958	47	77	202 738	357	23 719	831	1188
18	48	782 410	1102	6 533	2 727	3 829	48	78	177 831	325	22 725	745	1070
19	49	772 048	1066	7 051	2 634	3 700	49	79	154 036	291	21 424	657	948
20	50	761 297	1029	7 638	2 546	3 575	50	80	131 664	257	19 836	570	827
21	51	750 084	996	8 301	2 467	3 463	51	81	111 001	222,8	18 030,1	487,5	710,3
22	52	738 320	966	9 017	2 393	3 359	52	82	92 260,6	190,5	16 107,5	410,0	600,5
23	53	725 944	937	9 791	2 327	3 264	53	83	75 552,6	160,3	14 162,2	338,6	498,9
24	54	712 889	910	10 609	2 263	3 173	54	84	60 891,5	132,3	12 272,2	273,8	406,1
25	55	699 107	884	11 489	2 201	3 085	55	85	48 213,2	107,0	10 472,6	216,5	323,5
26	56	684 533	859	12 437	2 138	2 997	56	86	37 417,1	84,6	8 792,4	167,1	251,7
27	57	669 099	834	13 440	2 073	2 907	57	87	28 373,0	65,3	7 231,4	125,9	191,2
28	58	652 752	809	14 461	2 007	2 816	58	88	20 950,4	49,2	5 800,9	92,2	141,4
29	59	635 475	784	15 487	1 939	2 723	59	89	15 008,1	36,0	4 517,2	65,3	101,3

Diskontierte Zahlen und deren Summen für das Eintrittsalter 30
bei einer Versicherungsdauer von 25 Jahren.

Tab. 5.

Nach Jahren	Diskontierte Zahlen der Lebenden	Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden	Summe der Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden	Diskontierte Zahlen der Gestorbenen	Summe der diskontierten Zahlen der Gestorbenen	Diskontierte Zahlen der Ausgetretenen am Anfang der Jahre	Summe der diskontierten Zahlen der Ausgetretenen am Anfang der Jahre
t	D'_{x+t}	N'_{x+t}	S'_{x+t}	\bar{C}'_{x+t}	\bar{M}'_{x+t}	K^a_{x+t}	H^a_{x+t}
0	297 406	5 023 880	72 957 183	498,972	58 880,48	297,41	12 142,16
1	279 695	4 726 474	67 933 303	637,913	58 381,51	2 678,87	11 844,75
2	261 776	4 446 779	63 206 829	702,159	57 743,60	1 508,70	9 165,89
3	246 746	4 185 003	58 760 050	738,885	57 041,44	942,594	7 657,188
4	233 444	3 938 257	54 575 047	751,268	56 302,56	691,210	6 714,594
5	221 240	3 704 813	50 636 790	757,938	55 551,29	561,046	6 023,383
6	209 875	3 483 572	46 931 977	777,994	54 793,35	475,813	5 462,337
7	199 210	3 273 698	43 448 405	800,103	54 015,36	411,917	4 986,524
8	189 154	3 074 488	40 174 707	811,225	53 215,25	364,390	4 574,607
9	179 648	2 885 333	37 100 219	824,463	52 404,03	328,457	4 210,217
10	170 632	2 705 685	34 214 886	837,909	51 579,56	298,968	3 881,760
11	162 061	2 535 053	31 509 200	848,435	50 741,66	273,587	3 582,792
12	153 905	2 372 992	28 974 147	854,838	49 893,22	250,848	3 309,205
13	146 140	2 219 087	26 601 155	859,229	49 038,38	230,535	3 058,357
14	138 744	2 072 947	24 382 067	862,097	48 179,15	212,620	2 827,822
15	131 694	1 934 204	22 309 120	866,886	47 317,06	196,899	2 615,201
16	124 971	1 802 509	20 374 917	877,422	46 450,17	183,024	2 418,303
17	118 548	1 677 539	18 572 407	894,266	45 572,75	170,238	2 235,279
18	112 407	1 558 990	16 894 869	919,802	44 678,48	158,322	2 065,041
19	106 524	1 446 583	15 335 879	953,405	43 758,68	147,083	1 906,719
20	100 880	1 340 059	13 889 296	991,862	42 805,28	136,353	1 759,636
21	95 456,2	1 239 179	12 549 237	1 035,25	41 813,41	126,752	1 623,283
22	90 236,8	1 143 723	11 310 058	1 080,00	40 778,16	118,064	1 496,532
23	85 209,4	1 053 486	10 166 335	1 126,25	39 698,16	109,983	1 378,468
24	80 362,1	968 276,7	9 112 848,8	1 172,00	38 571,91	102,582	1 268,486
25	75 686,4	887 914,6	8 144 572,1	1 218,93	37 399,91	95,7032	1 165,904

254

255

Diskontierte Zahlen und deren Summen für das Eintrittsalter 30
 Tab. 6. bei einer Versicherungsdauer von 25 Jahren.

Nach Jahren	w_{x+t}^a	W_{x+t}^a	$w_{x+t}^{''a}$	$W_{x+t}^{''a}$	Diskontierte Zahlen der ausgetretenen am Ende der Jahre	Diskontierter Betrag der am Ende der Jahre zu zahlenden Rückkaufentschädigungen	Summe der diskontierten Beträge der am Ende der Jahre zu zahlenden Rückkaufentschädigungen
					K_{x+t}^e	w_{x+t}^e	W_{x+t}^e
t							
0	.	1.649,918	.	6.191,541	5.154,37	.	4.390,073
1	.	1.649,918	.	6.191,541	3.640,62	.	4.390,073
2	55,631	1.649,918	1.131,523	6.191,541	2.522,19	142,044	4.390,073
3	53,084	1.594,287	706,946	5.060,018	1.897,79	145,172	4.248,029
4	52,874	1.541,202	518,408	4.353,072	1.555,82	151,547	4.102,857
5	54,650	1.488,328	420,785	3.834,665	1.319,40	157,111	3.951,310
6	56,659	1.433,678	356,860	3.413,880	1.130,87	160,083	3.794,199
7	58,310	1.377,019	308,938	3.057,020	984,047	162,256	3.634,115
8	60,083	1.318,709	273,292	2.748,082	867,548	164,034	3.471,859

— 256 —

9	62,104	1.258,626	246,343	2.474,790	776,205	166,252	3.307,825
10	64,034	1.196,522	224,226	2.228,447	702,748	168,833	3.141,574
11	65,729	1.132,488	205,191	2.004,221	641,584	171,488	2.972,741
12	67,049	1.066,759	188,136	1.799,031	589,262	174,062	2.801,253
13	68,098	999,711	172,901	1.610,895	543,626	176,476	2.627,191
14	69,023	931,613	159,465	1.437,994	503,600	178,818	2.450,715
15	69,915	862,590	147,674	1.278,528	468,073	183,488	2.271,897
16	71,747	792,676	139,098	1.130,854	435,618	197,615	2.088,409
17	77,227	720,929	137,893	991,756	405,143	208,794	1.890,794
18	81,592	643,702	134,574	853,863	376,261	221,696	1.682,000
19	86,662	562,110	132,374	719,290	349,032	233,869	1.460,303
20	91,363	475,447	129,535	586,915	324,006	245,715	1.226,435
21	96,124	384,084	126,752	457,380	301,515	245,454	980,719
22	96,112	287,959	118,064	330,628	280,884	245,124	735,266
23	95,980	191,847	109,983	212,565	262,316	245,146	490,142
24	95,867	95,867	102,582	102,582	244,996	244,996	244,996

— 257 —

Barwerte für die nach 25 Jahren fällige gemischte Versicherung
des 30 Jahre alt Eingetretenen.

Tab. 7.

