

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 11 (1916)

**Artikel:** Die Berechnung des jährlichen Risikos schwierigerer  
Versicherungsarten

**Autor:** Koeppler, Hans

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-550864>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die Berechnung des jährlichen Risikos schwierigerer Versicherungsarten.

Von **Hans Koepler**, Berlin.

---

### Vorwort.

Unter dem Titel „Risikoberechnungen bei mehr als zwei Ereignissen ein und desselben Zeitraumes“ hatte der Verfasser im 4. Hefte des 63. Bandes der Zeitschrift für Mathematik und Physik <sup>1)</sup> den in der vorliegenden Abhandlung bearbeiteten Gegenstand bereits veröffentlicht. Da aber die genannte Zeitschrift wohl nur von wenigen Versicherungsmathematikern gelesen wird, so dürfte eine Neubearbeitung in einer Fachzeitschrift nicht unzweckmässig erscheinen. Im Laufe der Zeit hat der Verfasser auch noch mehrere andere Darstellungen der bereits mitgeteilten Ergebnisse gefunden. Daher glaubt er, diese Neubearbeitung als weitere Beiträge zur Ermittlung des Risikos verwickelterer Versicherungsformen bezeichnen zu dürfen. Bei den gewählten Darstellungsweisen hatte der Verfasser nicht immer die mathematische Kürze allein im Auge, vielmehr leiteten ihn bei der Abfassung auch die geschichtliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie die Formenschönheit der Analysis.

---

<sup>1)</sup> Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1915.

## Erstes Kapitel.

### Das Risiko des einzelnen Vertrages.

Wir beschränken unsere Untersuchungen auf zwei Fälle.

#### Fall I.

Gegen Erlegung des Einsatzes oder der Prämie  $II$  und des bereits bestehenden Guthabens  $V$  des Spielers schliesst ein Unternehmer einen Vertrag ab, nach welchem er dem Spieler beim Eintritte des Ereignisses  $E_1$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_1$  ist, die Summe  $K$  auszahlt, hingegen die Beträge  $II$  und  $V$  einstreicht. Sollte ein anderes Ereignis  $E_2$  eintreffen, dessen Wahrscheinlichkeit  $p_2$  ist, so würde der Spieler sowohl den Einsatz  $II$  als auch sein Guthaben  $V$  verlieren. Das Stattfinden eines dritten Ereignisses  $E_3$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $p_3$  ist, hat zur Folge, dass der Spieler nur den Einsatz  $II$  verliert, das Anrecht auf das Guthaben  $V$  aber behält. Zwischen den Wahrscheinlichkeiten  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  bestehe die Beziehung

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Soll der Vertrag die Eigenschaften einer sogenannten gerechten Wette aufweisen, so muss die Verlust-  
erwartung des Unternehmers

$$H_1 = p_1 (K - V - II) \quad (1)$$

gleich sein seiner Gewinnerwartung

$$H_2 = p_2 (V + II) + p_3 II. \quad (2)$$

Hiernach besteht die Gleichung

$$p_2 (V + II) + p_3 II = p_1 (K - V - II), \quad (3)$$

aus welcher sich einerseits die Formel für den Einsatz ergibt

$$II = p_1(K - V) - p_2 V, \quad (4)$$

welche übereinstimmt mit der Formel für die aufgezinsten Risikoprämie, sofern man unter  $V$  die Reserve am Schlusse des Versicherungsjahres versteht.

Andererseits folgt aus (3) die Gewinn- und Verlustgleichung

$$p_1[-(K - V - II)] + p_2(V + II) + p_3 II = 0. \quad (5)$$

Als mittleres Risiko des beschriebenen Vertrages bezeichnen wir die Grösse

$$M = \sqrt{p_1(K - V - II)^2 + p_2(V + II)^2 + p_3 II^2}, \quad (6)$$

welche erhalten wird, wenn wir die Gewinn- und Verlustbeträge quadrieren und die mathematische Hoffnung der Quadrate radizieren.

Lösen wir die Quadrate des Radikanden auf, so können wir dem Ausdruck (6) auch die Formen geben

$$M = \sqrt{p_1(1 - p_1)(K - V)^2 + 2p_1p_2(K - V)V + p_2(1 - p_2)V^2} \quad (7)$$

und

$$M = \sqrt{p_1(K - V)^2 + p_2 V^2 - II^2}. \quad (8)$$

### Fall II.

Das Vorhandensein der drei Ereignisse  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  und das Bestehen der Gleichung ihrer Wahrscheinlichkeiten  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  vorausgesetzt, nehmen wir wieder an, dass der Spieler einen Einsatz oder eine Prämie  $II$  entrichten muss und bei dem Unternehmer das Guthaben  $V$  hat, dessen Besitz und Ver-



änderlichkeit von den Bestimmungen des Vertrages abhängen. Der letztere sei nun von der Beschaffenheit, dass der Spieler durch Eintritt des Ereignisses  $E_1$ , die Summe  $K_1$  gewinnt, indessen das Guthaben  $V$  und den Einsatz  $II$  verliert. In gleicher Weise soll er beim Eintreffen des Ereignisses  $E_2$  den Betrag  $K_2$  gewinnen, das Guthaben  $V$  und den Einsatz  $II$  aber wiederum einbüßen. Findet das Ereignis  $E_3$  statt, so verliert der Spieler nur den Einsatz  $II$ , während ihm das Guthaben  $V$  verbleibt. Damit auch dieser Vertrag die Eigenschaften einer gerechten Wette aufweise, muss wiederum die Verlusthoffnung des Unternehmers

$$H_1 = p_1(K_1 - V - II) + p_2(K_2 - V - II) \quad (9)$$

gleich sein seiner Gewinnhoffnung

$$H_2 = p_3 II, \quad (10)$$

woraus die Gleichung folgt

$$p_3 II = p_1(K_1 - V - II) + p_2(K_2 - V - II). \quad (11)$$

Aus dieser erhält man für den Einsatz die Formel

$$II = p_1(K_1 - V) + p_2(K_2 - V), \quad (12)$$

welche gleichbedeutend ist mit der Formel für die aufgezinsten Risikoprämie. Die Gewinn- und Verlustgleichung hat hier die Form

$$\begin{aligned} p_1[-(K_1 - V - II)] + p_2[-(K_2 - V - II)] \\ + p_3 II = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

und liefert für das mittlere Risiko die Formel

$$M_1 = \sqrt{p_1(K_1 - V - II)^2 + p_2(K_2 - V - II)^2 + p_3 II^2}. \quad (14)$$

Durch zweckmässige Umgestaltungen finden wir hieraus die weiteren Formen

$$M_1 = \sqrt{[p_1(1-p_1)(K_1-V)^2 + p_2(1-p_2)(K_2-V)^2 - 2p_1p_2(K_1-V)(K_2-V)]} \quad (15)$$

und

$$M_2 = \sqrt{p_1(K_1-V)^2 + p_2(K_2-V)^2 - H^2}. \quad (16)$$

Die Bezeichnung der Formeln (6) und (16) als mittleres Risiko wird durch die Fehlertheorie erhärtet. Die Risikoprämie oder der Einsatz  $H$  hat nämlich die Eigenschaft, die Funktionen

$$F(H) = p_1(K-V-H)^2 + p_2(V+H)^2 + p_3H^2$$

$$F_1(H) = p_1(K_1-V-H)^2 + p_2(K_2-V-H)^2 + p_3H^2$$

in bezug auf die in jedem der beiden Fälle einen anderen Wert vorstellende Grösse  $H$  zu kleinsten Werten zu machen. Differentiiert man beispielsweise die Funktion  $F(H)$  zweimal nach  $H$ , so ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichung (3)

$$F'(H) = -p_1(K-V-H) + p_2(V+H) + p_3H = 0$$

$$F''(H) = p_1 + p_2 + p_3 = 1, \text{ also } > 0.$$

Überdies erkennt man, dass die Funktionen  $F(H)$  und  $F_1(H)$  die Summen der mathematischen Hoffnungen der Quadrate der Ergebnisse sind, welche der Verlauf des betreffenden Spieles herbeiführen kann. Sie sind daher als die mittleren Werte der Quadrate der etwaigen Erfolge anzusehen.

Für den Fall  $V=0$  hat die Formeln (11) bis (16) bereits F. Hausdorff in seiner bekannten Abhandlung „Das Risiko bei Zufallsspielen“ (Berichte über die Verhandlungen der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 47. Band, 1897) mitgeteilt.

Zur Berechnung des mittleren Risikos kann man sich aber auch der Formel bedienen

$$M = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad (17)$$

in welcher die Grössen  $X_1$  und  $X_2$  bei der ersten Vertragsart aus den Proportionen

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1(K-V)}{X_1} &= \frac{X_1}{K-V-H} \\ \frac{p_2 V}{X_2} &= \frac{X_2}{V+H} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

zu bestimmen sind, hingegen bei der zweiten Vertragsart aus den Proportionen

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1(K_1-V)}{X_1} &= \frac{X_1}{K_1-V-H} \\ \frac{p_2(K_2-V)}{X_2} &= \frac{X_2}{K_2-V-H} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Aus (18) findet man

$$\left. \begin{aligned} X_1^2 &= p_1(1-p_1)(K-V)^2 + p_1 p_2 (K-V)V \\ X_2^2 &= p_1 p_2 (K-V)V + p_2(1-p_2)V^2 \end{aligned} \right\} \quad (18^a)$$

mithin ergibt die Formel (17) für diese Werte die Formel (7).

Aus (19) erhält man

$$\left. \begin{aligned} X_1^2 &= p_1(1-p_1)(K_1-V)^2 - p_1 p_2 (K_1-V)(K_2-V) \\ X_2^2 &= p_2(1-p_2)(K_2-V)^2 - p_1 p_2 (K_1-V)(K_2-V) \end{aligned} \right\} \quad (19^a)$$

Daher geht für diese Werte die Formel (17) in die Formel (15) über.

Hiernach kann man das mittlere Risiko dieser Vertragsarten auch darstellen als die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate zweier geometrischen Mittel, für deren Bestimmung die Eigenschaften dieser Verträge massgebend sind.

## Zweites Kapitel.

### Das Risiko $s$ gleichartiger Verträge.

#### 1. Das mathematische Risiko.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der Unternehmer  $s$  Verträge der ersten Art auf das Eintreffen des Ereignisses  $E_1$  abgeschlossen habe. Alsdann besteht für ihn die aus der Entwicklung des Polynomens

$$(p_1 + p_2 + p_3)^s$$

hervorgehende Wahrscheinlichkeit

$$P(s_1, s_2) = \frac{s!}{s_1! s_2! s_3!} p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3} \quad (1)$$

$$(s_1 + s_2 + s_3 = s)$$

in  $s_1$  Fällen den Schaden  $(K - V - II)$  zu erleiden, in  $s_2$  Fällen den Gewinn  $(V + II)$  und in  $s_3$  Fällen den Einsatz  $II$  zu gewinnen. Mit der Wahrscheinlichkeit (1) hat der Unternehmer daher die Gebarung

$$\begin{aligned} N(s_1, s_2) &= s_1(K - V - II) - s_2(V + II) - s_3 II \\ &= s_1(K - V) - s_2 V - s II \end{aligned} \quad (2)$$

zu erwarten, welche ein Gewinn ist, sofern die Ungleichung statthat

$$s_1(K - V) - s_2V < sH,$$

aber einen Verlust vorstellt, im Falle die Ungleichung besteht

$$s_1(K - V) - s_2V > sH.$$

Setzt man  $s_1 = sp_1 + \sigma_1$ ,  $s_2 = sp_2 + \sigma_2$ ,  $s_3 = sp_3 + \sigma_3$ , wobei wegen  $s_1 + s_2 + s_3 = s$ , ist  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ , so geht  $P(s_1, s_2)$  in  $P(\sigma_1, \sigma_2)$  über.

Für  $N(s_1, s_2)$  erhält man wegen  $H = p_1(K - V) - p_2V$ :

$$\begin{aligned} N(\sigma_1, \sigma_2) &= (sp_1 + \sigma_1)(K - V) - (sp_2 + \sigma_2)V - sH \\ &= \sigma_1(K - V) - \sigma_2V. \end{aligned} \quad (3)$$

Dieser Ausdruck gewährt einen vollständigen Einblick in das Risiko der beschriebenen Versicherungsart. Nimmt derselbe positive Werte an, so entsprechen denselben immer Verluste. Da aber  $N(\sigma_1, \sigma_2)$  auch noch grösser als null sein kann, wenn sowohl  $\sigma_1 < 0$  als auch  $\sigma_2 < 0$ , so erkennt man, dass beispielsweise ein Bestand gleichaltiger Invaliditätsrentenversicherungen noch verlustbringend sein kann, wenn nicht allein die Invalidität, sondern auch die Aktivensterblichkeit hinter der erwartungsmässigen Zahl zurückbleibt.