Nach Jahren	Prämie 1, jährlich vorschuss- weise zahlbar	Barwert der						Zahlung 1 an die am Anfang der Jahre Aus- tretenden	
		Versiche- rungssumme 1 für gemischte Versicherung fällige im Alter 55	Rückkaufssummen für die			am Anfang der Jahre aus- tretenden Versicherungen	am Ende der Jahre Aus- tretenden		
			mit		Anteil an den Überschüssen				
			$A'_{x+t: \bar{n-t}}$	$A'^{ra}_{x+t: \bar{n-t}}$	$A^{ra}_{x+t: \bar{n-t}}$	$A^e_{x+t: \bar{n-t}}$	$A^a_{x+t: \bar{n-t}}$		
t	$a'_{x+t: \bar{n-t}}$								
0	13,9068	0,326.715	0,005.548	0,020.818	0,006.401	0,006.166	0,014.761	0,036.907	
1	13,7241	0,345.619	0,005.899	0,022.137	0,006.806	0,006.556	0,015.696	0,038.180	
2	13,5951	0,366.841	0,006.303	0,023.652	0,007.272	0,007.005	0,016.770	0,030.560	
3	13,3623	0,386.340	0,006.461	0,020.507	0,007.302	0,007.070	0,017.216	0,026.308	
4	13,0667	0,405.189	0,006.602	0,018.647	0,007.366	0,007.156	0,017.575	0,023.769	
5	12,7323	0,424.144	0,006.727	0,017.333	0,007.437	0,007.242	0,017.860	0,021.956	
6	12,3677	0,443.502	0,006.831	0,016.266	0,007.498	0,007.314	0,018.078	0,020.471	

— 258 —

7	11,9762	0,463.340	0,006.912	0,015.346	0,007.541	0,007.368	0,018.243	0,019.179
8	11,5597	0,483.741	0,006.972	0,014.528	0,007.567	0,007.403	0,018.355	0,018.021
9	11,1185	0,504.822	0,007.006	0,013.776	0,007.571	0,007.415	0,018.413	0,016.946
10	10,6532	0,526.666	0,007.012	0,013.060	0,007.547	0,007.400	0,018.411	0,015.916
11	10,1637	0,549.349	0,006.988	0,012.367	0,007.495	0,007.355	0,018.343	0,014.913
12	9,6493	0,572.949	0,006.931	0,011.689	0,007.410	0,007.278	0,018.201	0,013.926
13	9,1089	0,597.542	0,006.841	0,011.023	0,007.292	0,007.168	0,017.977	0,012.950
14	8,5412	0,623.205	0,006.715	0,010.364	0,007.139	0,007.022	0,017.664	0,011.978
15	7,9448	0,650.016	0,006.550	0,009.708	0,006.948	0,006.838	0,017.251	0,011.005
16	7,3185	0,678.053	0,006.343	0,009.049	0,006.714	0,006.612	0,016.711	0,010.022
17	6,6608	0,707.383	0,006.081	0,008.366	0,006.424	0,006.330	0,015.950	0,009.020
18	5,9700	0,738.076	0,005.727	0,007.596	0,006.038	0,005.952	0,014.963	0,007.999
19	5,2445	0,770.202	0,005.277	0,006.752	0,005.553	0,005.477	0,013.709	0,006.954
20	4,4820	0,803.847	0,004.713	0,005.818	0,004.951	0,004.886	0,012.157	0,005.886
21	3,6798	0,839.127	0,004.024	0,004.792	0,004.220	0,004.166	0,010.274	0,004.792
22	2,8349	0,876.190	0,003.191	0,003.664	0,003.341	0,003.300	0,008.148	0,003.664
23	1,9431	0,915.212	0,002.251	0,002.495	0,002.354	0,002.326	0,005.752	0,002.495
24	1,0000	0,956.401	0,001.193	0,001.276	0,001.245	0,001.231	0,003.049	0,001.276
25		1,000.000						

— 259 —

Barwerte für die nach 25 Jahren fällige gemischte Versicherung mit Anteil an den Überschüssen des

Tab. 8. 30 Jahre alt Eingetretenen.

Nach Jahren <i>t</i>	Barwert der Ausgaben an Dividenden vom 6. Jahre an im Betrage		
	der Prämie 1. System <i>A</i>	der Prämien- summe 1. System <i>B</i>	des Deckungs- kapitals für die Versicherungs- summe 1. System <i>C</i>
0	9,7260	127,4140	4,145.44
1	10,3419	135,4822	4,407.94
2	11,0498	144,7561	4,709.67
3	11,7229	153,5734	4,996.54
4	12,3909	162,3244	5,281.26
5	13,0744	171,2785	5,572.58
6	12,7283	175,2832	5,737.45
7	12,3562	178,3457	5,877.33
8	11,9599	180,4545	5,991.00
9	11,5398	181,5799	6,076.53
10	11,0967	181,6994	6,132.20
11	10,6307	180,7798	6,155.82
12	10,1411	178,7771	6,144.73

Nach Jahren <i>t</i>	Barwert der Ausgaben an Dividenden vom 6. Jahre an im Betrage		
	der Prämie 1. System <i>A</i>	der Prämien- summe 1. System <i>B</i>	des Deckungs- kapitals für die Versicherungs- summe 1. System <i>C</i> .
13	9,6268	175,6386	6,095 91
14	9,0867	171,3090	6,006.04
15	8,5195	165,7291	5,871.51
16	7,9241	158,8389	5,688.51
17	7,2992	150,5769	5,452.93
18	6,6434	140,8749	5,160.20
19	5,9550	129,6607	4,805.38
20	5,2323	116,8526	4,382.96
21	4,4727	102,3554	3,886.59
22	3,6736	86,0610	3,309.16
23	2,8314	67,8407	2,642.31
24	1,9418	47,5454	1,876.36
25	1,0000	25,0000	1,000.00

Deckungskapital nach 9 verschiedenen Berechnungsmethoden für die gemischte
Versicherung mit Anteil an den Überschüssen.

Tab. 9. Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Nach Jahren	Deckungskapital für die Versicherungssumme 10 000 berechnet nach der Methode								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an								als Barwert der Differenzen der Bruttoprämienv., nach den Grundlagen
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten			
	und der künftigen Einnahmen an								
	Nettoprämienv.			Brutto- prämienv. ohne prämienv. mit	Netto- prämienv.	Brutto- prämienv.	Netto- prämienv.	erster	zweiter
	ohne Zillmerung	mit 12 $\frac{1}{2}$ % Zillmerung	mit 30% Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen zweiter Ordnung		Ordnung	
	nach den Grundlagen erster Ordnung								
	0	0,00	(— 125,00)	(— 300,00)	(— 1.425,96)	(— 695,23)	(— 1.536,51)	0,00	0,00
1	241,39	119,41	— 51,37	— 1.150,15	— 437,05	— 1.556,18	— 39,86	254,95	234,70
2	491,65	372,79	+ 206,40	— 864,21	— 169,40	— 1.279,19	+ 222,88	519,43	486,14
3	750,90	635,29	473,43	— 567,98	+ 107,88	— 990,52	485,83	792,58	749,53
4	1.019,94	907,69	750,54	— 260,59	395,62	— 684,96	758,73	1.074,14	1.023,08
5	1.298,76	1.189,99	1.037,72	+ 57,99	693,82	— 364,23	1.042,52	1.364,35	1.306,83

6	1.587,71	1.482,55	1.335,34	388,14	1.002,86	— 28,70	1.337,77	1.663,72	1.601,10
7	1.887,44	1.786,03	1.644,06	730,62	1.323,43	+ 321,14	1.644,35	1.972,68	1.906,27
8	2.198,48	2.100,96	1.964,44	1.086,02	1.656,10	685,48	1.962,67	2.291,46	2.222,52
9	2.521,04	2.427,55	2.296,67	1.454,56	2.001,08	1.065,29	2.293,73	2.619,87	2.549,47
10	2.855,80	2.766,50	2.641,48	1.837,07	2.359,12	1.461,06	2.638,09	2.956,77	2.886,08
11	3.203,29	3.118,33	2.999,39	2.234,11	2.730,77	1.873,47	2.996,42	3.306,72	3.236,80
12	3.563,85	3.483,39	3.370,76	2.646,07	3.116,39	2.303,48	3.369,60	3.666,77	3.598,47
13	3.938,52	3.862,76	3.756,68	3.074,18	3.517,11	2.752,23	3.758,64	4.037,71	3.971,79
14	4.328,37	4.257,48	4.158,23	3.519,62	3.934,07	3.220,82	4.164,51	4.421,70	4.358,78
15	4.734,39	4.668,57	4.576,42	3.983,53	4.368,31	3.710,47	4.588,26	4.819,38	4.759,83
16	5.157,99	5.097,46	5.012,73	4.467,53	4.821,36	4.222,10	5.030,69	5.225,97	5.170,43
17	5.600,53	5.545,53	5.468,54	4.973,18	5.294,66	4.755,87	5.491,80	5.643,72	5.593,11
18	6.063,04	6.013,83	5.944,93	5.501,64	5.789,33	5.312,65	5.972,26	6.069,26	6.024,45
19	6.546,77	6.503,60	6.443,17	6.054,35	6.306,69	5.893,37	6.472,82	6.501,30	6.463,16
20	7.053,15	7.016,32	6.964,75	6.632,94	6.848,28	6.499,26	6.994,46	6.923,71	6.893,18
21	7.583,67	7.553,47	7.511,19	7.239,12	7.415,69	7.132,01	7.538,59	7.338,60	7.315,66
22	8.140,69	8.117,45	8.084,91	7.875,56	8.011,43	7.795,04	8.108,26	7.982,71	7.966,99
23	8.726,88	8.710,97	8.688,69	8.545,34	8.638,37	8.491,71	8.706,39	8.616,85	8.608,80
24	9.345,42	9.337,23	9.325,78	9.252,08	9.299,91	9.225,36	9.335,85	9.389,00	9.389,00
25	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00

262

263

Jährlicher Überschuss für die gemischte Versicherung mit Anteil an den Überschüssen, für 3 verschiedene Überschusssysteme und nach 7 Berechnungsarten des Deckungskapitals.

Tab. 10.

Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Für das Jahr	Jährlicher Überschuss für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode						
	1	2	3	4	5	6	7
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an						
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufsummen und Verwaltungskosten	
	und der künftigen Einnahmen an						
	Nettoprämien			Bruttoprämien ohne	Nettoprämien mit	Brutto-prämien	Netto-prämien
	ohne Zillmerung	mit 12½ % Zillmerung	mit 30 % Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen zweiter Ordnung	
nach den Grundlagen erster Ordnung							

Überschusssystem A der gleichbleibenden Dividende.

1	— 160,37	— 40,92	126,31	1.202,29	504,—	1.599,90	115,04
2	+ 145,97	+ 134,79	119,13	18,37	83,76	0,00	115,04
3	134,73	124,44	110,04	17,39	77,52	0,00	115,04
4	133,74	123,93	110,21	21,91	79,22	0,00	115,04
5	134,17	124,62	111,25	25,23	81,05	0,00	115,04

6	138,33	128,94	115,80	31,26	86,12	3,36	118,40
7	138,40	129,13	116,15	32,68	86,86	3,36	118,40
8	138,37	129,20	116,35	33,72	87,35	3,36	118,40
9	139,15	130,06	117,34	35,46	88,60	3,36	118,40
10	139,76	130,74	118,10	36,81	89,57	3,36	118,40
11	140,51	131,54	118,99	38,22	90,64	3,36	118,40
12	141,73	132,82	120,35	40,10	92,18	3,36	118,40
13	142,80	133,94	121,54	41,76	93,54	3,36	118,40
14	143,72	134,91	122,57	43,21	94,72	3,36	118,40
15	144,60	135,83	123,56	44,59	95,84	3,36	118,40
16	144,78	136,05	123,83	45,18	96,22	3,36	118,40
17	143,55	134,84	122,66	44,27	95,15	3,36	118,40
18	141,98	133,31	121,17	43,03	93,74	3,36	118,40
19	139,96	131,31	119,20	41,30	91,86	3,36	118,40
20	137,52	128,90	116,82	39,15	89,56	3,36	118,40
21	135,09	126,49	114,46	37,03	87,28	3,36	118,40
22	133,42	124,85	112,84	35,62	85,74	3,36	118,40
23	132,03	123,48	111,50	34,46	84,46	3,36	118,40
24	130,33	121,80	109,85	32,97	82,86	3,36	118,40
25	128,36	119,84	107,91	31,17	80,98	3,36	118,40

264

265

Jährlicher Überschuss für die gemischte Versicherung mit Anteil an den Überschüssen,
für 3 verschiedene Überschusssysteme und nach 9 verschiedenen Berechnungsarten
des Deckungskapitals.

Tab. 10 (Fortsetzung).

Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Für das Jahr	Jährlicher Überschuss für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9				
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an							als Barwert der Differenzen der Brutto-prämien, nach den Grundlagen					
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten			268				
	und der künftigen Einnahmen an												
	Nettoprämiens			Brutto-prämiens ohne	Nettoprämiens mit	Brutto-prämiens	Nettoprämiens	erster	zweiter				
	ohne Zillmerung	mit 12½% Zillmerung	mit 30% Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen		zweiter Ordnung					
	nach den Grundlagen erster Ordnung				Ordnung								
<i>Überschusssystem B der im Verhältnis der Prämiensumme steigenden Dividende.</i>													
1	— 160,37	— 40,92	126,31	1.202,29	504,—	1.599,90	115,04	— 173,64	— 153,81				
2	+ 145,97	+ 134,79	119,13	18,37	83,76	0,00	115,04	+ 133,02	+ 144,37				
3	134,73	124,44	110,04	17,39	77,52	0,00	115,04	122,75	130,35				
4	133,74	123,93	110,21	21,91	79,22	0,00	115,04	123,74	129,21				
5	134,17	124,62	111,25	25,23	81,05	0,00	115,04	125,87	129,48				
6	136,25	126,86	113,73	29,18	84,05	1,28	116,32	129,47	131,42				
7	136,58	127,31	114,34	30,86	85,04	1,54	116,58	131,48	131,91				
8	136,81	127,63	114,79	32,15	85,78	1,79	116,84	133,64	132,64				
9	137,85	128,76	116,03	34,15	87,29	2,05	117,09	136,92	134,76				
10	138,71	129,68	117,05	35,76	88,52	2,30	117,35	141,77	138,37				
11	139,71	130,75	118,19	37,43	89,84	2,56	117,60	142,55	138,10				
12	141,19	132,28	119,81	39,56	91,64	2,82	117,86	147,11	141,84				
13	142,52	133,66	121,26	41,48	93,26	3,07	118,12	151,62	145,68				
14	143,69	134,88	122,55	43,18	94,69	3,33	118,37	154,70	148,27				
15	144,83	136,06	123,79	44,82	96,07	3,58	118,63	158,01	151,34				
16	145,27	136,53	124,31	45,66	96,70	3,84	118,88	166,58	159,46				
17	144,29	135,59	123,40	45,01	95,89	4,10	119,14	172,42	164,57				
18	142,98	134,31	122,16	44,03	94,74	4,35	119,40	181,82	173,37				
19	141,21	132,56	120,45	42,55	93,11	4,61	119,65	192,55	183,52				
20	139,03	130,41	118,33	40,66	91,07	4,86	119,91	219,33	209,72				
21	136,85	128,26	116,22	38,80	89,05	5,12	120,16	243,53	234,36				
22	135,44	126,87	114,86	37,64	87,76	5,38	120,42	35,77	27,34				
23	134,31	125,75	113,78	36,74	86,74	5,63	120,68	+ 77,99	+ 69,55				
24	132,87	124,33	112,38	35,50	85,40	5,89	120,93	— 24,49	— 32,88				
25	131,15	122,63	110,70	33,96	83,77	6,14	121,19	+ 176,53	+ 176,53				

Tab. 10 (Fortsetzung).