Nach Kanner versteht man nun unter der Verlusthoffnung oder dem mathematischen Risiko des Unternehmens den Ausdruck

$$R = \Sigma \Sigma P(\sigma_1, \sigma_2) [\sigma_1(K - V) - \sigma_2V], \quad (4)$$

in welchem gemäss der vorausgehenden Erörterungen die Summationen über alle jene Werte von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  zu erstrecken sind, welche der Ungleichung

$$\sigma_1 (K - V) - \sigma_2 V \geq 0$$

genügen. Die allgemeine Durchführung dieser Summenbildung ist ein sehr schwieriges Problem. Geht man aber von der diskreten zur kontinuierlichen Summe über und setzt die Grössen  $s_1, s_2, s_3$  also so gross voraus, um das Bernoullische Theorem anwenden zu können, so erhält man für das mathematische Risiko den Ausdruck

$$R = \iint P(\sigma_1, \sigma_2) [\sigma_1 (K - V) - \sigma_2 V] d\sigma_1 d\sigma_2. \quad (5)$$

Um die angedeuteten Integrationen ausführen zu können, ist es zunächst erforderlich, der Wahrscheinlichkeit

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{s!}{(sp_1 + \sigma_1)! (sp_2 + \sigma_2)! (sp_3 - \sigma_1 - \sigma_2)!} \\ p_1^{sp_1 + \sigma_1} p_2^{sp_2 + \sigma_2} p_3^{sp_3 - \sigma_1 - \sigma_2} \quad (1^a)$$

eine exponentielle Form zu geben. Dies ist durch Anwendung der Stirlingschen Formel leicht erreichbar; man findet vermöge bekannter Umformungen

$$P(\sigma_1, \sigma_2) \quad (1^b) \\ = \frac{1}{2\pi \sqrt{s^2 p_1 p_2 p_3}} e^{-\frac{1-p_2}{2sp_1 p_3} \sigma_1^2 - \frac{1-p_1}{2sp_2 p_3} \sigma_2^2 - \frac{1}{sp_3} \sigma_1 \sigma_2}$$

Diesen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit  $P(\sigma_1, \sigma_2)$  kann man aber noch durch verschiedene andere Näherungsmethoden herleiten, so z. B. durch ein Verfahren, welches jenem von I. J. Bienaymé im „mémoire sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés“ angewendeten nahe verwandt ist. Wir gehen von der erzeugenden Funktion aus

$$X = (p_1 e^{u_1 i} + p_2 e^{u_2 i} + p_3)^s$$

und entwickeln dieselbe in eine nach Potenzen der Zahl  $e$  fortschreitende Reihe. Das Ergebnis dieser Entwicklung sei

$$\Sigma P(s_1, s_2) e^{-(s_1 u_1 + s_2 u_2) i}$$

Um nun die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass das Ereignis  $E_1$   $s'_1$  mal und das Ereignis  $E_2$   $s'_2$  mal eintritt, bilden wir die Gleichung

$$\Sigma P(s_1, s_2) e^{(s_1 - s'_1) u_1 i + (s_2 - s'_2) u_2 i} = X e^{-(s'_1 u_1 + s'_2 u_2) i}$$

Integrieren wir diese sowohl nach  $u_1$  als nach  $u_2$  zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$ , so ergibt sich

$$P(s'_1, s'_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(s'_1 u_1 + s'_2 u_2) i} du_1 du_2 \quad (6)$$

als Ausdruck der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Für jede ganze Zahl  $a$  ist nämlich einerseits

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm a u i} du = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos au \pm i \sin au) du = \frac{2}{a} \sin a\pi = 0$$

und anderseits

$$\int_{-\pi}^{\pi} du = 2\pi, \text{ sowie } \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du_1 du_2 = (2\pi)^2.$$

Um aus der Wahrscheinlichkeit  $P(s'_1, s'_2)$  einen geeigneten Näherungsausdruck für die Wahrscheinlichkeit  $P(\sigma_1, \sigma_2)$  zu bekommen, führen wir zunächst die Werte ein

$$s'_1 = sp_1 + \sigma_1, \quad s'_2 = sp_2 + \sigma_2.$$

Weiterhin suchen wir nach einem Näherungsausdruck für  $X$ , indem wir in bekannter Weise setzen

$$\begin{aligned}
 X &= [p_1 (1 + u_1 i - \frac{1}{2} u_1^2 \dots) + p_2 (1 + u_2 i - \\
 &\quad - \frac{1}{2} u_2^2 \dots) + p_3]^s \\
 &= [1 + (p_1 u_1 + p_2 u_2) i - \frac{1}{2} (p_1 u_1^2 + p_2 u_2^2) - \dots]^s \\
 \ln X &= s \ln [1 + (p_1 u_1 + p_2 u_2) i - \frac{1}{2} (p_1 u_1^2 + p_2 u_2^2) - \dots] \\
 &= s (p_1 u_1 + p_2 u_2) i - \frac{1}{2} s p_1 (1 - p_1) u_1^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} s p_2 (1 - p_2) u_2^2 + s p_1 p_2 u_1 u_2 \\
 &= s (p_1 u_1 + p_2 u_2) i - \Omega(u_1, u_2).
 \end{aligned}$$

Wir kommen so zu der Näherungsformel

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\Omega(u_1, u_2) - (\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2) i} du_1 du_2. \quad (6^a)$$

In der Annahme, dass der Integrand bereits für mässige Werte von  $u_1$  und  $u_2$  eine sehr kleine Grösse ist, erweitern wir die Integralgrenzen bis  $-\infty$  und  $+\infty$ . Auf die dadurch entstehende Formel

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Omega(u_1, u_2) - (\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2) i} du_1 du_2 \quad (6^b)$$

wenden wir das Bienaymésche Verfahren an, welches für einen dem vorliegenden ähnlichen Fall bereits Laplace in der „Théorie analytique des probabilités“



mitgeteilt hat. Behufs Ausführung der Integration setzen wir

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} sp_1 (1 - p_1) u_1^2 + \frac{1}{2} sp_2 (1 - p_2) u_2^2 - sp_1 p_2 u_1 u_2 + \\
 & \quad + (\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2) i \\
 & = h_{11}^2 u_1^2 + (h_{12}^2 + h_{22}^2) u_2^2 + 2h_{11} h_{12} u_1 u_2 + \\
 & \quad + 2h_{11} t_1 u_1 i + 2(h_{12} t_1 + h_{22} t_2) u_2 i \\
 & = (h_{11} u_1 + h_{12} u_2 + t_1 i)^2 + (h_{22} u_2 + t_2 i)^2 + t_1^2 + t_2^2 \\
 & = v_1^2 + v_2^2 + t_1^2 + t_2^2
 \end{aligned}$$

und bedienen uns der Beziehung

$$du_1 du_2 = \frac{1}{\Delta} dv_1 dv_2,$$

wobei  $\Delta$  die Transformationsdeterminante ist, welche den Wert hat

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11} h_{22}.$$

Berücksichtigen wir dann noch die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi},$$

so finden wir

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2^2 \pi h_{11} h_{22}} e^{-t_1^2 - t_2^2}. \quad (7)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
 t_1^2 + t_2^2 &= \frac{\sigma_1^2}{4h_{11}^2} + \left( \frac{\sigma_2}{2h_{22}} - \frac{h_{12}}{2h_{11}h_{22}} \sigma_1 \right)^2 \\
 &= \frac{(h_{12}^2 + h_{22}^2) \sigma_1^2 - 2h_{11}h_{12}\sigma_1\sigma_2 + h_{11}^2\sigma_2^2}{4h_{11}^2h_{22}^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}sp_2(1-p_2)\sigma_1^2 + sp_1p_2\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}sp_1(1-p_1)\sigma_2^2}{4h_{11}^2h_{22}^2},
 \end{aligned}$$

sowie

$$h_{11}h_{22} = \frac{1}{4}sp_1p_2p_3,$$

daher ergibt sich auch auf diesem Wege die Formel (1<sup>b</sup>). Diese Formel weist folgende bemerkenswerte Eigenschaft auf:

Setzt man

$$\frac{1-p_2}{2sp_1p_3} = a_{11}, \quad \frac{1-p_1}{2sp_2p_3} = a_{22}, \quad \frac{1}{sp_3} = 2a_{12}$$

und trifft die Bestimmung, dass werden möge

$$K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} d\sigma_1 d\sigma_2 = 1,$$

so erhält man wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{\sqrt{D}}$$

und

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

für die Konstante

$$K = \frac{1}{\pi} \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

Setzt man für  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  und  $a_{12}$  die Werte, so ergibt sich in Übereinstimmung mit der Formel (1<sup>b</sup>)

$$K = \frac{1}{2\pi \sqrt{s^2 p_1 p_2 p_3}}.$$

Das Gesetz

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} e^{-a_{11} \sigma_1^2 - a_{22} \sigma_2^2 - 2a_{12} \sigma_1 \sigma_2} \quad (1^c)$$

ist allgemein unter dem Namen „Gesetz der Fehler in der Ebene“ bekannt. Ausführliche Erörterungen über dasselbe findet man beispielsweise in der Czuberschen „Theorie der Beobachtungsfehler“ (Leipzig, 1891).

Um die durch die Formel (5) angedeutete Integration durchzuführen, kann man verschiedene Wege einschlagen. Hier soll zuvörderst eine Methode Verwendung finden, wie sie in den artilleristischen Lehrbüchern behufs Umformung des Fehlergesetzes in der Ebene gezeigt wird. Es geschieht dies, um in formaler Hinsicht die nämlichen oder doch ähnliche Integrationen vornehmen zu können, wie sie bereits Hattendorf in Masius' Rundschau, 1868<sup>1)</sup>, zur Berechnung des mathematischen Risikos angewendet hatte. Eine der ersten Arbeiten über die Transformation des Fehlergesetzes in der Ebene verdankt man dem Holländer Ch. M. Schols (Over de Theorie der Fouten in de Ruimte en in het platte Vlak). Die hier vorgenommenen

---

<sup>1)</sup> Vgl. Wagner, „Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung“, Jena, 1898.

Umformungen sind als eine Vervollkommnung der Ausführungen anzusehen, die man bei N. Sabudski-Ritter von Eberhard (Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihre Anwendung auf das Schiessen und auf die Theorie des Einschiessens) findet.

Zunächst versuchen wir, die Wahrscheinlichkeit (1°) vermöge der Invariantentheorie umzubilden. Führt man in die binäre quadratische Form

$$a_{11} \sigma_1^2 + a_{22} \sigma_2^2 + 2a_{12} \sigma_1 \sigma_2 \quad (\text{A})$$

die neuen Variablen  $t_1$  und  $t_2$  durch die Substitutionen

$$\sigma_1 = t_1 \alpha_1 - t_2 \alpha_2$$

$$\sigma_2 = t_1 \alpha_2 + t_2 \alpha_1$$

ein,<sup>1</sup> so erhält man die andere binäre quadratische Form

$$b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2 + 2b_{12} t_1 t_2, \quad (\text{B})$$

in welcher ist

$$b_{11} = a_{11} \alpha_1^2 + a_{22} \alpha_2^2 + 2a_{12} \alpha_1 \alpha_2,$$

$$b_{22} = a_{11} \alpha_2^2 + a_{22} \alpha_1^2 - 2a_{12} \alpha_1 \alpha_2,$$

$$b_{12} = (a_{22} - a_{11}) \alpha_1 \alpha_2 - a_{12} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2).$$

Bezeichnet man darauf die Determinante von (A) mit  $\Delta$ , jene von (B) mit  $\Delta_1$ , so ist

$$\Delta_1 = M^2 \Delta, \quad (\text{C})$$

wobei  $M$  den Modulus der Transformation bezeichnet (vgl. beispielsweise Diedr. Aug. Klempt, „Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra“), welcher dargestellt wird durch die Determinante des Substitutions-

systems. Die Determinanten  $\Delta_1$  und  $\Delta$  heissen dabei die Invarianten der zugehörigen Funktionen. Weil aber

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11} b_{22} - b_{12}^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2,$$

$$M = \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,$$

ist, so ergibt sich die besondere Form der Invariantengleichung

$$b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2.$$

Die ziemlich allgemein durchgeführte Transformation ist jedoch nur von Wert, im Falle sie zu wesentlichen Vereinfachungen führt. Um ihr diese Eigenschaften zu geben, denke man sich die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zunächst von der Beschaffenheit, dass  $b_{12}$  verschwindet. Daraus ergibt sich

$$b_{12} = (a_{22} - a_{11}) \alpha_1 \alpha_2 - a_{12} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) = 0$$

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} = \frac{a_{12}}{a_{22} - a_{11}}.$$

Um nun auch  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$  zu entfernen, setze man

$$\alpha_1 = \cos \varphi, \quad \alpha_2 = \sin \varphi,$$

so wird einerseits

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

und anderseits

$$\frac{a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} = \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Folglich ist der Winkel  $\varphi$  aus der Gleichung zu berechnen

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}},$$

und gleichzeitig hat man die vereinfachte Invariantengleichung

$$b_{11} b_{22} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2.$$

Somit gelingt es, das Fehlergesetz (1°) in das einfachere zu verwandeln

$$P(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{b_{11} b_{22}}}{\pi} e^{-b_{11} t_1^2 - b_{22} t_2^2} *) \quad (1^d)$$

---

\*) Das hier benutzte Verfahren findet auch Anwendung bei der Umformung der in rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Mittelpunktsleichung

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 = c$$

einer Ellipse oder Hyperbel in die entsprechende Hauptachsengleichung

$$b_{11} x_1^2 + b_{22} y_1^2 = c.$$

Die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

dient dabei zur Berechnung des Drehungswinkels  $\varphi$ , um welchen das alte Koordinatensystem im positiven Sinne gedreht werden muss, damit es in die Lage des neuen gelange. Zur Berechnung

Die Berechnung der Präzisionen  $\sqrt{b_{11}}$  und  $\sqrt{b_{22}}$ , für welche künftig  $h_1$  und  $h_2$  geschrieben werden soll, ist vermöge des Winkels  $\varphi$  leicht ausführbar. Aus

$$h_1^2 = a_{11} \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi$$

findet man durch einfache Umformungen

$$h_1^2 = \frac{a_{11} + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi + 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Auf dieselbe Weise gelangt man zu der entsprechenden Formel

$$h_2^2 = \frac{a_{11} \operatorname{tg}^2 \varphi + a_{22} - 2a_{12} \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Um die Funktion  $\operatorname{tg} \varphi$  aufzufinden, gehe man von der Formel aus

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

welche sich in bezug auf  $\operatorname{tg} \varphi$  in eine quadratische Gleichung umbilden lässt, deren Wurzeln aus der Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \varphi} - 1}{\operatorname{tg} 2 \varphi}$$

gefunden werden.

der Konstanten  $b_{11}$  und  $b_{22}$  kann man sich auch der Gleichungen bedienen

$$b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22},$$

$$b_{11} - b_{22} = \frac{a_{11} - a_{22}}{\cos 2 \varphi} = \frac{2a_{12}}{\sin 2 \varphi}.$$

(Siehe beispielsweise „Des Ingenieurs Taschenbuch“, herausgegeben von dem Verein Hütte.)