Für das Jahr	Jährlicher Überschuss für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode								
	1	2	3	4	5	6	7		
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an								
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufsummen und Verwaltungskosten			
	und der künftigen Einnahmen an								
	Nettoprämiens			Brutto- prämiens ohne	Nettoprämiens mit	Brutto- prämiens	Netto- prämiens		
	ohne Zillmerung	mit 12½ % Zillmerung	mit 30 % Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen zweiter Ordnung			
nach den Grundlagen erster Ordnung							268		
<i>Überschusssystem C der im Verhältnis des Deckungskapitals steigenden Dividende.</i>									
1	— 160,37	— 40,92	126,31	1.202,29	504,—	1.599,90	115,04		
2	— 145,97	— 134,79	119,13	18,37	83,76	0,00	115,04		
3	134,73	124,44	110,04	17,39	77,52	0,00	115,04		
4	133,74	123,93	110,21	21,91	79,22	0,00	115,04		
5	134,17	124,62	111,25	25,23	81,05	0,00	115,04		
6	135,99	126,61	113,47	28,92	83,79	1,02	116,07		
7	136,29	127,02	114,05	30,58	84,75	1,25	116,29		
8	136,50	127,33	114,48	31,85	85,48	1,48	116,53		
9	137,53	128,44	115,71	33,83	86,97	1,73	116,77		
10	138,39	129,36	116,73	35,44	88,20	1,98	117,03		
11	139,40	130,43	117,88	37,12	89,53	2,25	117,29		
12	140,89	131,98	119,51	39,26	91,34	2,52	117,56		
13	142,25	133,39	120,99	41,21	92,99	2,80	117,85		
14	143,46	134,65	122,32	42,95	94,46	3,10	118,14		
15	144,65	135,88	123,61	44,64	95,89	3,40	118,45		
16	145,15	136,42	124,20	45,55	96,59	3,72	118,77		
17	144,25	135,55	123,36	44,97	95,85	4,06	119,10		
18	143,04	134,36	122,22	44,08	94,79	4,41	119,45		
19	141,37	132,72	120,62	42,71	93,27	4,77	119,81		
20	139,32	130,69	118,62	40,94	91,35	5,15	120,19		
21	137,28	128,69	116,65	39,22	89,47	5,55	120,59		
22	136,03	127,46	115,45	38,23	88,35	5,97	121,01		
23	135,08	126,53	114,55	37,51	87,51	6,40	121,45		
24	133,84	125,31	113,36	36,48	86,37	6,86	121,91		
25	132,36	123,84	111,91	35,17	84,97	7,35	122,40		

Barwert der Einnahmen an Überschüssen für die gemischte Versicherung mit Anteil an den Überschüssen, für 3 verschiedene Überschussysteme und nach 7 Berechnungsarten des Deckungskapitals.

Tab. 11.

Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Barwert der Einnahmen an Überschüssen für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode										
	1	2	3	4	5	6	7			
Nach Jahren	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an									
	Versicherungssummen						Versicherungssummen, Rückkaufsummen und Verwaltungskosten			
	und der künftigen Einnahmen an									
	Nettoprämien			Bruttoprämien ohne	Nettoprämien mit	Brutto- prämien	Netto- prämien			
t	ohne Zillmerung	mit 12½ % Zillmerung	mit 30 % Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen zweiter Ordnung				
	nach den Grundlagen erster Ordnung									
Überschusssystem A der gleichbleibenden Dividende.										
0	1.567,04	1.567,04	1.567,04	1.567,04	1.567,04	1.567,04	1.567,04			
1	1.830,03	1.708,05	1.537,27	438,49	1.151,58	32,45	1.548,78			
2	1.805,51	1.686,66	1.520,26	449,65	1.144,46	34,67	1.536,75			
3	1.778,21	1.662,60	1.500,74	459,33	1.135,19	36,79	1.513,14			
4	1.743,78	1.631,53	1.474,38	463,26	1.119,46	38,88	1.482,58			
5	1.704,01	1.595,25	1.442,98	463,25	1.099,98	41,03	1.447,78			
6	1.656,25	1.551,10	1.403,88	456,69	1.071,41	39,85	1.406,31			
7	1.604,89	1.503,49	1.361,52	448,07	1.040,88	38,59	1.361,80			
8	1.550,26	1.452,74	1.316,21	437,79	1.007,87	37,25	1.314,44			
9	1.491,57	1.398,09	1.267,21	425,10	971,62	35,83	1.264,27			
10	1.429,08	1.339,77	1.214,75	410,34	932,39	34,33	1.211,36			
11	1.362,58	1.277,62	1.158,68	393,39	890,05	32,75	1.155,70			
12	1.291,46	1.211,01	1.098,37	373,69	844,00	31,09	1.097,21			
13	1.215,65	1.139,88	1.033,80	351,30	794,24	29,35	1.035,76			
14	1.135,07	1.064,18	964,92	326,32	740,77	27,52	971,21			
15	1.049,53	983,71	891,56	298,67	683,45	25,60	903,40			
16	959,47	898,94	814,21	269,01	622,84	23,58	832,18			
17	866,12	811,12	734,13	238,77	560,25	21,46	757,38			
18	769,63	720,41	651,52	208,23	495,92	19,24	678,85			
19	670,29	627,13	566,70	177,88	430,22	16,90	596,35			
20	568,34	531,50	479,93	148,13	363,46	14,44	509,65			
21	463,52	433,31	391,03	118,96	295,53	11,86	418,43			
22	354,78	331,54	299,00	89,65	225,52	9,13	322,35			
23	241,44	225,52	203,24	59,89	152,92	6,26	220,95			
24	123,28	115,09	103,64	29,94	77,77	3,22	113,71			

Tab. 11 (Fortsetzung).

		Barwert der Einnahmen an Überschüssen für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9					
Nach Jahren	t	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an							als Barwert der Differenzen der Bruttoprämien, nach den Grundlagen						
		Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten								
		und der künftigen Einnahmen an													
		Nettoprämiens			Bruttoprä- mien ohne	Nettoprä- mien mit	Brutto- prämien	Netto- prämien	erster	zweiter					
		ohne Zillmerung	mit 12 ^{1/2} % Zillmerung	mit 30 % Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen zweiter Ordnung		Ordnung						
		nach den Grundlagen erster Ordnung													
<i>Überschusssystem B der im Verhältnis der Prämiensumme steigenden Dividende.</i>															
0	1.566,28	1.566,28	1.566,28	1.566,28	1.566,28	1.566,28	1.566,28	1.566,28	1.566,28	1.566,28					
1	1.829,22	1.707,24	1.536,47	437,68	1.150,78	31,65	1.547,97	1.842,78	1.822,53						
2	1.804,65	1.685,79	1.519,40	448,79	1.143,60	33,81	1.535,88	1.832,43	1.799,14						
3	1.777,30	1.661,68	1.499,83	458,41	1.134,28	35,87	1.512,22	1.818,97	1.775,92						
4	1.742,82	1.630,56	1.473,41	462,29	1.118,50	37,92	1.481,61	1.797,01	1.745,96						
5	1.702,99	1.594,23	1.441,96	462,23	1.098,06	40,01	1.446,76	1.768,59	1.711,06						
6	1.657,28	1.552,13	1.404,91	457,72	1.072,43	40,88	1.407,84	1.733,29	1.670,67						
7	1.607,81	1.506,41	1.364,44	450,99	1.043,81	41,51	1.364,72	1.693,05	1.626,64						
8	1.554,91	1.457,39	1.320,87	442,45	1.012,53	41,91	1.319,10	1.647,89	1.578,95						
9	1.497,80	1.404,31	1.273,43	431,33	977,84	42,05	1.270,50	1.596,63	1.526,23						
10	1.436,69	1.347,39	1.222,37	417,96	940,01	41,95	1.218,98	1.537,66	1.466,97						
11	1.371,40	1.286,44	1.167,50	402,21	898,87	41,58	1.164,53	1.474,83	1.404,91						
12	1.301,29	1.220,84	1.108,21	383,52	853,84	40,93	1.107,05	1.404,22	1.335,92						
13	1.226,29	1.150,53	1.044,45	361,95	804,88	40,00	1.046,41	1.325,48	1.259,56						
14	1.146,31	1.075,42	976,17	337,56	752,01	38,76	982,45	1.239,65	1.176,72						
15	1.061,14	995,32	903,17	310,28	695,06	37,21	915,01	1.146,13	1.086,58						
16	971,21	910,69	825,95	280,76	634,58	35,33	843,92	1.039,20	983,66						
17	877,75	822,76	745,76	250,40	571,88	33,10	769,02	920,94	870,34						
18	780,89	731,67	662,78	219,49	507,18	30,50	690,11	787,10	742,29						
19	680,90	637,74	577,31	188,49	440,83	27,51	606,96	635,44	597,30						
20	578,01	541,18	489,61	157,80	373,14	24,12	519,32	448,57	418,04						
21	471,95	441,75	399,46	127,39	303,96	20,29	426,87	226,88	203,93						
22	361,65	338,41	305,87	96,52	232,39	16,00	329,22	203,67	187,95						
23	246,39	230,48	208,20	64,85	157,88	11,22	225,91	136,37	128,31						
24	125,96	117,77	106,82	32,61	80,45	5,90	116,39	169,54	169,54						

Tab. 11 (Fortsetzung).

Barwerte der Ausgaben an Dividenden für die gemischte Versicherung 10 000
mit Anteil an den Überschüssen.

Tab. 12. Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Nach Jahren <i>t</i>	Barwert der Ausgaben an Dividenden vom 6. Jahre an für die Versicherungssumme 10 000					
	von 1 %			von ψ_{vn} %		
	der Prämie. System A	der Prämien- summe. System B	des Deckungs- kapitals. System C	der Prämie. System A	der Prämien- summe. System B	des Deckungs- kapitals. System C
0	39,8535	522,092	414,544	1.567,04	1.566,28	1.565,91
1	42,3771	555,152	440,794	1.666,26	1.665,46	1.665,07
2	45,2779	593,153	470,967	1.780,32	1.779,46	1.779,04
3	48,0358	629,283	499,654	1.888,76	1.887,85	1.887,41
4	50,7730	665,141	528,126	1.996,39	1.995,42	1.994,96
5	53,5737	701,831	557,258	2.106,51	2.105,49	2.105,00
6	52,1555	718,241	573,745	2.050,75	2.154,72	2.167,28
7	50,6306	730,790	587,733	1.990,79	2.192,37	2.220,12
8	49,0068	739,431	599,100	1.926,94	2.218,29	2.263,06
9	47,2855	744,042	607,653	1.859,26	2.232,13	2.295,36
10	45,4700	744,532	613,220	1.787,88	2.233,60	2.316,39
11	43,5605	740,764	615,582	1.712,79	2.222,29	2.325,32
12	41,5541	732,558	614,473	1.633,90	2.197,67	2.321,13
13	39,4467	719,697	609,591	1.551,04	2.159,09	2.302,68
14	37,2336	701,956	600,604	1.464,02	2.105,87	2.268,74
15	34,9097	679,092	587,151	1.372,64	2.037,28	2.217,92
16	32,4699	650,859	568,851	1.276,71	1.952,58	2.148,79
17	29,9093	617,004	545,293	1.176,03	1.851,01	2.059,80
18	27,2219	577,249	516,020	1.070,36	1.731,75	1.949,23
19	24,4013	531,298	480,538	959,46	1.593,89	1.815,20
20	21,4398	478,816	438,296	843,01	1.436,45	1.655,63
21	18,3275	419,412	388,659	720,64	1.258,24	1.468,13
22	15,0530	352,644	330,916	591,88	1.057,93	1.250,01
23	11,6018	277,984	264,231	456,18	833,95	998,11
24	7,9568	194,822	187,636	312,86	584,47	708,78
25	4,0976	102,440	100,000	161,12	307,32	377,74

Überschussreserve für die gemischte Versicherung mit Anteil an den Überschüssen,
für 3 verschiedene Überschusssysteme und nach 7 Berechnungsarten des Deckungskapitals.

Tab. 13. Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Nach Jahren <i>t</i>	Überschussreserve für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode										
	1	2	3	4	5	6	7				
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an										
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten					
	und der künftigen Einnahmen an										
	Nettoprämien			Bruttoprämien ohne	Nettoprämien mit	Brutto- prämien	Netto- prämien				
	ohne Zillmerung	mit 12 $\frac{1}{2}$ % Zillmerung	mit 30% Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen zweiter Ordnung					
nach den Grundlagen erster Ordnung											
<i>Überschusssystem A der gleichbleibenden Dividende.</i>											
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00				
1	— 163,77	— 41,78	128,99	1.227,77	514,68	1.633,81	117,48				
2	— 25,19	+ 93,67	260,06	1.330,67	635,86	1.745,65	243,57				
3	+ 110,55	226,16	388,02	1.429,44	753,57	1.851,98	375,63				
4	252,61	364,86	522,01	1.533,13	876,93	1.957,51	513,81				
5	402,50	511,27	663,54	1.643,26	1.007,43	2.065,49	658,74				
6	394,49	499,65	646,86	1.594,06	979,34	2.010,90	644,44				
7	385,90	487,31	629,28	1.542,72	949,91	1.952,20	628,99				
8	376,68	474,20	610,73	1.489,15	919,07	1.889,69	612,50				
9	367,69	461,17	592,06	1.434,16	887,65	1.823,43	594,99				
10	358,80	448,10	573,13	1.377,54	855,49	1.753,55	576,52				
11	350,22	435,18	554,12	1.319,40	822,74	1.680,04	557,09				
12	342,45	422,90	535,53	1.260,22	789,91	1.602,81	536,69				
13	335,39	411,16	517,24	1.199,74	756,80	1.521,69	515,28				
14	328,95	399,84	499,10	1.137,70	723,26	1.436,50	492,82				
15	323,12	388,94	481,09	1.073,98	689,20	1.347,04	469,25				
16	317,24	377,77	462,50	1.007,70	653,87	1.253,13	444,54				
17	309,91	364,91	441,90	937,26	615,78	1.154,57	418,64				
18	300,74	349,95	418,84	862,13	574,44	1.051,12	391,51				
19	289,16	332,33	392,76	781,58	529,24	942,56	363,11				
20	274,67	311,51	363,08	694,88	479,55	828,57	333,37				
21	257,12	287,32	329,61	601,68	425,11	708,78	302,20				
22	237,10	260,34	292,88	502,23	366,36	582,75	269,53				
23	214,75	230,66	252,94	396,29	303,26	449,92	235,23				
24	189,58	197,77	209,22	282,92	235,09	309,64	199,15				
25	161,12	161,12	161,12	161,12	161,12	161,12	161,12				

Tab. 13 (Fortsetzung).

Überschusssystem B der im Verhältnis der Prämiensumme steigenden Dividende.