Um das Risiko der ersten Vertragsart mittelst des Gesetzes (1<sup>d</sup>) berechnen zu können, muss man auch die Abweichungsfunktion

$$N(\sigma_1, \sigma_2) = (K - V) \sigma_1 - V \sigma_2 = c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2$$

als eine Funktion von  $t_1$  und  $t_2$  darstellen. Durch die Substitutionen

$$\sigma_1 = t_1 \cos \varphi - t_2 \sin \varphi$$

$$\sigma_2 = t_1 \sin \varphi + t_2 \cos \varphi$$

erhält man

$$\begin{aligned} N(t_1, t_2) &= (c_1 \cos \varphi - c_2 \sin \varphi) t_1 - (c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi) t_2 \\ &= B_1 t_1 - B_2 t_2, \end{aligned}$$

wobei angenommen werde, dass  $B_1$  eine positive Grösse ist.

An die Stelle der Formel (5) tritt nun die Formel

$$R = \frac{h_1 h_2}{\pi} \iint e^{-h_1^2 t_1^2 - h_2^2 t_2^2} (B_1 t_1 - B_2 t_2) dt_1 dt_2, \quad (\text{I})$$

bei welcher die Integrationen derart vorzunehmen sind, dass stets der Ungleichung

$$B_1 t_1 - B_2 t_2 \geq 0$$

genügt wird. Das letztere wird erreicht, indem man setzt

$$\begin{aligned} R &= \frac{h_1 h_2}{\pi} B_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_2^2 t_2^2} dt_2 \int_{\frac{B_2}{B_1} t_2}^{\infty} e^{-h_1^2 t_1^2} t_1 dt_1 - \\ &\quad - \frac{h_1 h_2}{\pi} B_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_1^2 t_1^2} dt_1 \int_{-\infty}^{\frac{B_1}{B_2} t_1} e^{-h_2^2 t_2^2} t_2 dt_2; \end{aligned}$$



man erhält sodann

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{B_1^2}{\sqrt{h_2^2 B_1^2 + h_1^2 B_2^2}} + \frac{h_1}{h_2} \frac{B_2^2}{\sqrt{h_2^2 B_1^2 + h_1^2 B_2^2}} \right) \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{h_2^2 B_1^2 + h_1^2 B_2^2}}{h_1 h_2}. \quad (8)$$

Substituiert man nun die Werte für  $h_1$  und  $h_2$ , sowie für  $B_1$  und  $B_2$ , so findet man vermöge der Beziehung

$$(a_{22} - a_{11}) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi = 0$$

für das mathematische Risiko die Formel

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a_{11} c_2^2 + a_{22} c_1^2 + 2a_{12} c_1 c_2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}. \quad (9)$$

Nun noch für  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $c_1$  und  $c_2$  die Werte einführend, ergibt sich hieraus die endgültige Formel

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{s[p_1(1-p_1)(K-V)^2 + p_2(1-p_2)V^2 + \\ + 2p_1 p_2 (K-V)V]}. \quad (9^a)$$

Zur Berechnung des mathematischen Risikos der zweiten Vertragsart, für welche ist

$$N_1(\sigma_1, \sigma_2) = (K_1 - V)\sigma_1 + (K_2 - V)\sigma_2 = \zeta_1 \sigma_1 + \zeta_2 \sigma_2,$$

erhält man durch Substitution der Werte von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$

$$N_1(\sigma_1, \sigma_2) = (\zeta_1 \cos \varphi + \zeta_2 \sin \varphi) t_1 + (-\zeta_1 \sin \varphi + \zeta_2 \cos \varphi) t_2 \\ = C_1 t_1 + C_2 t_2.$$

Das mathematische Risiko wird daher symbolisch dargestellt durch den Integralausdruck

$$R_1 = \frac{h_1 h_2}{\pi} \int \int e^{-h_1^2 t_1^2 - h_2^2 t_2^2} (C_1 t_1 + C_2 t_2) dt_1 dt_2, \quad (\text{II})$$

welcher in derselben Weise wie der Integralausdruck für  $R$  behandelt werden muss, wenn man annimmt, dass  $C_2$  negativ ist. Macht man aber die Voraussetzung, dass  $C_2$  positiv ist, so führt die Bedingung der ständigen Befriedigung der Ungleichung

$$C_1 t_1 + C_2 t_2 \geq 0$$

zu der bekannten Integration

$$\begin{aligned} R_1 = & \frac{h_1 h_2}{\pi} C_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_2^2 t_2^2} dt_2 \int_{-\frac{C_2}{C_1} t_2}^{\infty} e^{-h_1^2 t_1^2} t_1 dt_1 + \\ & + \frac{h_1 h_2}{\pi} C_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_1^2 t_1^2} dt_1 \int_{-\frac{C_1}{C_2} t_1}^{\infty} e^{-h_2^2 t_2^2} t_2 dt_2, \end{aligned}$$

welche ebenfalls ergibt

$$R_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{h_2^2 C_1^2 + h_1^2 C_2^2}}{h_1 h_2}.$$

Wenn man nun in diesen Ausdruck die Werte von  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  einsetzt, so bekommt man

$$R_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a_{11} \zeta_2^2 + a_{22} \zeta_1^2 - 2a_{12} \zeta_1 \zeta_2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}. \quad (10)$$

Durch Einführung der Werte von  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  geht dieser Ausdruck alsdann in die endgültige Formel über

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{s[p_1(1-p_1)(K_1-V)^2 + p_2(1-p_2)(K_2-V)^2 - 2p_1p_2(K_1-V)(K_2-V)]}. \quad (10^a)$$

Einfacher als die vorausgehende Berechnungsweise ist wohl der Lösungsweg, den der Verfasser in seiner ersten Arbeit angestrebt hat. Es sei das Integral

$$R = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \iint e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} (c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (5^a)$$

wieder derart zu integrieren, dass stets die Ungleichung

$$\infty \geq c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2 \geq 0$$

befriedigt wird.

Erteilt man den Variablen  $\sigma_2$  einen beliebigen Wert, so ergibt sich

$$c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2 = 0,$$

sofern man setzt  $\sigma_1 = \frac{c_2}{c_1} \sigma_2$ ; es wird aber

$$\infty \geq c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2 > 0,$$

wenn man für  $\sigma_1$  alle jene Werte wählt, welche grösser

als  $\frac{c_2}{c_1} \sigma_1$  sind.

Geht man von einem beliebigen Werte der Variablen  $\sigma_1$  aus, so erhält man

$$c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 = 0,$$

falls man setzt  $\sigma_2 = \frac{c_1}{c_2} \sigma_1$ . Um aber zu erreichen, dass wieder die Ungleichung

$$\infty \geq c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 > 0$$

befriedigt wird, muss man die Variable  $\sigma_2$  alle jene Werte durchlaufen lassen, welche kleiner sind als  $\frac{c_1}{c_2} \sigma_1$ .

Aus diesen Überlegungen folgt, dass man dem Integrale (A) die Form zu geben hat

$$R = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \left[ c_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{22} - a_1) \sigma_2^2} d\sigma_2 \right. \\ \left. \int_{\frac{c_2}{c_1} \sigma_2}^{\infty} e^{-(\sqrt{a_{11}} \sigma_1 + \sqrt{a_1} \sigma_2)^2} \sigma_1 d\sigma_1 - \right. \\ \left. - c_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{11} - a_2) \sigma_1^2} d\sigma_1 \int_{-\infty}^{\frac{c_1}{c_2} \sigma_1} e^{-(\sqrt{a_{22}} \sigma_2 + \sqrt{a_2} \sigma_1)^2} \sigma_2 d\sigma_2 \right], \quad (5^b)$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  aus den Gleichungen

$$a_{12} = \sqrt{a_{11} a_1} \quad \text{und} \quad a_{12} = \sqrt{a_{22} a_2}$$

zu bestimmen sind. Dieses Integral lässt sich in der angegebenen Form noch nicht auswerten. Beachtet man aber weiterhin, dass man zwei Koeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  derart bestimmen kann, dass stets die Gleichung erfüllt wird

$$c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 = \lambda_1 [\sqrt{a_{11}} \sigma_1 + \sqrt{a_1} \sigma_2] - \lambda_2 [\sqrt{a_{22}} \sigma_2 + \sqrt{a_2} \sigma_1],$$

so ist damit die Lösung gefunden.

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  dient das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \sqrt{a_{11}} - \lambda_2 \sqrt{a_2} = c_1,$$

$$\lambda_1 \sqrt{a_1} - \lambda_2 \sqrt{a_{22}} = -c_2,$$

aus welchem man erhält

$$\lambda_1 = \frac{c_1 \sqrt{a_{22}} + c_2 \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_{11} a_{22}} - \sqrt{a_1 a_2}}, \quad \lambda_2 = \frac{c_1 \sqrt{a_1} + c_2 \sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{11} a_{22}} - \sqrt{a_1 a_2}}.$$

Setzt man nun für die Variable  $c_1 \sigma_1$  die andere  $\lambda_1 (\sqrt{a_{11}} \sigma_1 + \sqrt{a_1} \sigma_2)$  und an die Stelle der Variablen  $c_2 \sigma_2$  die neue Variable  $\lambda_2 (\sqrt{a_{22}} \sigma_2 + \sqrt{a_2} \sigma_1)$ , so hat man für die Grenze  $\frac{c_2}{c_1} \sigma_2$  zu nehmen  $\left( \sqrt{a_{11}} \frac{c_2}{c_1} + \sqrt{a_1} \right) \sigma_2$ , für die Grenze  $\frac{c_1}{c_2} \sigma_1$  aber  $\left( \sqrt{a_{22}} \frac{c_1}{c_2} + \sqrt{a_2} \right) \sigma_1$ . Dadurch aber geht das Integral (5<sup>b</sup>) über in das entsprechende

$$R = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi}$$

$$\left[ \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_{11}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{22}-a_1) \sigma_2^2} d\sigma_2 \int_{\left(\sqrt{a_{11}} \frac{c_2}{c_1} + \sqrt{a_1}\right) \sigma_2}^{\infty} e^{-u^2} u du - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_{22}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{11}-a_2) \sigma_1^2} d\sigma_1 \int_{\left(\sqrt{a_{22}} \frac{c_1}{c_2} + \sqrt{a_2}\right) \sigma_1}^{\infty} e^{-v^2} v dv \right], \quad (5^c)$$

aus welchem folgt

$$R = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{2\pi}$$

$$\left[ \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_{11}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[(a_{22}-a_1) + \left(\sqrt{a_{11}} \frac{c_2}{c_1} + \sqrt{a_1}\right)^2\right] \sigma_2^2} d\sigma_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_{22}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[(a_{11}-a_2) + \left(\sqrt{a_{22}} \frac{c_1}{c_2} + \sqrt{a_2}\right)^2\right] \sigma_1^2} d\sigma_1 \right] \quad (5^d)$$

und ferner

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}c_1^2 + a_{11}c_2^2 + 2a_{12}c_1c_2}} \left[ \frac{\lambda_1 c_1}{\sqrt{a_{11}}} + \frac{\lambda_2 c_2}{\sqrt{a_{22}}} \right]. \quad (5^e)$$

Führt man in diesen Ausdruck die Werte von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ein, so erhält man mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\sqrt{a_{11}a_{22}} - \sqrt{a_1a_2} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$$

abermals die Formel (9).

Um die letztere herzuleiten, kann man aber noch zwei andere Lösungswege einschlagen.

Da sich die stets gültige Gleichung aufstellen lässt

$$c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 = \lambda_1 \sigma_1 - \lambda_2 (\sqrt{a_{22}} \sigma_2 + \sqrt{a_2} \sigma_1),$$

aus welcher man erhält

$$\lambda_1 = \frac{c_1 a_{22} + c_2 a_{12}}{a_{22}}, \quad \lambda_2 = \frac{c_2}{\sqrt{a_{22}}},$$

so findet man,  $\sqrt{a_{22}} \sigma_2 + \sqrt{a_2} \sigma_1 = \varphi$  setzend,

$$R = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22}} - a_{12}^2}{\pi} \left[ \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_{22}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi^2} d\varphi \int_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \varphi}^{\infty} e^{-(a_{11} - a_2) \sigma_1^2} \sigma_1 d\sigma_1 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_{22}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{11} - a_2) \sigma_1^2} d\sigma_1 \int_{-\infty}^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sigma_2} e^{-\varphi^2} \varphi d\varphi \right]. \quad (5^f)$$

Durch mehrfache Umformungen ergibt sich hieraus

$$R = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22}} - a_{12}^2}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_{22}} (a_{11} - a_2)} \sqrt{(a_{11} - a_2) + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}}, \quad (5^g)$$

und wenn man für  $a_2$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Werte einführt, so bekommt man wieder die Formel (9).

Ferner besteht aber auch die stets gültige Gleichung

$$c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 = \lambda_1 [\sqrt{a_{11}} \sigma_1 + \sqrt{a_1} \sigma_2] - \lambda_2 \sigma_2,$$

für welche ist

$$\lambda_1 = \frac{c_1}{\sqrt{a_{11}}}, \quad \lambda_2 = \frac{c_2 a_{11} + c_1 a_{12}}{a_{11}}.$$

Setzt man  $\sqrt{a_{11}}\sigma_1 + \sqrt{a_{11}}\sigma_2 = \psi$ , so erhält man durch Anwendung der vorstehenden Gleichung den Ausdruck

$$R = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \left[ \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_{11}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{22}-a_1)\sigma_2^2} d\sigma_2 \int_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sigma_2}^{\infty} e^{-\psi^2} \psi d\psi - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_{11}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi^2} d\psi \int_{-\infty}^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\psi} e^{-(a_{22}-a_1)\sigma_2^2} \sigma_2 d\sigma_2 \right]. \quad (5^h)$$

Denselben in entsprechender Weise wie den Ausdruck (5<sup>g</sup>) behandelnd, findet man

$$R = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_{11}}(a_{22} - a_1)} \sqrt{(a_{22} - a_1) + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}}. \quad (5^i)$$

Indem man nun noch für  $a_1$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Werte einsetzt, gelangt man nach zweckdienlichen Umgestaltungen wieder zu der Formel (9).