0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	— 163,77	— 41,78	128,99	1.227,77	514,68	1.633,81	117,48	— 177,32	— 157,07
2	— 25,19	+ 93,67	260,06	1.330,67	635,86	1.745,65	243,57	— 52,97	— 19,69
3	+ 110,55	226,16	388,02	1.429,44	753,57	1.851,98	375,63	68,88	111,93
4	252,61	364,86	522,01	1.533,13	876,93	1.957,51	513,81	198,41	249,46
5	402,50	511,27	663,54	1.643,26	1.007,43	2.065,49	658,74	336,90	394,43

Tab. 13 (Fortsetzung).

Nach Jahren <i>t</i>	Überschussreserve für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode							
	1	2	3	4	5	6	7	
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an							
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkauffsummen und Verwaltungskosten		
und der künftigen Einnahmen an								
	Nettoprämien			Brutto- prämien ohne	Nettoprämien mit	Brutto- prämien	Netto- prämien	
	ohne Zillmerung	mit 12 $\frac{1}{2}$ % Zillmerung	mit 30% Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen zweiter Ordnung		
	nach den Grundlagen erster Ordnung							
<i>Überschusssystem C der im Verhältnis des Deckungskapitals steigenden Dividende.</i>								
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
1	— 163,77	— 41,78	128,99	1.227,77	514,68	1.633,81	117,48	
2	— 25,19	+ 93,67	260,06	1.330,67	635,86	1.745,65	243,57	
3	+ 110,55	226,16	388,02	1.429,44	753,57	1.851,98	375,63	
4	252,61	364,86	522,01	1.533,13	876,93	1.957,51	513,81	
5	402,50	511,27	663,54	1.643,26	1.007,43	2.065,49	658,74	
6	510,26	615,41	762,63	1.709,82	1.095,10	2.126,66	760,20	
7	612,29	713,69	855,66	1.769,11	1.176,29	2.178,59	855,38	
8	707,81	805,33	941,86	1.820,28	1.250,19	2.220,82	943,62	
9	796,89	890,38	1.021,26	1.863,37	1.316,85	2.252,64	1.024,20	
10	878,67	967,97	1.092,99	1.897,40	1.375,35	2.273,42	1.096,38	
11	952,51	1.037,47	1.156,41	1.921,70	1.425,04	2.282,34	1.159,39	
12	1.018,06	1.098,51	1.211,14	1.935,83	1.465,52	2.278,42	1.212,30	
13	1.074,25	1.150,02	1.256,09	1.938,59	1.495,66	2.260,54	1.254,13	
14	1.119,93	1.190,83	1.290,08	1.928,69	1.514,24	2.227,48	1.283,80	
15	1.153,98	1.219,80	1.311,95	1.904,84	1.520,06	2.177,90	1.300,11	
16	1.174,51	1.235,03	1.319,77	1.864,96	1.511,14	2.110,39	1.301,80	
17	1.178,78	1.233,77	1.310,76	1.806,13	1.484,64	2.023,43	1.287,51	
18	1.164,94	1.214,15	1.283,05	1.726,34	1.438,65	1.915,33	1.255,72	
19	1.130,87	1.174,03	1.234,47	1.623,29	1.370,95	1.784,26	1.204,81	
20	1.074,29	1.111,13	1.162,70	1.494,50	1.279,17	1.628,19	1.132,98	
21	993,10	1.023,30	1.065,59	1.337,66	1.161,09	1.444,76	1.038,19	
22	885,70	908,94	941,48	1.150,83	1.014,96	1.231,35	918,14	
23	749,69	765,60	787,88	931,23	838,20	984,86	770,17	
24	581,67	589,85	601,30	675,01	627,17	701,72	591,23	
25	377,74	377,74	377,74	377,74	377,74	377,74	377,74	

Betrag des Versicherungsfonds,
Überschussreserve mehr Deckungskapital,
für die gemischte Versicherung mit Anteil an den
Überschüssen für 3 verschiedene Überschusssysteme.

Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Tab. 14.

Nach Jahren <i>t</i>	Versicherungsfonds für die Versicherungssumme 10.000 nach System		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
0	0,00	0,00	0,00
1	77,63	77,63	77,63
2	466,46	466,46	466,46
3	861,45	861,45	861,45
4	1.272,55	1.272,55	1.272,55
5	1.701,26	1.701,26	1.701,26
6	1.982,20	2.085,15	2.097,96
7	2.273,34	2.472,00	2.499,73
8	2.575,17	2.861,86	2.906,29
9	2.888,72	3.255,36	3.317,93
10	3.214,60	3.652,71	3.734,47
11	3.553,51	4.054,18	4.155,80
12	3.906,29	4.460,22	4.581,90

Nach Jahren <i>t</i>	Versicherungsfonds für die Versicherungssumme 10.000 nach System		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
13	4.273,92	4.871,32	5.012,77
14	4.657,32	5.287,93	5.448,31
15	5.057,51	5.710,53	5.888,37
16	5.475,23	6.139,35	6.332,49
17	5.910,44	6.573,79	6.779,30
18	6.363,78	7.013,90	7.227,98
19	6.835,93	7.459,76	7.677,64
20	7.327,83	7.911,59	8.127,44
21	7.840,79	8.369,96	8.576,77
22	8.377,79	8.836,97	9.026,39
23	8.941,62	9.314,44	9.476,57
24	9.535,00	9.803,93	9.927,08
25	10.161,12	10.307,32	10.377,74

Deckungskapital nach 8 verschiedenen Berechnungsmethoden für die gemischte Versicherung
ohne Anteil an den Überschüssen.

Tab. 15. Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Nach Jahren	Deckungskapital für die Versicherungssumme 10 000 berechnet nach der Methode							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an							
	Versicherungssummen						Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten	
	und der künftigen Einnahmen an							
	Nettoprämi en			Bruttoprä- mien ohne	Nettoprä- mien mit	Brutto- prämi en, nach den Grundlagen zweiter Ordnung	erster	zweiter
	ohne Zillmerung	mit 12½% Zillmerung	mit 30% Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten			Ordnung	
	nach den Grundlagen erster Ordnung							
0	0,00	(— 125,00)	(— 300,00)	(296,48)	(992,76)	0,00	0,00	0,00
1	241,39	119,41	— 51,37	530,71	1.210,19	— 42,26	240,72	221,60
2	491,65	372,79	+ 206,40	773,55	1.435,60	+ 220,31	492,37	460,82
3	750,90	635,29	473,43	1.025,12	1.669,12	483,60	754,17	713,21
4	1.019,94	907,69	750,54	1.286,18	1.911,45	756,72	1.025,99	977,22
5	1.298,76	1.189,99	1.037,72	1.556,73	2.162,59	1.040,65	1.308,25	1.253,09
6	1.587,71	1.482,55	1.335,34	1.837,11	2.422,85	1.336,01	1.601,64	1.541,35
7	1.887,44	1.786,03	1.644,06	2.127,96	2.692,83	1.642,70	1.906,82	1.842,62
8	2.198,48	2.100,96	1.964,44	2.429,78	2.972,99	1.961,11	2.224,23	2.157,32
9	2.521,04	2.427,55	2.296,67	2.742,77	3.263,52	2.292,25	2.553,88	2.485,25
10	2.855,80	2.766,50	2.641,48	3.067,61	3.565,05	2.636,69	2.894,79	2.825,58
11	3.203,29	3.118,33	2.999,39	3.404,80	3.878,04	2.995,09	3.251,87	3.183,10
12	3.563,85	3.483,39	3.370,76	3.754,66	4.202,80	3.368,35	3.622,17	3.554,71
13	3.938,52	3.862,76	3.756,68	4.118,23	4.540,29	3.757,45	4.007,10	3.941,68
14	4.328,37	4.257,48	4.158,23	4.496,53	4.891,43	4.163,40	4.409,76	4.347,00
15	4.734,39	4.668,57	4.576,42	4.890,50	5.257,14	4.587,22	4.831,71	4.772,01
16	5.157,99	5.097,46	5.012,73	5.301,54	5.638,68	5.029,72	5.268,89	5.212,90
17	5.600,53	5.545,53	5.468,54	5.730,96	6.037,29	5.490,90	5.725,42	5.674,09
18	6.063,04	6.013,83	5.944,93	6.179,76	6.453,89	5.971,44	6.200,88	6.155,10
19	6.546,77	6.503,60	6.443,17	6.649,15	6.889,59	6.472,10	6.698,33	6.659,03
20	7.053,15	7.016,32	6.964,75	7.140,52	7.345,71	6.993,83	7.209,47	7.177,68
21	7.583,67	7.553,47	7.511,19	7.655,31	7.823,56	7.538,07	7.754,80	7.730,55
22	8.140,69	8.117,45	8.084,91	8.195,82	8.325,28	8.107,86	8.302,96	8.286,62
23	8.726,88	8.710,97	8.688,69	8.764,62	8.853,27	8.706,13	8.836,14	8.827,88
24	9.345,42	9.337,23	9.325,78	9.364,82	9.410,40	9.335,71	9.501,75	9.501,75
25	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00

Jährlicher Überschuss für die gemischte Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen,
nach 8 verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals.