Das mathematische Risiko der zweiten Vertragsart wird in Analogie zur Hattendorffschen Berechnungsweise aus dem Doppelintegrale

$$R = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \quad (5^k)$$

$$\iint e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} (\zeta_1\sigma_1 + \zeta_2\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

gefunden, indem man setzt



$$R = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \quad (5^1)$$

$$\left[ \zeta_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{22}-a_1)\sigma_1^2} d\sigma_2 \int_{-\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\sigma_1}^{\infty} e^{-(\sqrt{a_{11}}\sigma_1 + \sqrt{a_1}\sigma_2)^2} \sigma_1 d\sigma_1 + \right. \\ \left. + \zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{11}-a_2)\sigma_2^2} d\sigma_1 \int_{-\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\sigma_2}^{\infty} e^{-(\sqrt{a_{22}}\sigma_2 + \sqrt{a_2}\sigma_1)^2} \sigma_2 d\sigma_2 \right].$$

Um diesen Ausdruck einer Lösung zuzuführen, kann man setzen:

1.  $\zeta_1\sigma_1 + \zeta_2\sigma_2 = \lambda_1(\sqrt{a_{11}}\sigma_1 + \sqrt{a_1}\sigma_2) + \lambda_2(\sqrt{a_{22}}\sigma_2 + \sqrt{a_2}\sigma_1),$
2.  $\zeta_1\sigma_1 + \zeta_2\sigma_2 = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2(\sqrt{a_{22}}\sigma_2 + \sqrt{a_2}\sigma_1),$
3.  $\zeta_1\sigma_1 + \zeta_2\sigma_2 = \lambda_1(\sqrt{a_{11}}\sigma_1 + \sqrt{a_1}\sigma_2) + \lambda_2\sigma_2.$

Für die erste dieser Gleichungen findet man

$$\lambda_1 = \sqrt{a_{11}} \frac{\zeta_1 a_{22} - \zeta_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{a_{22}} \frac{\zeta_2 a_{11} - \zeta_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

für die zweite ergibt sich

$$\lambda_1 = \frac{\zeta_1 a_{22} - \zeta_2 a_{12}}{a_{22}}, \quad \lambda_2 = \frac{\zeta_2}{\sqrt{a_{22}}},$$

und für die dritte folgt

$$\lambda_1 = \frac{\zeta_1}{\sqrt{a_{11}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\zeta_2 a_{11} - \zeta_1 a_{12}}{a_{11}}.$$

Endlich sei noch bemerkt, dass sich die hier vor Augen geführten Berechnungen umständlicher gestalten würden, wenn man sich der Integrale

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^\infty \sigma_1 d\sigma_1 \int_{-\infty}^\infty e^{-a_{11} \sigma_1^2 - a_{22} \sigma_2^2 - 2a_{12} \sigma_1 \sigma_2} d\sigma_2 = \\
 &= \frac{\sqrt{a_{22}}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}} \\
 J_2 &= \int_0^\infty \sigma_2 d\sigma_2 \int_{-\infty}^\infty e^{-a_{11} \sigma_1^2 - a_{22} \sigma_2^2 - 2a_{12} \sigma_1 \sigma_2} d\sigma_1 = \\
 &= \frac{\sqrt{a_{11}}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}
 \end{aligned}$$

bedienen wollte, die besondere Fälle eines von Czuber auf Seite 276 der Theorie der Beobachtungsfehler angegebenen  $n$ -fachen Integrals sind.

## 2. Das mittlere Risiko.

Das mittlere Risiko  $s$  gleicher Verträge wird ähnlich berechnet wie die mittlere Abweichung von dem wahrscheinlichsten Werte einer Ereigniszahl (vgl. Czuber, „Wahrscheinlichkeitsrechnung“, 3. Auflage, § 96), oder wie die mittlere Abweichung aller nur möglichen Einzelwerte von ihrem arithmetischen Mittel (vgl. G. F. Lipps, „Die psychischen Massmethoden“, Abschnitt 15: Die Mittelwerte der Beobachtungsreihen). Wir beschäftigen uns wieder mit der ersten Vertragsart. Um die mittlere Abweichung vom rechnungsmässigen Ergebnisse zu bestimmen, bilden wir den Hoffnungswert von Quadraten

$$M^2 = \sum \sum \frac{s!}{s_1! s_2! s_3!} p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3} [s_1 (K - V - H) - s_2 (V + H) - s_3 H]^2, \quad (11)$$

für welchen wir auch schreiben können

$$M^2 = \sum \sum P(s_1, s_2) [s_1 (K - V) - s_2 V - s H]^2. \quad (11^a)$$

Die angedeutete Summation ist hierbei über alle nur möglichen Werte von  $s_1, s_2, s_3$  zu erstrecken, welche der Gleichung

$$s_1 + s_2 + s_3 = s$$

genügen. Lösen wir die Quadrate auf, so geht die Gleichung (11) über in

$$\begin{aligned} M^2 = & (K - V)^2 \sum \sum P(s_1, s_2) s_1^2 + V^2 \sum \sum P(s_1, s_2) s_2^2 + \\ & + s^2 H^2 \sum \sum P(s_1, s_2) - 2(K - V) V \sum \sum P(s_1, s_2) s_1 s_2 - \\ & - 2s(K - V) H \sum \sum P(s_1, s_2) s_1 + \\ & + 2s V H \sum \sum P(s_1, s_2) s_2. \end{aligned} \quad (11^b)$$

Weil nun die Formeln bestehen

$$\begin{aligned} \sum \sum P(s_1, s_2) s_1 &= s p_1, \quad \sum \sum P(s_1, s_2) s_1^2 = s(s-1) p_1^2 + s p_1, \\ \sum \sum P(s_1, s_2) s_2 &= s p_2, \quad \sum \sum P(s_1, s_2) s_2^2 = s(s-1) p_2^2 + s p_2, \\ \sum \sum P(s_1, s_2) s_1 s_2 &= s(s-1) p_1 p_2, \end{aligned}$$

zu deren Auffindung bereits Laplace Anlass gegeben hat, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} M^2 = & (K - V)^2 [s(s-1) p_1^2 + s p_1] + V^2 [s(s-1) p_2^2 + s p_2] + \\ & + H^2 s^2 - 2(K - V) V s p_1 - 2(K - V) H s^2 p_1 + \\ & + 2 V H s^2 p_2. \end{aligned}$$

Entfernt man aus derselben  $H$  vermöge der Formel

$$H = p_1 (K - V) - p_2 V,$$

so lässt sich die mittlere Abweichung auf die Form bringen

$$M = \sqrt{s[p_1(1-p_1)(K-V)^2 + p_2(1-p_2)V^2 + 2p_1p_2(K-V)V]}. \quad (11^b)$$

Um das mittlere Risiko der zweiten Vertragsart zu bestimmen, hat man von der Quadratsumme

$$M_1^2 = \Sigma \Sigma \frac{s!}{s_1! s_2! s_3!} p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3} [s_1(K_1 - V - H) + s_2(K_2 - V - H) - s_3 H]^2 \quad (12)$$

auszugehen, die auch in der Form geschrieben werden kann

$$M_1^2 = \Sigma \Sigma P(s_1, s_2) [s_1(K_1 - V) + s_2(K_2 - V) - sH]^2. \quad (12^a)$$

Nimmt man dieselben Umformungen vor wie beim vorhergehenden Beispiele, so erhält man als endgültige Formel des mittleren Risikos

$$M_1 = \sqrt{s[p_1(1-p_1)(K_1 - V)^2 + p_2(1-p_2)(K_2 - V)^2 - 2p_1p_2(K_1 - V)(K_2 - V)]}. \quad (12^b)$$

Zu denselben Ergebnissen gelangt man bei einer kontinuierlichen Behandlung der Abweichungen. Dieselbe erfordert, dass man beispielsweise das Quadrat des mittleren Risikos der ersten Vertragsart durch das Doppelintegral

$$M^2 = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} (c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2)^2 d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (13)$$

darstellt. Indem man sodann das im Integranden auftretende Quadrat auflöst und sich der Integralwerte

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} \sigma_1^2 d\sigma_1 d\sigma_2 &= \\ &= \frac{a_{22}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} \sigma_2^2 d\sigma_1 d\sigma_2 &= \\ &= \frac{a_{11}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} \sigma_1\sigma_2 d\sigma_1 d\sigma_2 &= \\ &= -\frac{a_{12}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \end{aligned}$$

bedient, welche Czuber in der bereits erwähnten „Theorie der Beobachtungsfehler“ angibt, erhält man

$$M = \sqrt{\frac{a_{11}c_2^2 + a_{22}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}. \quad (13^a)$$

Wenn man in diesen Ausdruck die Werte für  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $c_1$  und  $c_2$  einsetzt, so ergibt sich wieder die Formel (11<sup>b</sup>).

Das Risiko der zweiten Vertragsart erhält man aus dem Integrale

$$M_1^2 = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} (\zeta_1\sigma_1 + \zeta_2\sigma_2)^2 d\sigma_1 d\sigma_2. \quad (14)$$

Behandelt man dasselbe wie das Integral (13), so ergibt sich für das mittlere Risiko die Formel

$$M_1 = \sqrt{\frac{a_{11}\zeta_2^2 + a_{22}\zeta_1^2 - 2a_{12}\zeta_1\zeta_2}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}, \quad (14^a)$$

welche durch Einsetzen der Werte von  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{12}$ ,  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  übergeht in die Formel (12<sup>b</sup>).

### 3. Die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder Gewinnes.

Um aus der Wahrscheinlichkeit (1<sup>c</sup>) die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung

$$\Delta = N(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 c_1 - \sigma_2 c_2$$

herzuleiten, eliminieren wir aus (1<sup>c</sup>) etwa  $\sigma_1$  vermöge der Gleichung

$$\sigma_1 = \frac{1}{c_1} (\Delta + \sigma_2 c_2).$$

Es ergibt sich dadurch der Ausdruck (15)

$$P(\Delta, \sigma_2) = s! \frac{p_1 \left( \frac{sp_1 c_1 + \Delta + \sigma_2 c_2}{c_1} \right) p_2^{(sp_2 + \sigma_2)} p_3 \left( \frac{sp_3 c_1 - \Delta - (c_1 + c_2) \sigma_2}{c_1} \right)}{\left( \frac{sp_1 c_1 + \Delta + \sigma_2 c_2}{c_1} \right)! (sp_2 + \sigma_2)! \left( \frac{sp_3 c_1 - \Delta - (c_1 + c_2) \sigma_2}{c_1} \right)!}$$

welcher, wie man sieht, recht unhandlich ist. Wendet man auf denselben zunächst die Stirlingsche Formel an und nimmt alsdann die vereinfachenden Entwicklungen vor, derer man sich auch zur Darstellung des Bernoullischen Theorems bedient, so ergibt sich für die Abweichungen  $\Delta$  und  $\sigma_2$  ein gemeinsames Gesetz, welches dem Gesetze der Fehler in der Ebene entspricht. Darauf  $\Delta$  als konstant ansehend, entferne man  $\sigma_2$  durch Integration, so bekommt man das Gesetz der Abweichung  $\Delta$ . Diese Darstellung ist immerhin umständlich, weil sie eine Reihe von vereinfachenden Vornahmen notwendig macht, welche bereits zur Darstellung der Formel (1°) erforderlich sind. Gehen wir von der letzteren aus, so können wir den Satz aufstellen, dass die Funktion

$$\Delta = \sigma_1 c_1 - \sigma_2 c_2$$

dem Wahrscheinlichkeitsgesetze

$$P(\Delta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 \Delta^2} \quad (16)$$

unterliegt, für welches die Präzision  $\eta$  nach der Formel zu berechnen ist

$$\eta = \sqrt{\frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11} c_2^2 + a_{22} c_1^2 + 2 a_{12} c_1 c_2}}. \quad (16^a)$$

Für die zweite Vertragsart würde sein

$$\Delta_1 = \sigma_1 \zeta_1 + \sigma_2 \zeta_2,$$

und man erhielte

$$P(\Delta_1) = \frac{\eta_1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta_1^2 \Delta_1^2}$$

mit der Präzision

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11} \zeta_2^2 + a_{22} \zeta_1^2 - 2 a_{12} \zeta_1 \zeta_2}}. \quad (17^a)$$

In dem Aufsätze „Allgemeine Herleitung eines Satzes von Laplace“ im Bande IV von Lœwenbergs Sammlung versicherungstechnischer Arbeiten hat der Verfasser die Entstehung der Gesetze (16) und (17) ganz allgemein behandelt. Hier werde die Entwicklung mit Hilfe des Diskontinuitätsfaktors von Dirichlet

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) z i} \frac{\sin \Delta z}{z} dz$$

kurz vor Augen geführt, welchen man schon bei Poisson (Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung) vorfindet, und dessen sich auch Markoff (Wahrscheinlichkeitsrechnung) bisweilen bedient hat.

Dieser Faktor ist gleich 1, wenn  $(k_1 \sigma_1 \pm k_2 \sigma_2)$  zwischen  $-\Delta$  und  $+\Delta$  liegt, und verschwindet, sofern  $(k_1 \sigma_1 \pm k_2 \sigma_2)$  ausserhalb dieser Grenzen liegt. Für  $(k_1 \sigma_1 \pm k_2 \sigma_2) = -\Delta$  und  $(k_1 \sigma_1 \pm k_2 \sigma_2) = \Delta$  nimmt er den Wert  $\frac{1}{2}$  an.

Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu erhalten, multiplizieren wir die Summe der Wahrscheinlichkeiten



$$\frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2} d\sigma_1 d\sigma_2 = 1$$

mit diesem Faktor, so wird

$$W(-\Delta, \Delta) = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\pi^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{11}\sigma_1^2 - a_{22}\sigma_2^2 - 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + (k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2)zi \frac{\sin \Delta z}{z}} d\sigma_1 d\sigma_2 dz.$$

Weil sich nun die Funktion

$$a_{11}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_2^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + (k_1\sigma_1 \pm k_2\sigma_2)zi$$

auf die Form bringen lässt

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{a_{11}}\sigma_1 + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\sigma_2 + \frac{k_1 z}{2\sqrt{a_{11}}}i \right)^2 + \\ & \left( \sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}}\sigma_2 + \frac{\pm a_{11}k_2 - a_{12}k_1}{2\sqrt{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}zi \right)^2 + \\ & + \frac{a_{22}k_1^2 + a_{11}k_2^2 \mp 2a_{12}k_1k_2}{4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}z^2 = v_1^2 + v_2^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2, \end{aligned}$$

so kann man statt nach  $\sigma_1$  nach  $v_1$  und statt nach  $\sigma$  nach  $v_2$  integrieren. Zu diesem Zwecke setzend

$$d\sigma_1 = \frac{dv_1}{\sqrt{a_{11}}}, \quad d\sigma_2 = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} dv_2,$$

bekommt man

$$\begin{aligned} W(-\Delta, \Delta) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 z^2} \frac{\sin \Delta z}{z} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_2^2} dv_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_1^2} dv_1 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 z^2} \frac{\sin \Delta z}{z} dz, \end{aligned} \quad (\text{A})$$

einen Ausdruck, der ein besonderer Fall eines bei Laplace und bei Poisson mehrfach vorkommenden Integrals ist. Derselbe stellt bereits die Wahrscheinlichkeit dar, dass die Abweichung zwischen  $-\Delta$  und  $+\Delta$  liege. Da man aber die Wahrscheinlichkeit  $P(\Delta) = \frac{dW(-\Delta, \Delta)}{d\Delta}$  kennen lernen will, so differentiire man den obigen Ausdruck (A) nach  $\Delta$  mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{\sin \Delta z}{z} = \frac{1}{2} \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos \Delta z d\Delta.$$

Man erhält dadurch das Integral

$$P(\Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 z^2} \cos \Delta z dz, \quad (\text{B})$$

dessen Lösung bereits Laplace auf verschiedene Weise gefunden hatte. Eine derselben möge an dieser Stelle Platz finden.

Aus der vorstehenden Formel erhält man durch Differentiation nach  $\Delta$

$$\frac{dP(\Delta)}{d\Delta} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 z^2} \sin \Delta z \cdot z dz.$$

Wendet man auf das so entstandene Integral die partielle Integration an, so ergibt sich

$$\frac{dP(\Delta)}{d\Delta} = \frac{1}{2\pi\mathfrak{M}^2} \left[ e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2} \sin \Delta z \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\Delta}{2\pi\mathfrak{M}^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2} \cos \Delta z \, dz.$$

Nun ist offenbar

$$\lim_{z=\pm\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2} \sin \Delta z = 0,$$

daher kommt man zu der linearen Differentialgleichung

$$\frac{dP(\Delta)}{d\Delta} + \frac{\Delta}{\mathfrak{M}^2} P(\Delta) = 0, \quad (\text{D})$$

deren Lösung auf verschiedene Weise vorgenommen werden kann. Da die Differentialgleichung eine homogene ist, so bietet sich die seltene Gelegenheit, die Integration durch Reihen zur Anwendung zu bringen. Durch aufeinanderfolgende Differentiation der ermittelten Gleichung erhält man die neuen Gleichungen

$$P'_{(\Delta)} + \frac{\Delta}{\mathfrak{M}^2} P_{(\Delta)} = 0$$

$$P''_{(\Delta)} + \frac{\Delta}{\mathfrak{M}^2} P'_{(\Delta)} + \frac{1}{\mathfrak{M}^2} P_{(\Delta)} = 0$$

$$P'''_{(\Delta)} + \frac{\Delta}{\mathfrak{M}^2} P''_{(\Delta)} + \frac{2}{\mathfrak{M}^2} P'_{(\Delta)} = 0$$

$$P^{IV}_{(\Delta)} + \frac{\Delta}{\mathfrak{M}^2} P'''_{(\Delta)} + \frac{3}{\mathfrak{M}^2} P''_{(\Delta)} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Da diese Gleichungen für jeden Wert von  $\Delta$  gelten, so müssen sie auch für  $\Delta = 0$  richtig sein. Für diesen Wert von  $\Delta$  erhält man aber

$$P'_{(\Delta)} = 0$$

$$P''_{(0)} + \frac{1}{\mathfrak{M}^2} P_{(0)} = 0, \quad P''_{(0)} = -\frac{1}{\mathfrak{M}^2} P_{(0)}$$

$$P'''_{(0)} + \frac{2}{\mathfrak{M}^2} P'_{(0)} = 0, \quad P'''_{(0)} = 0$$

$$P^{\text{IV}}_{(0)} + \frac{3}{\mathfrak{M}^2} P''_{(0)} = 0, \quad P^{\text{IV}}_{(0)} = -\frac{3}{\mathfrak{M}^2} P''_{(0)} = \frac{3}{\mathfrak{M}^4} P_{(0)}$$

.....  
.....

Nach Mac Laurin besteht die Reihe

$$P_{(\Delta)} = P_{(0)} + \Delta P'_{(0)} + \frac{\Delta^2}{2!} P''_{(0)} + \frac{\Delta^3}{3!} P'''_{(0)} + \frac{\Delta^4}{4!} P^{\text{IV}}_{(0)} + \dots$$

Setzt man nun in diese die vorstehenden Werte von  $P'_{(0)}$ ,  $P''_{(0)}$ ,  $P'''_{(0)}$ ,  $P^{\text{IV}}_{(0)}$  ... ein, so ergibt sich

$$P_{(\Delta)} = P_{(0)} - \frac{\Delta^2}{2\mathfrak{M}^2} P_{(0)} + \frac{\Delta^4}{8\mathfrak{M}^4} P_{(0)} - \dots$$

$$= P_{(0)} \left( 1 - \frac{\Delta^2}{2\mathfrak{M}^2} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\Delta^2}{2\mathfrak{M}^2} \right)^2 - \dots \right)$$

$$= P_{(0)} e^{-\frac{\Delta^2}{2\mathfrak{M}^2}}$$

Um noch  $P_{(0)}$  zu bestimmen, setze man in dem Laplaceschen Integralausdruck  $\Delta = 0$ , so folgt wegen  $\cos 0 = 1$ ,

$$P_{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2} \mathfrak{M}}.$$

Es ergibt sich mithin die bekannte Formel

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2} \mathfrak{M}} e^{-\frac{\Delta^2}{2 \mathfrak{M}^2}}. \quad (\text{E})$$

Das hier angewandte Integrationsverfahren mittelst Reihen pflegt sonst nur bei verwickelteren Differentialgleichungen Anwendung zu finden. Als Beispiel findet man die hier gegebene Lösung in dem Leitfaden für den Unterricht in der höheren Mathematik von Emanuel von Budislavljević (Wien, 1900).

Die Differentiation  $\frac{dW(-\Delta, \Delta)}{d\Delta}$  erübrigt sich, sofern man die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen sucht, dass  $\Delta$  zwischen  $\Delta$  und  $\Delta + d\Delta$  liege. Die Berechnung kann dann mittelst des in den Czuberschen Werken vorkommenden Diskontinuitätsfaktors

$$\mathcal{E} = \frac{d\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) - \Delta] zi} dz$$

vorgenommen werden, für den man übrigens bei Hack (Wahrscheinlichkeitsrechnung) eine elementare Herleitung findet.

An Einfachheit werden aber alle Darstellungen durch ein anderes Verfahren übertroffen, welches auch schon Laplace ersonnen hatte.

Es werde wieder nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass nach Ablauf des für alle Verträge gleichen Zeitraumes dem Unternehmer ein Gesamtschaden

$$sH + \Delta$$

erwachse. Dabei bedeutet  $\Delta$  den Betrag, um welchen die erwachsenden Schäden grösser sind als die zur Deckung des rechnermässigen Verlaufs des Versicherungsgeschäfts ausreichende Risikoprämiensumme  $sH$ . Zur Ermittlung der gesuchten Wahrscheinlichkeit stellen wir die erzeugende Funktion auf

$$X = (p_1 e^{(K-V)zi} + p_2 e^{-Vzi} + p_3)^s,$$

deren Entwicklung uns die Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Verluste und Gewinne vor Augen führt. Um nun die Wahrscheinlichkeit des Nettoverlustes  $\Delta$  zu erhalten, multiplizieren wir die erzeugende Funktion mit  $e^{-(sH+\Delta)zi}$  und integrieren darauf nach  $z$  zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$ . Alsdann stellt das Laplace-Poissonsche Integral

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(sH+\Delta)zi} dz \quad (18)$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit dar.

Um uns von der Richtigkeit unserer Behauptung zu überzeugen, denken wir uns die erzeugende Funktion in der bereits angedeuteten Form

$$X = \sum P_{(\mp K)} e^{\mp Kzi}$$

geschrieben. Sodann geht aus dem Integral (18) die gesuchte Wahrscheinlichkeit hervor, weil stets ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dz = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm a zi} dz = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen bedarf keiner weiteren Erläuterungen. Die zweite lässt sich für eine ganze Zahl  $a$  leicht beweisen; denn es ist für eine solche

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{+az} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos az \pm i \sin az) dz = \frac{\sin a\pi}{a\pi} = 0,$$

weil für jeden Wert von  $a$  ist  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin az dz = 0$ .

Mithin bleibt nur der Fall zu erörtern, dass  $a$  eine irrationale Zahl ist. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$a = m \pm \lambda,$$

wo  $m$  die  $a$  am nächsten liegende ganze Zahl vorstellt und  $\lambda = \mp(a - m)$  einen irrationalen Dezimalbruch bedeutet, welcher stets kleiner als  $1/2$  ist. Durch diese Vornahme kommt man zu einer der Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos az dz = \pm \frac{\sin \lambda\pi}{a\pi}.$$

Weil nun stets ist  $\sin \lambda\pi < \lambda\pi$ , so wird man den recht kleinen Wert  $\frac{\sin \lambda\pi}{a\pi} = \frac{\lambda}{a} \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda\pi}$  in den meisten Fällen vernachlässigen dürfen. Andererseits aber kann man wohl zu der Annahme Zuflucht nehmen, dass sich ebenso oft ein positiver Rest  $\frac{\sin \lambda\pi}{a\pi}$  wie ein negativer  $-\frac{\sin \lambda\pi}{a\pi}$  ergibt, woraus sich dann folgern lässt, dass sich die Integrationsergebnisse nahezu aufheben. Denkt man sich die Werte  $\lambda$  durch eine kontinuierliche Folge von Zahlen ersetzt, welche zwischen  $-\frac{1}{2}$  und  $+\frac{1}{2}$  liegen, so ergibt sich ebenfalls

$$\frac{1}{a\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \sin \lambda\pi d\lambda = 0.$$

Fernerhin kann man auch die neue Variable  $u = nz$  einführen, wobei  $n$  eine sehr grosse Zahl bedeutet. Man erhält so

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos az \, dz = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi n}^{\pi n} \cos \varepsilon u \, du,$$

worin gesetzt wurde  $\varepsilon = \frac{a}{n}$ . Für  $\pi n = \infty$  setzend, findet man darauf näherungsweise

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos az \, dz = \frac{\varepsilon}{2a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \varepsilon u \, du = 0,$$

weil für irgendeine angebbare Grösse  $\varepsilon$  ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \varepsilon u \, du = 0,$$

und man überdies auch  $\frac{\varepsilon}{2a\pi} = 0$  setzen kann.

Ungeachtet dieser Untersuchungen kann man sich aber sämtliche vorkommenden Gewinne und Verluste auf ganze Zahlen abgerundet vorstellen.

Schreiben wir zur Abkürzung wiederum

$$K - V = c_1 \text{ und } V = c_2,$$

so nimmt die vorhin mitgeteilte generierende Funktion die Form an

$$X = (p_1 e^{c_1 zi} + p_2 e^{-c_2 zi} + p_3)^s.$$

Zur Auffindung eines geeigneten Näherungswerts von  $P_{(d)}$  suche man nach einem Näherungsausdruck für  $X$ . Zu diesem Zwecke führe man zunächst die Näherungsgleichung ein



$$\ln X = s \ln \left[ 1 + (p_1 c_1 - p_2 c_2) z i - \frac{1}{2} (p_1 c_1^2 + p_2 c_2^2) z^2 \right],$$

welche erhalten wird, sofern man die  $e$ -Koeffizienten in  $X$  in Reihen entwickelt und darauf sämtliche den zweiten Grad übersteigenden Potenzen von  $z$  vernachlässigt. Ferner beachte man, dass man für kleine Werte von  $x$  setzen darf

$$\ln \left( 1 + axi - \frac{1}{2} \beta x^2 \right) = axi - \frac{1}{2} (\beta - a^2) a^2;$$

man erhält dadurch in dem Ausdrucke

$$X = e^{s(p_1 c_1 - p_2 c_2) z i - \frac{s}{2} [p_1 (1-p_1) c_1^2 + p_2 (1-p_2) c_2^2 + 2p_1 p_2 c_1 c_2] z^2}$$

einen gut verwendbaren Näherungswert für  $X$ . Denselben in die Formel (18) einführend, und in der Annahme, dass der Integrand bereits für mässige Werte von  $z$  sehr klein wird, die Grenzen des Integrals bis  $-\infty$  und  $+\infty$  ausdehnend, bekommt man

$$P_{(A)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 z^2 - A z i} dz, \quad (18^a)$$

worin zur Abkürzung wieder gesetzt wurde

$$M^2 = s [p_1 (1-p_1) c_1^2 + p_2 (1-p_2) c_2^2 + 2p_1 p_2 c_1 c_2].$$

Wendet man hierauf noch die Formel an

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2 \pm b x i} dx = e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a} x \pm \frac{b}{\sqrt{a}} i)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

so ergibt sich das endgültige Gesetz

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2} M} e^{-\frac{\Delta^2}{2M^2}}. \quad (19)$$

Um das Gesetz der Gewinn- oder Verlustabweichungen für die zweite Vertragsart herzuleiten, gehe man von der erzeugenden Funktion aus

$$X_1 = (p_1 e^{\zeta_1 z^1} + p_2 e^{\zeta_2 z^1} + p_3)^s,$$

in welcher in Übereinstimmung mit der früheren Bezeichnungsweise bedeutet

$$\zeta_1 = K_1 - V \text{ und } \zeta_2 = K_2 - V.$$

Durch Betrachtungen, welche den vorausgehenden analog sind, gelangt man dann zu dem Gesetze

$$P_{(\Delta_1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2} M_1} e^{-\frac{\Delta_1^2}{2M_1^2}}, \quad (20)$$

in welchem ist

$$M_1^2 = s[p_1(1-p_1)\zeta_1^2 + p_2(1-p_2)\zeta_2^2 - 2p_1p_2\zeta_1\zeta_2].$$

Die Aufstellung des Gesetzes der Abweichungen von dem rechnungsmässigen Ergebnisse führt uns zunächst zu weit einfacheren Berechnungen des mathematischen und mittleren Risikos. Wie Wittstein (Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften) das mathematische Risiko durch die Formel

$$R = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-H^2 \Delta^2} \Delta d\Delta = \frac{1}{2H\sqrt{\pi}}$$

und das mittlere Risiko durch die Formel

$$M^2 = \frac{H}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-H^2 \Delta^2} \Delta^2 d\Delta = \frac{1}{H\sqrt{2}}$$

erklärend, erhalten wir die bereits im ersten und zweiten Abschnitte dieses Kapitels berechneten Werte.

Für den heutigen Stand der Wissenschaft und für die Erfüllung der etwaigen Erfordernisse einer praktischen Anwendung ist es aber weit wichtiger zu wissen, mit einer wie grossen Wahrscheinlichkeit man einen Verlust oder einen Gewinn von bestimmter Grösse erwarten kann.

Von der bekannten Rechtecksformel

$$\int_a^b y_x dx = \left[ \frac{1}{2} y_a + y_{a+1} + \dots + y_{b-1} + \frac{1}{2} y_b \right]$$

Anwendung machend, findet man für die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes innerhalb der Grenzen 0 und  $K$  die Wahrscheinlichkeit

$$W_{(0, K)} = \sum_{\Delta=0}^{\Delta=K} P_{(\Delta)} = \int_0^K P_{(\Delta)} d\Delta + \frac{1}{2} (P_{(0)} + P_{(K)}), \quad (21)$$

wobei ist

$$\int_0^K P_{(\Delta)} d\Delta = \frac{H}{\sqrt{\pi_0}} \int_0^K e^{-H^2 \Delta^2} d\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{HK} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \Phi(HK).$$

Setzt man  $HK = \gamma$ , also  $K = \frac{\gamma}{H}$ , so kann man mit der Wahrscheinlichkeit

$$W_{(0, K)} = \Psi_{(\gamma)} = \frac{1}{2} \Phi_{(\gamma)} + \frac{H}{2\sqrt{\pi}} (1 + e^{-\gamma^2}) \quad (21^a)$$

erwarten, dass der etwaige Verlust innerhalb der Grenzen 0 und  $\frac{\gamma}{H}$  liegen wird.

Für die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes innerhalb der Grenzen  $-K$  und  $0$  findet man durch eine entsprechende Betrachtung

$$W_{(-K, 0)} = \sum_{\Delta=-K}^{\Delta=0} P_{(\Delta)} = \int_{-K}^0 P_{(\Delta)} d\Delta + \frac{1}{2}(P_{(-K)} + P_{(0)}), \quad (22)$$

und da stets ist  $P_{(-\Delta)} = P_{(\Delta)}$ , so folgt

$$W_{(-K, 0)} = \Psi_{(\gamma)} = \frac{1}{2} \Phi_{(\gamma)} + \frac{H}{2\sqrt{\pi}} (1 + e^{-\gamma^2}). \quad (22^a)$$

Schliesslich ergibt sich noch für die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung innerhalb der Grenzen  $-K$  und  $+K$

$$W_{(-K, K)} = \sum_{\Delta=-K}^{\Delta=K} P_{(\Delta)} = \int_{-K}^K P_{(\Delta)} d\Delta + \frac{1}{2}(P_{(-K)} + P_{(K)}) \quad (23)$$

$$= \Phi_{(\gamma)} + \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2}. \quad (23^a)$$

Zu diesem Ergebnisse käme man auch durch Vereinigung der Formeln (21<sup>a</sup>) und (22<sup>a</sup>), wenn man dabei beachtet, dass ist

$$W_{(-K, K)} = W_{(-K, 0)} + W_{(0, K)} - P_{(0)}. \quad (24)$$

Wie Moser und später Eggenberger (Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals) gezeigt haben, kann man (beispielsweise nach dem Taylorschen Satze) näherungsweise setzen

$$2 \int_0^K P_{(\Delta)} d\Delta + P_{(K)} = 2 \int_0^{K+\frac{1}{2}} P_{(\Delta)} d\Delta,$$

daher ist weiterhin

$$W_{(-K, K)} = \Phi_{(\gamma + \frac{1}{2}H)}. \quad (25)$$

Bei den vorliegenden Berechnungen darf man sich aber damit begnügen, für

$$W_{(-K, K)} = \Phi_{(\gamma)}$$

zu nehmen, weil  $\frac{1}{2}H$  wohl eine so kleine Grösse ist, dass man sie ohne Bedenken vernachlässigen kann. Immerhin sei hierzu noch bemerkt, dass Czuber und nach ihm Kozák  $K + \frac{1}{2} = \frac{\gamma_1}{H}$  setzen. Diesenfalls ist  $\Phi_{(\gamma_1)}$  die Wahrscheinlichkeit, dass die etwaige Abweichung innerhalb der Grenzen  $\mp \left( \frac{\gamma_1}{H} - \frac{1}{2} \right)$  liegen werde.

#### 4. Das Risiko auf Grund der Wahrscheinlichkeiten a posteriori.

Die Methode, das Risiko mittelst der Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes oder Verlustes zu berechnen, bietet den weiteren Vorteil, die Wahrscheinlichkeit a posteriori anwenden zu können. In bezug auf einfachere Versicherungsformen wurde auf diesen Vorzug der Verlustwahrscheinlichkeit bereits von E. Blaschke (Vorlesungen über mathematische Statistik, § 46, Die Versicherungsprämie) aufmerksam gemacht. Zur Ausführung der geplanten Berechnung ist es notwendig, die Formel von Condorcet zu verallgemeinern.

Nachdem bei  $s = s_1 + s_2 + s_3$  Versuchen die Ereignisse  $E_1, E_2, E_3$  beziehungsweise  $s_1, s_2, s_3$  mal eingetreten sind, soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass dieselben Ereignisse bei  $s'$  weiteren Versuchen beziehungsweise  $s'_1, s'_2, s'_3$  mal eintreffen. Sind nun  $x_1, x_2, x_3$  die unbekannten Wahrscheinlichkeiten für das einmalige Eintreffen der Ereignisse  $E_1, E_2, E_3$ , so ist die Wahrscheinlichkeit des  $s_1$  maligen Eintreffens von  $E_1$ , des  $s_2$  maligen Eintreffens von  $E_2$  und des  $s_3$  maligen Eintreffens von  $E_3$  bei  $s$  Versuchen gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{s!}{s_1! s_2! s_3!} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}.$$

Da aber die Wahrscheinlichkeiten  $x_1, x_2, x_3$  unbekannt sind, so hat man die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Kombination  $(s_1, s_2, s_3)$  stattgefunden hat, sofern den Ereignissen die Wahrscheinlichkeiten  $x_1, x_2, x_3$  zukommen. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt nach der Bestimmungsweise der wahrscheinlichsten Hypothese

$$\frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}}{\int_{(3)}^1 x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} dx_1 dx_2 dx_3};$$

denn der Faktor  $\frac{s!}{s_1! s_2! s_3!}$  fällt aus dem Zähler und Nenner fort. Die Integration des Nenners ist derart auszuführen, dass stets der Bedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

genügt wird. Setzt man daher für das Integral des Nenners das andere

$$\int_0^1 x_1^{s_1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{s_2} (1-x_1-x_2)^{s_3} dx_2 = \frac{s_1! s_2! s_3!}{(s+2)!},$$

so bekommt man für die betrachtete Wahrscheinlichkeit den Wert

$$\frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}.$$

Unter Zugrundelegung der Wahrscheinlichkeiten  $x_1, x_2, x_3$  beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse bei  $s'$  weiteren Versuchen  $s'_1, s'_2, s'_3$  mal in beliebiger Reihenfolge eintreten werden

$$\frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} x_1^{s'_1} x_2^{s'_2} x_3^{s'_3}.$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit der nacheinander stattfindenden Erscheinungen ist gleich

$$\frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} \frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} x_1^{s_1+s'_1} x_2^{s_2+s'_2} x_3^{s_3+s'_3},$$

und da man  $x_1, x_2, x_3$  nicht kennt, so hat man die Summe aller nur möglichen Wahrscheinlichkeiten zu bilden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird darnach durch den Ausdruck dargestellt

$$W = \frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} \frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^{s_1+s'_1} x_2^{s_2+s'_2} x_3^{s_3+s'_3} dx_1 dx_2 dx_3$$

in welchem man der Bedingung  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  genügend, setzen muss

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_{(3)} x_1^{s_1+s'_1} x_2^{s_2+s'_2} x_3^{s_3+s'_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 & = \int_0^1 x_1^{s_1+s'_1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{s_2+s'_2} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3^{s_3+s'_3} \\
 & = \int_0^1 x_1^{s_1+s'_1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{s_2+s'_2} (1-x_1-x_2)^{s_3+s'_3} dx_2 \\
 & = \frac{(s_1+s'_1)! (s_2+s'_2)! (s_3+s'_3)!}{(s+s'+2)!}.
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich so die erste Erweiterung der Condorcet'schen Formel

$$W = \frac{(s+2)!}{s_1! s_2! s_3!} \frac{s'!}{s'_1! s'_2! s'_3!} \frac{(s_1+s'_1)! (s_2+s'_2)! (s_3+s'_3)!}{(s+s'+2)!}.$$

Setzt man in derselben

$$s'_1 = s' \frac{s_1}{s} + \sigma_1 = s' p_1 + \sigma_1, \quad s'_2 = s' \frac{s_2}{s} + \sigma_2 = s' p_2 + \sigma_2,$$

$$s'_3 = s' \frac{s_3}{s} + \sigma_3 = s' p_3 + \sigma_3,$$

so lässt sich vermöge des Ausdruckes

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{(s+2)!}{\prod_{K=1}^{K=3} s_K!} \frac{s'!}{\prod_{K=1}^{K=3} (s' p_K + \sigma_K)!} \frac{\prod_{K=1}^{K=3} [(s+s') p_K + \sigma_K]!}{(s+s'+2)!} = \\
 &= X_1 \cdot X_2 \cdot X_3
 \end{aligned}$$



die Wahrscheinlichkeit der Abweichungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ableiten. Die Stirlingsche Formel auf die in der vorstehenden Formel vorkommenden Fakultäten anwendend, erhält man nach Ausführung der üblichen Reduktionen

$$X_1 = \frac{s^{3/2}}{2\pi \sqrt{s \prod_{K=1}^{K=3} p_K}} \prod_{K=1}^{K=3} p_K^{-s p_K},$$

$$X_2 = \frac{1}{2\pi \sqrt{s' \prod_{K=1}^{K=3} p_K}} \prod_{K=1}^{K=3} p_K^{-(s' p_K + \sigma_K)} \prod_{K=1}^{K=3} \left(1 + \frac{\sigma_K}{s' p_K}\right)^{-(s' p_K + \sigma_K)},$$

$$X_3 = \frac{2\pi \sqrt{\prod_{K=1}^{K=3} p_K}}{(s + s') \prod_{K=1}^{K=3} p_K^{[(s+s') p_K + \sigma_K]} \prod_{K=1}^{K=3} \left(1 + \frac{\sigma_K}{s' p_K}\right)^{[(s+s') p_K + \sigma_K]}}.$$

Multipliziert man nun diese Werte miteinander, so ergibt sich

$$W = \frac{s}{2\pi \sqrt{s'^2 (s + s')^2 \prod_{K=1}^{K=3} p_K}}$$

$$\prod_{K=1}^{K=3} \left(1 + \frac{\sigma_K}{s' p_K}\right)^{-(s' p_K + \sigma_K)} \prod_{K=1}^{K=3} \left(1 + \frac{\sigma_K}{(s + s') p_K}\right)^{[(s+s') p_K + \sigma_K]}.$$

Vermöge bekannter Vornahmen, die auch zur Herleitung des Bernoullischen Theorems notwendig sind, findet man weiterhin

$$\prod_{K=1}^{K=3} \left( 1 + \frac{\sigma_K}{s' p_K} \right)^{-(s' p_K + \sigma_K)} = e^{-\sum_{K=1}^{K=3} \left( \sigma_K + \frac{\sigma_K^2}{2s' p_K} \right)},$$

$$\prod_{K=1}^{K=3} \left( 1 + \frac{\sigma_K}{(s+s') p_K} \right)^{[s+s'] p_K + \sigma_K} = e^{\sum_{K=1}^{K=3} \left( \sigma_K + \frac{\sigma_K^2}{2(s+s') p_K} \right)},$$

wodurch sich ergibt

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{s}{2\pi s' (s+s') \sqrt{p_1 p_2 p_3}} \\ e^{-\frac{s}{2s'(s+s')} \left( \frac{\sigma_1^2}{p_1} + \frac{\sigma_2^2}{p_2} + \frac{\sigma_3^2}{p_3} \right)}$$

Da wegen

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

und

$$s'_1 + s'_2 + s'_3 = s' p_1 + \sigma_1 + s' p_2 + \sigma_2 + s' p_3 + \sigma_3 \\ = s' (p_1 + p_2 + p_3) + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = s',$$

stets die Bedingung

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

befriedigt werden muss, so hat man eine der Abweichungen durch die beiden anderen auszudrücken. Setzt man daher

$$\sigma_3^2 = (\sigma_1 + \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2,$$

so folgt

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{s}{2\pi s' (s+s') \sqrt{p_1 p_2 p_3}} \\ e^{-\frac{s^2}{s'(s+s')} \left[ \frac{1}{2s} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3} \right) \sigma_1^2 + \frac{1}{2s} \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right) \sigma_2^2 + \frac{1}{s p_3} \sigma_1 \sigma_2 \right]}$$

oder

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{s}{2\pi s'(s+s') \sqrt{p_1 p_2 p_3}} e^{-\frac{s^2}{s'(s+s')} [a_{11}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_2^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2]}$$