Tab. 16.

Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Für das Jahr	Jährlicher Überschuss für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an							
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten		
	und der künftigen Einnahmen an							
	Nettoprämiens			Bruttoprä- mien ohne	Nettoprämiens mit	Bruttoprämiens, nach den Grundlagen	erster	zweiter
	ohne Zillmerung	mit 12 $\frac{1}{2}$ % Zillmerung	mit 30% Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		zweiter Ordnung		Ordnung
nach den Grundlagen erster Ordnung								
1	— 277,77	— 158,32	+ 8,91	— 561,08	— 1.226,46	0,00	— 277,11	— 258,39
2	+ 30,92	+ 19,74	+ 4,08	+ 57,45	+ 119,76	0,00	29,52	40,36
3	20,19	9,90	— 4,50	44,58	101,88	0,00	17,73	25,09
4	19,02	9,22	— 4,50	42,27	96,88	0,00	16,46	21,85
5	19,38	9,83	— 3,54	42,03	95,22	0,00	16,31	19,97

6	20,14	10,76	— 2,38	42,40	94,68	0,00	16,26	18,37
7	20,19	10,92	— 2,05	42,17	93,79	0,00	15,54	16,22
8	20,15	10,97	— 1,87	41,91	93,01	0,00	14,87	14,18
9	20,92	11,83	— 0,90	42,48	93,11	0,00	15,25	13,44
10	21,51	12,49	— 0,14	42,92	93,19	0,00	17,16	14,14
11	22,26	13,29	+ 0,74	43,52	93,47	0,00	14,81	10,75
12	23,47	14,56	+ 2,09	44,60	94,22	0,00	16,38	11,49
13	24,54	15,68	+ 3,28	45,54	94,88	0,00	17,46	11,89
14	25,45	16,64	+ 4,31	46,35	95,42	0,00	16,41	10,33
15	26,33	17,56	+ 5,29	47,12	95,95	0,00	14,88	8,54
16	26,51	17,78	+ 5,55	47,21	95,85	0,00	18,26	11,42
17	25,27	16,57	+ 4,39	45,91	94,39	0,00	17,38	9,79
18	23,71	15,04	+ 2,90	44,29	92,61	0,00	17,68	9,42
19	21,69	13,04	+ 0,94	42,20	90,38	0,00	15,66	6,77
20	19,26	10,64	— 1,44	39,71	87,75	0,00	22,93	13,36
21	16,83	8,24	— 3,80	37,22	85,10	0,00	10,99	1,79
22	15,17	6,50	— 5,41	35,50	83,26	0,00	33,63	24,47
23	13,78	5,22	— 6,75	34,06	81,70	0,00	+ 75,31	+ 66,42
24	12,08	3,55	— 8,40	32,32	79,87	0,00	— 27,67	— 36,27
25	10,11	1,59	— 10,34	30,31	77,77	0,00	+ 172,88	+ 172,88

Barwert der Einnahmen an Überschüssen für die gemischte Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen, nach 8 verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals.

Tab. 17. Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Nach Jahren	Barwert der Einnahmen an Überschüssen für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an							
	Versicherungssummen				Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten			
	und der künftigen Einnahmen an							
	Nettoprämien			Bruttoprämiens ohne	Nettoprämiens mit	Bruttoprämiens, nach den Grundlagen	erster	zweiter
	ohne Zillmerung	mit 12 $\frac{1}{2}$ %/oo Zillmerung	mit 30%/oo Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		zweiter Ordnung		Ordnung
	nach den Grundlagen erster Ordnung							
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	283,65	161,68	— 9,10	572,98	1.252,45	0,00	282,98	263,86
2	271,34	152,49	— 13,91	553,24	1.215,29	0,00	272,06	240,51
3	267,30	151,69	— 10,17	541,52	1.185,52	0,00	270,57	229,60
4	263,22	150,98	— 6,18	529,46	1.154,73	0,00	269,27	220,51
5	258,11	149,34	— 2,93	516,08	1.121,94	0,00	267,60	212,43
6	251,69	146,54	— 0,67	501,10	1.086,83	0,00	265,62	205,34
7	244,74	143,34	— 1,37	485,26	1.050,13	0,00	264,12	199,92
8	237,37	139,86	— 3,33	468,67	1.011,88	0,00	263,12	196,21
9	228,78	135,30	— 4,42	450,52	971,27	0,00	261,63	193,—
10	219,12	129,82	— 4,79	430,93	928,37	0,00	258,10	188,89
11	208,20	123,25	— 4,30	409,71	882,95	0,00	256,78	188,01
12	195,50	115,05	— 2,42	386,32	834,46	0,00	253,82	186,36
13	181,07	105,30	— 0,77	360,78	782,83	0,00	249,65	184,23
14	164,98	94,08	— 5,17	333,13	728,04	0,00	246,36	183,60
15	147,17	81,35	— 10,80	303,28	669,92	0,00	244,49	184,79
16	128,26	67,74	— 17,—	271,82	608,96	0,00	239,17	183,17
17	109,63	54,64	— 22,36	240,06	546,39	0,00	234,52	183,19
18	91,60	42,39	— 26,51	208,32	482,44	0,00	229,44	183,65
19	74,67	31,51	— 28,92	177,05	417,50	0,00	226,23	186,94
20	59,82	22,48	— 29,09	146,69	351,87	0,00	215,63	183,85
21	45,60	15,40	— 26,89	117,24	285,49	0,00	216,73	192,48
22	32,83	9,59	— 22,95	87,95	217,42	0,00	195,10	178,76
23	20,75	4,84	— 17,44	58,50	147,15	0,00	130,02	121,75
24	9,71	1,52	— 9,93	29,11	74,69	0,00	166,03	166,03

Verlust für die gemischte Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen,
nach 8 verschiedenen Berechnungsarten des Deckungskapitals.

Tab. 18. Eintrittsalter 30. Kapital fällig nach 25 Jahren.

Nach Jahren	Verlust für die Versicherungssumme 10 000, wenn das Deckungskapital berechnet wird nach der Methode								292				
	1	2	3	4	5	6	7	8					
	als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an												
	Versicherungssummen					Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten							
	und der künftigen Einnahmen an												
	Nettoprämien			Bruttoprä- mien ohne		Nettoprämien mit	Bruttoprämien, nach den Grundlagen zweiter Ordnung						
	ohne Zillmerung	mit 12 $\frac{1}{2}$ % Zillmerung	mit 30% Zillmerung	Verrechnung der Verwaltungskosten		nach den Grundlagen erster Ordnung							
	nach den Grundlagen erster Ordnung												
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00					
1	— 283,65	— 161,68	+ 9,10	— 572,98	— 1.252,45	0,00	— 282,98	— 263,86					
2	— 271,34	— 152,49	+ 13,91	— 553,24	— 1.215,29	0,00	— 272,06	— 240,51					
3	— 267,30	— 151,69	+ 10,17	— 541,52	— 1.185,52	0,00	— 270,57	— 229,60					
4	— 263,22	— 150,98	+ 6,18	— 529,46	— 1.154,73	0,00	— 269,27	— 220,51					
5	— 258,11	— 149,34	+ 2,93	— 516,08	— 1.121,94	0,00	— 267,60	— 212,43					
6	— 251,69	— 146,54	+ 0,67	— 501,10	— 1.086,83	0,00	— 265,62	— 205,34					
7	— 244,74	— 143,34	— 1,37	— 485,26	— 1.050,13	0,00	— 264,12	— 199,92					
8	— 237,37	— 139,86	— 3,33	— 468,67	— 1.011,88	0,00	— 263,12	— 196,21					
9	— 228,78	— 135,30	— 4,42	— 450,52	— 971,27	0,00	— 261,63	— 193,00					
10	— 219,12	— 129,82	— 4,79	— 430,93	— 928,37	0,00	— 258,10	— 188,89					
11	— 208,20	— 123,25	— 4,30	— 409,71	— 882,95	0,00	— 256,78	— 188,01					
12	— 195,50	— 115,05	— 2,42	— 386,32	— 834,46	0,00	— 253,82	— 186,36					
13	— 181,07	— 105,30	+ 0,77	— 360,78	— 782,83	0,00	— 249,65	— 184,23					
14	— 164,98	— 94,08	+ 5,17	— 333,13	— 728,04	0,00	— 246,36	— 183,60					
15	— 147,17	— 81,35	+ 10,80	— 303,28	— 669,92	0,00	— 244,49	— 184,79					
16	— 128,26	— 67,74	+ 17,—	— 271,82	— 608,96	0,00	— 239,17	— 183,17					
17	— 109,63	— 54,64	+ 22,36	— 240,06	— 546,39	0,00	— 234,52	— 183,19					
18	— 91,60	— 42,39	+ 26,51	— 208,32	— 482,44	0,00	— 229,44	— 183,65					
19	— 74,67	— 31,51	+ 28,92	— 177,05	— 417,50	0,00	— 226,23	— 186,94					
20	— 59,32	— 22,48	+ 29,09	— 146,69	— 351,87	0,00	— 215,63	— 183,85					
21	— 45,60	— 15,40	+ 26,89	— 117,24	— 285,49	0,00	— 216,73	— 192,48					
22	— 32,83	— 9,59	+ 22,95	— 87,95	— 217,42	0,00	— 195,10	— 178,76					
23	— 20,75	— 4,84	+ 17,44	— 58,50	— 147,15	0,00	— 130,02	— 121,75					
24	— 9,71	— 1,52	+ 9,93	— 29,11	— 74,69	0,00	— 166,03	— 166,03					

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung
Literatur
I. <i>Rechnungsgrundlagen für die Kapitalversicherungen auf den Todesfall</i>
1. Rechnungsgrundlagen erster Ordnung
2. Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung
II. <i>Berechnung verschiedener Barwerte am Ende des t. Versicherungsjahres nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der prospektiven Methode</i>
1. Barwert der künftigen Prämie 1 vorschussweise jährlich zahlbar
2. Barwert der künftig zahlbaren Versicherungssumme 1 bei der gemischten Versicherung
3. Barwert der künftigen Rückkaufssummen für die Versicherungssumme 1
4. Barwert der künftigen Inkassoprovisionen
5. Barwert der künftigen inneren Verwaltungskosten .
III. <i>Berechnung verschiedener Barwerte am Ende des t. Versicherungsjahres nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der retrospektiven Methode</i>
1. Barwert der bisherigen jährlich vorschussweise bezahlten Prämie 1
2. Barwert der einmaligen Prämie 1
3. Barwert der verausgabten Versicherungssummen im Betrage 1 bei der gemischten Versicherung
4. Barwert der verausgabten Rückkaufssummen für die Versicherungssumme 1
5. Barwert der verausgabten Inkassoprovisionen
6. Barwert der verausgabten inneren Verwaltungskosten .
IV. <i>Berechnung des theoretischen Überschusses einer Versicherung für ein Versicherungsjahr nach den Grundlagen zweiter Ordnung</i>
1. Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen .
2. Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen .

	Seite
<i>V. Berechnung der ausreichenden Prämien nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der prospektiven Methode</i>	133
1. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet	133
2. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet	141
3. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet	141
4. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf den Eintritt berechnet	146
5. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen	146
6. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen	152
<i>VI. Berechnung der ausreichenden Prämien nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der retrospektiven Methode</i>	153
1. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf das Ende des <i>n</i> . Jahres berechnet	153
2. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf das Ende des <i>n</i> . Jahres berechnet	155
3. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf das Ende des <i>n</i> . Jahres berechnet	156
4. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf das Ende des <i>n</i> . Jahres berechnet	158
5. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen	158
6. Berechnung der ausreichenden Prämien für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen	162

VII. Berechnung der theoretischen Überschussreserve für eine einzelne Versicherung auf Ende eines Versicherungsjahres, nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der prospektiven Methode

1. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet
2. Barwert der künftigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet
3. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet
4. Barwert der künftigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet
5. Berechnung der theoretischen Überschussreserve (Dividendenreserve) für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres
6. Berechnung des theoretischen Verlustes für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres

VIII. Berechnung der theoretischen Überschussreserve für eine einzelne Versicherung auf Ende eines Versicherungsjahres, nach den Grundlagen zweiter Ordnung nach der retrospektiven Methode

1. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet
2. Barwert der bisherigen theoretischen Einnahmen an Überschüssen für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet
3. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet

	Seite
4. Barwert der bisherigen theoretischen Ausgaben an Dividenden für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres berechnet	191
5. Berechnung der theoretischen Überschussreserve für eine einzelne Versicherung mit Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres	192
6. Berechnung des theoretischen Verlustes für eine einzelne Versicherung ohne Anteil an den Überschüssen auf Ende eines Versicherungsjahres	195
<i>Berechnung des Deckungskapitals nach 9 verschiedenen Grundlagen für die Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen</i>	<i>196</i>
1. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Nettoprämiens, nach den Grundlagen erster Ordnung	196
2. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Brutto- prämiens, resp. an Nettoprämiens mit Verrechnung der Verwaltungskosten, nach den Grundlagen erster Ordnung	202
3. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten und der künftigen Einnahmen an Brutto- resp. Nettoprämiens, nach den Grundlagen zweiter Ordnung	206
4. Berechnung des Deckungskapitals, als Barwert der Differenzen der Brutto- prämiens mit Anteil an den Überschüssen, nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung	222
<i>Berechnung des Deckungskapitals nach 8 verschiedenen Grundlagen für die Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen</i>	<i>226</i>
1. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Nettoprämiens, nach den Grundlagen erster Ordnung	227

2. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen und der künftigen Einnahmen an Brutto- prämien, resp. an Nettoprämi en mit Verrechnung der Verwaltungskosten, nach den Grundlagen erster Ordnung
3. Berechnung des Deckungskapitals, als Differenz der Barwerte der künftigen Ausgaben an Versicherungssummen, Rückkaufssummen und Verwaltungskosten und der künftigen Einnahmen an Brutto- prämien, nach den Grundlagen zweiter Ordnung
4. Berechnung des Deckungskapitals, als Barwert der Differenzen der Brutto- prämien ohne Anteil an den Überschüssen, nach den Grundlagen erster und zweiter Ordnung
XI. <i>Schlussbemerkungen</i>
1. Versicherungen mit Anteil an den Überschüssen
2. Versicherungen ohne Anteil an den Überschüssen
XII. <i>Tabellen</i>