Für den Fall von  $n$  Ereignissen hat der Verfasser diese Formel in seiner Abhandlung „Die Hauptsätze der höheren Wahrscheinlichkeitsrechnung bei  $n$  Ereignissen“ im 37. Jahrgange des Ehrenzweigschen Assekuranz-Jahrbuchs veröffentlicht.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{s^2}{s'(s+s')} a_{kl} = b_{kl},$$

so geht die vorstehende Formel über in

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{s}{2\pi s'(s+s') \sqrt{p_1 p_2 p_3}} e^{-b_{11}\sigma_1^2 - b_{22}\sigma_2^2 - 2b_{12}\sigma_1\sigma_2},$$

für welche die Beziehung gilt

$$\frac{s}{2s'(s+s') \sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}.$$

Um vermöge dieses Gesetzes die Wahrscheinlichkeit abzuleiten, dass ein Verlust oder Gewinn eintreten werde, welcher innerhalb der Grenzen

$$\delta > k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 > -\delta$$

liege, hat man die Grenzen des Doppelintegrals

$$\frac{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}{\pi} \iint e^{-b_{11}\sigma_1^2 - b_{22}\sigma_2^2 - 2b_{12}\sigma_1\sigma_2} d\sigma_1 d\sigma_2$$

der vorgeschriebenen Ungleichung entsprechend zu bestimmen und eine der beiden Variablen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  vermöge der Gleichung

$$\Delta = k_1 \sigma_1 \pm k_2 \sigma_2$$

zu eliminieren. Beispielsweise  $\sigma_1 = \frac{1}{k_1} (\Delta \mp k_2 \sigma_2)$  substituierend, bekommt man

$$W(-\delta, \delta) = \frac{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}}{\pi k_1}$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} d\Delta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{b_{11}-\beta}{k_1^2} \Delta^2 - \frac{1}{k_1^2} (\sqrt{\alpha} \sigma_2 + \sqrt{\beta} \Delta)^2} d\Delta d\sigma_2,$$

wobei ist

$$\alpha = \frac{b_{11} k_2^2 + b_{22} k_1^2 \mp 2 b_{12} k_1 k_2}{k_1^2},$$

$$\beta = \frac{(b_{12} k_1 \mp b_{11} k_2)^2}{b_{11} k_2^2 + b_{22} k_1^2 \mp 2 b_{12} k_1 k_2}$$

und

$$\frac{b_{11} - \beta}{k_1^2} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{b_{11} k_2^2 + b_{22} k_1^2 \mp 2 b_{12} k_1 k_2}.$$

Zur Vereinfachung der Integration noch die neue Variable  $\sqrt{\alpha} \sigma_2 + \sqrt{\beta} \Delta = u$  einführend, findet man weiterhin

$$W(-\delta, \delta) = \frac{H}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-H^2 \Delta^2} d\Delta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

und hieraus

$$W(-\delta, \delta) = \frac{2H}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta} e^{-H^2 \delta^2} d\delta,$$

wobei ist

$$H = \sqrt{\frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{b_{11} k_2^2 + b_{22} k_1^2 \mp 2 b_{12} k_1 k_2}}.$$

Auf Grund dieser Wahrscheinlichkeit kann man aber mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

erwarten, dass die Abweichung

$$N(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 (K - V) - \sigma_2 V$$

zwischen die Grenzen

$$\pm \gamma \sqrt{2 s' \left(1 + \frac{s'}{s}\right)} M$$

und die Abweichung

$$N_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 (K_1 - V) + \sigma_2 (K_2 - V)$$

zwischen die Grenzen

$$\pm \gamma \sqrt{2 s' \left(1 + \frac{s'}{s}\right)} M_1$$

fällt.

Für die Praxis ist diese Wahrscheinlichkeitsbestimmung bei weitem nicht so bedeutungsvoll, als man zunächst anzunehmen geneigt sein könnte. Wie

einleuchtet, rückt der Faktor  $1 + \frac{s'}{s}$  der Einheit um so näher, je kleiner die Zahl  $s'$  im Verhältnis zur Zahl  $s$  ist. Nun hat die Praxis eher mit Fällen zu rechnen, in welchen die Zahl  $s'$  der Versicherten bedeutend kleiner ist als die Zahl  $s$ , welche letztere durch das Zusammenfassen mehrerer Beobachtungsjahre gefunden wurde. Vernachlässigt man aber den Quotienten  $\frac{s'}{s}$ , so gelangt man zu der gebräuchlicheren Methode des vorstehenden Abschnitts.

### Drittes Kapitel.

## Das Risiko $m$ verschiedener Gruppen gleichartiger Verträge.

### I.

Das im vorhergehenden Kapitel für eine Gruppe gleichartiger Verträge Besprochene behält auch Gültigkeit, wenn ein Unternehmer  $m$  verschiedene Gruppen von gleichartigen Verträgen unterhält. Die als sehr gross zu behandelnden Anzahlen der Verträge, welche die einzelnen Gruppen bilden, seien der Reihe nach

$$s_{(1)}, s_{(2)}, \dots, s_{(m-1)}, s_{(m)}.$$

Bezeichnet alsdann  $K$  eine Zahl aus der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis  $m$ , so ist

$$\varphi_K(\Delta_K) = \frac{H_K}{\sqrt{\pi}} e^{-H_K^2 \Delta_K^2} \quad (1)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust oder Gewinn der  $K^{\text{ten}}$  Gruppe gerade  $\Delta_K$  betrage. Die Präzision  $H_K$  dieser Wahrscheinlichkeit ist dabei gleich

$$H_K = \frac{1}{\sqrt{2 s_{(K)}^{(K)} M^2}} = \frac{1}{\sqrt{2 M_{(K)}^2}}. \quad (2)$$

Infolge der Kenntnis des Wahrscheinlichkeitsgesetzes (1) wird unsere Aufgabe auf die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit zurückgeführt, dass die Ungleichung

$$-u < \sum_{K=1}^{K=m} \Delta_K < u \quad (3)$$

erfüllt werde. Über die Lösung dieser in der Methode der kleinsten Quadrate eine grosse Rolle spielende Aufgabe liesse sich allein eine Abhandlung schreiben. Hier werde eine Lösung auf Grund der leicht verständlichen, von Gauss herrührenden Formel <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \int_{-u}^u P(u) du &= \int_{-u}^u g_1(u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m) du \\ &\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\Delta_2) d\Delta_2 \int_{-\infty}^{\infty} g_3(\Delta_3) d\Delta_3 \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\Delta_m) d\Delta_m \end{aligned} \quad (4)$$

angestrebt. Wendet man auf die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $g_1(u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m)$ , welche aus  $g_1(\Delta_1)$  vermöge der Substitution  $\Delta_1 = u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m$  hervorgeht, die bekannte Fouriersche Formel an

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{uyi} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xyi} f(x) dx,$$

---

<sup>1)</sup> Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, von Carl Friedrich Gauss. In deutscher Sprache herausgegeben von Dr. A. Börsch und Dr. P. Simon, Berlin, 1887.

die man beispielsweise auch bei Dienger (Die Differential- und Integralrechnung, Stuttgart, 1862) findet, so erhält man

$$\begin{aligned} & \varphi_1(u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m) y i} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y \Delta_1 i} \varphi_1(\Delta_1) d\Delta_1. \end{aligned}$$

Setzt man nun diesen Wert ein in die Gaußsche Formel, so ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_{-u}^u P(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^u du \int_{-\infty}^{\infty} e^{u y i} dy \prod_{K=1}^{K=m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y \Delta_K i} \varphi_K(\Delta_K) d\Delta_K, \quad (5) \end{aligned}$$

zu welcher man auch durch die weniger einwandsfreie Darstellung des Engländers Ellis gelangen würde, die F. W. Hultman in den „Minsta Qvadratmetoden“ wiedergegeben hat.

Um die Formel (5) einer Lösung zuzuführen, nehme man die bereits von Laplace herrührende Vereinfachung vor

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_K(\Delta_K) e^{-y \Delta_K i} d\Delta_K = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_K(\Delta_K) (1 - y \Delta_K i - \frac{1}{2} y^2 \Delta_K^2 - \dots) d\Delta_K \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} y^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_K(\Delta_K) \Delta_K^2 d\Delta_K \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} M_K^2 y^2 \approx e^{-\frac{1}{2} M_K^2 y^2}, \end{aligned}$$



mittelst derer man erhält

$$\int_{-u}^u P(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^u du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \Sigma M_K^2 y^2 - u y i} dy.$$

Weil nun aber ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \Sigma M_K^2 y^2 - u y i} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2 \Sigma M_K^2}} e^{-\frac{u^2}{2 \Sigma M_K^2}},$$

so folgt weiter

$$\int_{-u}^u P(u) du = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2 \Sigma M_K^2}} \int_{-u}^u e^{-\frac{u^2}{2 \Sigma M_K^2}} du.$$

Man kann somit mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

erwarten, dass der Gesamtverlust oder -Gewinn aller Verträge innerhalb der Grenzen

$$\pm u = \pm \gamma \sqrt{2 \Sigma M_K^2}$$

liegen wird. Die Grösse

$$K = \gamma \sqrt{2 \Sigma M_K^2},$$

welche für den Fall  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$  auch Landré (Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung) mitgeteilt hat, ist daher als das Risiko des ganzen Bestandes zu bezeichnen.

*Anmerkung:* Würde man auf die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $\varphi_1(u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m)$  die andere Fouriersche Formel

$$\begin{aligned} & \varphi_1(u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(u - \Delta_2 - \Delta_3 - \dots - \Delta_m) y dy \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\Delta_1) \cos y \Delta_1 d\Delta_1 \end{aligned}$$

angewendet haben, so hätte sich nach einigen Umformungen die auch aus der Besselschen Formel hervorgehende Beziehung ergeben

$$\begin{aligned} & \int_{-u}^u P(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^u du \int_{-\infty}^{\infty} \cos uy dy \prod_{K=1}^{K=m} \varphi_K(\Delta_K) \cos(y \Delta_K) d\Delta_K, \end{aligned}$$

aus welcher weiterhin folgt

$$\int_{-u}^u P(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum M_K^2 y^2} \frac{\sin uy}{y} dy.$$

Wie beiläufig noch bemerkt werde, findet man einige elementare Ausführungen über das Besselsche Fehlergesetz bei G. Zachariae (Die mindeste Kvadraters Methode, Nyborg, 1871).

## II.

Eine andere, in den Rahmen dieses Kapitels gehörige Wahrscheinlichkeitsbestimmung hat Bienaymé ersonnen. Überträgt man seine auf Fehler von Messungen Bezug nehmende Untersuchung auf die hier angestellten Betrachtungen, so handelt es sich um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit  $\Psi(\gamma)$ , dass der Verlust oder Gewinn in der  $K^{\text{ten}}$  Gruppe der Verträge

nicht grösser ist als  $\frac{\gamma}{H_K}$ . Die Lösung dieser Aufgabe, welche in einer grossen Zahl von Schriften Erwähnung gefunden hat, so auch bei Lindelöf (Über die Ermittlung der Genauigkeit der Beobachtungen bei der Analyse periodischer Funktionen und in der Methode der kleinsten Quadrate, Helsingfors, 1901), wird darauf zurückgeführt, das  $m$ -fache Integral

$$\frac{\prod_{K=1}^{K=m} H_K}{(\sqrt{\pi})^m} \int_{(m)} e^{-\sum H_K^2 \Delta_K^2} \prod_{K=1}^{K=m} d\Delta_K \quad (1)$$

derart zu integrieren, dass stets der Ungleichung

$$-\sqrt{\gamma} < \sqrt{H_1^2 \Delta_1^2 + H_2^2 \Delta_2^2 + \dots + H_m^2 \Delta_m^2} < \sqrt{\gamma} \quad (2)$$

oder der mit dieser gleichbedeutenden Ungleichung

$$0 < H_1^2 \Delta_1^2 + H_2^2 \Delta_2^2 + \dots + H_m^2 \Delta_m^2 < \gamma^2 \quad (3)$$

genügt wird. Findet nämlich (3) statt, dann besteht um so eher die Ungleichung

$$H_K^2 \Delta_K^2 < \gamma^2,$$

aus welcher folgt

$$\Delta_K < \pm \frac{\gamma}{H_K}.$$

Um die weitläufige Berechnung des vorgelegten Integrals zu umgehen, stütze man sich auf eine im zweiten Teile des Schlömilchschen Kompendiums der höheren Analysis abgeleitete Formel, nach welcher man die allgemein gültige Beziehung aufstellen kann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{(m)} f(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2) dy_1 dy_2 \dots dy_m = \\ = \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\gamma f(u^2) u^{m-1} du. \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 < y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 < \gamma^2$$

Bei der Herleitung derselben hat man, wie schon Bienaymé hervorhob, jede Integration doppelt zu zählen, weil  $u$  sowohl einen positiven als auch einen negativen Wert haben kann. Wendet man nun die vorstehende Formel auf das Integral (1) an, dabei  $H_K \Delta_K = y_K$  setzend, so erhält man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\Psi(\gamma) = \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\gamma e^{-u^2} u^{m-1} du. \quad (5)$$

Sehr anregend gestaltet sich die Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeit mit Zuhilfenahme des bereits angewandten Diskontinuitätsfaktors

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{+yx i} \frac{\sin ux}{x} dx,$$

welcher den Wert eins hat, solange die Ungleichung  $y < u$  besteht und zu null wird, wenn  $y > u$  ist. (Vergleiche hierzu auch L. Natani, „Die höhere Analysis“, Berlin, 1866.)

Um die Wahrscheinlichkeit des Bestehens der Ungleichung

$$0 < H_1^2 \Delta_1^2 + H_2^2 \Delta_2^2 + \dots + H_m^2 \Delta_m^2 < \gamma^2$$

zu ermitteln, multipliziere man das Produkt der Wahrscheinlichkeitenintegrale

$$\prod_{K=1}^{K=m} \frac{H_K}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-H_K^2 \Delta_K^2} d\Delta_K = 1$$

mit dem den obigen Angaben entsprechenden Faktor

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{(H_1^2 \Delta_1^2 + H_2^2 \Delta_2^2 + \dots + H_m^2 \Delta_m^2) y i} \frac{\sin \gamma^2 y}{y} dy,$$

so bekommt man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \gamma^2 y}{y} dy \prod_{K=1}^{K=m} \frac{H_K}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-H_K^2 \Delta_K^2 (1-y i)} d\Delta_K \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \gamma^2 y}{y} \frac{dy}{(1-y i)^{\frac{m}{2}}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\gamma^2} dz \int_0^{\infty} \frac{\cos zy}{(1-y i)^{\frac{m}{2}}} dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Mit Hilfe der Formel

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-(1-y i)x} dx = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{(1-y i)^{\frac{m}{2}}}$$

findet man nun ferner

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos zy}{(1-y i)^{\frac{m}{2}}} dy = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} \cos zy dy \int_0^{\infty} u^{\frac{m}{2}-1} e^{-(1-y i)u} du$$

und hieraus vermöge weiterer Umformungen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos zy}{(1-yi)^{\frac{m}{2}}} dy = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} \cos zy \, dy \int_0^{\infty} u^{\frac{m}{2}-1} e^{-u} \cos yu \, du.$$

Setzt man diesen Wert ein in die Formel für die Wahrscheinlichkeit  $\Psi(\gamma)$ , so folgt

$$\Psi(\gamma) = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\gamma^2} dz \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zy \, dy \int_0^{\infty} u^{\frac{m}{2}-1} e^{-u} \cos yu \, du.$$

Wendet man auf diesen Ausdruck noch die bekannte Fouriersche Formel an

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zy \, dy \int_0^{\infty} f(u) \cos yu \, du,$$

die man beispielsweise auch bei Cournot (Elementarbuch der Theorie der Funktionen, deutsche Ausgabe, Darmstadt, 1845) findet, so gelangt man zu dem Ausdrucke

$$\Psi(\gamma) = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{m}{2}-1} e^{-z} dz, \quad (7)$$

welcher die gesuchte Wahrscheinlichkeit darstellt. Setzt man nämlich in demselben  $z = u^2$ , so geht die Formel (7) in die Formel (5) über.

## Viertes Kapitel.

### Das Risiko $s$ von einander unterschiedenen Verträge.

#### 1. Anwendung des Tschebyscheffschen Theorems.

Wie man schon seit geraumer Zeit weiss, lässt sich das Risiko  $s$  von einander unterschiedenen Verträge einfacherer Beschaffenheit mittelst des ersten Tschebyscheffschen Satzes ermitteln. Czuber bespricht diesen Gegenstand auf Seite 191 und 192 der ersten Auflage seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung, während die Ausführungen im § 19 (Das Risiko beim Spiel) der Markoffschen Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls auf die Anwendbarkeit des Tschebyscheffschen Satzes hinweisen. Immerhin mag eine auf die von uns betrachteten Verträge besonders eingerichtete Darstellung den Ausgang unserer weiteren Betrachtungen bilden.

Es seien  $s$  von einander unterschiedene Verträge vorhanden. Beim  $\kappa^{\text{ten}}$  Verträge ist zu erwarten mit der Wahrscheinlichkeit

$${}^{(\kappa)}p_1 \text{ der Verlust } {}^{(\kappa)}K - {}^{(\kappa)}V - {}^{(\kappa)}H$$

$$\text{oder der Verlust } {}^{(\kappa)}K_1 - {}^{(\kappa)}V - {}^{(\kappa)}H,$$

$${}^{(\kappa)}p_2 \text{ der Gewinn } {}^{(\kappa)}V + {}^{(\kappa)}H$$

$$\text{oder der Verlust } {}^{(\kappa)}K_2 - {}^{(\kappa)}V - {}^{(\kappa)}H,$$

$${}^{(\kappa)}p_3 \text{ der Gewinn } {}^{(\kappa)}H.$$

Entsprechend unseren früheren Vorausschickungen sei

$$^{(\kappa)}p_1 + ^{(\kappa)}p_2 + ^{(\kappa)}p_3 = 1$$

und ferner für die erste Vertragsart

$$\begin{aligned} & ^{(\kappa)}p_1 (^{(\kappa)}K - ^{(\kappa)}V - ^{(\kappa)}H) - \\ & - [ ^{(\kappa)}p_2 (^{(\kappa)}V + ^{(\kappa)}H) + ^{(\kappa)}p_3 ^{(\kappa)}H ] = 0, \end{aligned}$$

für die zweite Vertragsart aber

$$\begin{aligned} & ^{(\kappa)}p_1 (^{(\kappa)}K_1 - ^{(\kappa)}V - ^{(\kappa)}H) + \\ & + ^{(\kappa)}p_2 (^{(\kappa)}K_2 - ^{(\kappa)}V - ^{(\kappa)}H) - ^{(\kappa)}p_3 ^{(\kappa)}H = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun mit  $S$  einen der möglichen Gesamtverluste oder Gewinne, welcher mit der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} & ^{(1)}p_{i_1} ^{(2)}p_{i_2} ^{(3)}p_{i_3} \dots ^{(K)}p_{i_K} \dots \\ & (i_\kappa = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

eintreten kann, so stellt

$$\Sigma ^{(s)} S^2 ^{(1)}p_{i_1} ^{(2)}p_{i_2} ^{(3)}p_{i_3} \dots ^{(K)}p_{i_K} \dots$$

die mathematische Hoffnung der Quadrate aller nur möglichen Verluste oder Gewinne dar. Führt man die Summation in bezug auf den ersten Vertrag aus, so folgt

$$\begin{aligned} & \Sigma ^{(s-1)} \left( ^{(1)}p_1 ^{(1)}S_1^2 + ^{(1)}p_2 ^{(1)}S_2^2 + \right. \\ & \left. + ^{(1)}p_3 ^{(1)}S_3^2 \right) ^{(2)}p_{i_2} ^{(3)}p_{i_3} \dots ^{(K)}p_{i_K} \dots \end{aligned}$$

Es lassen sich aber die Verluste oder Gewinne  $^{(1)}S_1, ^{(1)}S_2, ^{(1)}S_3$  zerlegen in die den Wahrscheinlichkeiten  $^{(1)}p_1, ^{(2)}p_2, ^{(1)}p_3$  entsprechenden Erfolge des ersten



Vertrages und einen unbestimmten, vorderhand konstanten Teil, welcher von den Wahrscheinlichkeiten des ersten Vertrages unabhängig ist. Setzt man daher beispielsweise

$${}^{(1)}S_1 = ({}^{(1)}K - {}^{(1)}V - {}^{(1)}H) + {}^{(2)}S$$

$${}^{(1)}S_2 = -({}^{(1)}V + {}^{(1)}H) + {}^{(2)}S$$

$${}^{(1)}S_3 = -{}^{(1)}H + {}^{(2)}S,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \Sigma^{(s-1)} \left\{ {}^{(1)}p_1 [({}^{(1)}K - {}^{(1)}V - {}^{(1)}H)^2 + \right. \\ & \quad + 2({}^{(1)}K - {}^{(1)}V - {}^{(1)}H)({}^{(2)}S + {}^{(2)}S^2] \\ & \quad + {}^{(1)}p_2 [({}^{(1)}V + {}^{(1)}H)^2 - 2({}^{(1)}V + {}^{(1)}H)({}^{(2)}S + {}^{(2)}S^2] \\ & \quad \left. + {}^{(1)}p_3 [{}^{(1)}H^2 - 2{}^{(1)}H({}^{(2)}S + {}^{(2)}S^2)] \right\} \\ & \quad {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(K)}p_{i_K} \dots \\ & = \Sigma^{(s-1)} \{ {}^{(1)}M^2 + {}^{(2)}S^2 \} {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(K)}p_{i_K} \dots \end{aligned}$$

Wiederholt man nun die Summation in bezug auf den zweiten Vertrag, so bekommt man

$$\Sigma^{(s-2)} \{ {}^{(1)}M^2 + {}^{(2)}M^2 + {}^{(3)}S^2 \} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(K)}p_{i_K} \dots$$

und gelangt durch Fortsetzung des Verfahrens zu der Gleichung

$$\begin{aligned} & \Sigma^{(s)} S^2 {}^{(1)}p_{i_1} {}^{(2)}p_{i_2} {}^{(3)}p_{i_3} \dots {}^{(K)}p_{i_K} \dots = \\ & = {}^{(1)}M^2 + {}^{(2)}M^2 + {}^{(3)}M^2 + \dots + {}^{(K)}M^2 + \dots, \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass das Zeichen  $\Sigma^{(s)}$  nur auf die Anzahl der Verträge bezug nimmt, während mit

der Behandlung eines einzigen Vertrages sogleich 3 Summationen ausgeführt werden. Im ganzen kann aber das Unternehmen  $3^8$  verschiedene Erfolge bzw. Misserfolge zeitigen. Die weitere Herleitung des Theorems unterscheidet sich nicht von den Darstellungen, wie man sie bei Czuber, Sabudski oder Markoff findet.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit

$$^{(1)}p_{i_1} \ ^{(2)}p_{i_2} \ ^{(3)}p_{i_3} \dots \ ^{(\kappa)}p_{i_\kappa} \dots$$

mit  $P_{(\lambda)}$  und den ihr entsprechenden Gewinn oder Verlust mit  $S_{(\lambda)}$ , so kann man für die gefundene Beziehung auch schreiben

$$\sum P_{(\lambda)} S_{(\lambda)}^2 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=8} {}^{(\kappa)}M^2,$$

woraus folgt

$$\frac{\sum P_{(\lambda)} S_{(\lambda)}^2}{\sum_{\kappa=1}^{\kappa=8} {}^{(\kappa)}M^2} = 1.$$

Vermöge einer vorläufig unbestimmt gelassenen Grösse  $t$  kann man die neue Gleichung bilden

$$\frac{\sum P_{(\lambda)} S_{(\lambda)}^2}{t^2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=8} {}^{(\kappa)}M^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Legt man nun der Zahl  $t$  die Eigenschaft bei, dass eine Anzahl der Quotienten

$$\frac{S_{(\lambda)}^2}{t^2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=8} {}^{(\kappa)}M^2}$$

der Ungleichung genügen

$$\frac{S_{(\lambda)}^2}{t^2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}M^2} < 1, \quad (\text{a})$$

die übrig bleibenden Quotienten aber der Ungleichung

$$\frac{S_{(\lambda)}^2}{t^2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}M^2} \geq 1 \quad (\text{b})$$

entsprechen, so ist damit ein Mittel zur Lösung gefunden. Setzt man nämlich die Quotienten, welche die Ungleichung (a) befriedigen, gleich 0, und setzt für die Quotienten, welche der Ungleichung (b) genügen, den Wert 1, so muss die Summe  $W_1$  der Wahrscheinlichkeiten, welche zu den Quotienten der Ungleichung (b) gehören, der Ungleichung unterliegen

$$W_1 < \frac{1}{t^2}.$$

Bezeichnet man die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ungleichung (a) mit  $W$ , so muss sein

$$W + W_1 = 1.$$

Weil nun aber ist

$$W + \frac{1}{t^2} > 1,$$

so folgt daraus, dass ist

$$W > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Endlich noch  $t^2 = 2\gamma^2$  setzend, gelangt man zu dem Satze:

Mit einer Wahrscheinlichkeit

$$W > 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

darf man erwarten, dass der eintretende Gesamtverlust oder Gewinn durch die Ungleichung

$$S < \pm \gamma \sqrt{2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}M^2}$$

begrenzt wird.

## 2. Die Berechnung des Risikos mittelst der Wahrscheinlichkeit der Abweichungen, deren Summe oder Differenz eine Abweichung vom rechnungsmässigen Verlaufe des Unternehmens erzeugt.

Behufs Abkürzung der Darstellung mögen auch in diesem Teile beide Vertragsarten gemeinsam betrachtet werden.

Setzt man

$$K_1 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}k_1 + u, \quad K_2 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_2 + v,$$

so wird

$$\begin{aligned} K_1 \pm K_2 &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} ({}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}k_1 \pm {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_2) + (u \pm v) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}H + (u \pm v). \end{aligned}$$

Um nun die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens der einen Verlust oder Gewinn erzeugenden Grössen  $K_1$  und  $K_2$  herzustellen, welche gleichbedeutend ist mit der Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Stattfindens der Abweichungen  $u$  und  $v$ , kann man von den Verallgemeinerungen ausgehen, welche für die Cauchyschen und Laurentschen Potenzreihen gegeben worden sind. (Siehe z. B. Fricke, Analytisch-Funktionentheoretische Vorlesungen.) Nach diesen werden die Koeffizienten  $A_{K_1, K_2}$  und  $A_{K_1, -K_2}$  der nach beiden Seiten ins Unendliche laufenden Potenzreihe  $f_{(x_1, x_2)}$  dargestellt durch die symbolischen Doppelintegrale

$$A_{K_1, K_2} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \int_{(C)} f_{(x_1, x_2)} x_1^{-(K_1+1)} x_2^{-(K_2+1)} dx_1 dx_2 \quad (1)$$

$$A_{K_1, -K_2} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \int_{(C)} f_{(x_1, x_2)} x_1^{-(K_1+1)} x_2^{(K_2-1)} dx_1 dx_2. \quad (2)$$

Setzt man in diesen Ausdrücken

$$x_1 = e^{\vartheta_1 i} \text{ und } x_2 = e^{\vartheta_2 i},$$

so werden die unteren Grenzen beider Integrale 0, während für die oberen Grenzen in beiden Fällen  $2\pi$  zu nehmen ist.

Durch diese Vornahme findet man

$$A_{K_1, K_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\vartheta_1 i}, e^{\vartheta_2 i}) e^{-(k_1 \vartheta_1 + k_2 \vartheta_2) i} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \quad (1^a)$$

$$A_{K_1, -K_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\vartheta_1 i}, e^{\vartheta_2 i}) e^{-(k_1 \vartheta_1 - k_2 \vartheta_2) i} d\vartheta_1 d\vartheta_2. \quad (2^a)$$

Man erkennt nun sogleich die Verwandtschaft dieser Ergebnisse mit dem durch Verallgemeinerung des Poissonschen Theorems auffindbaren Wahrscheinlichkeitsausdrucke

$$P_{(K_1, K_2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\kappa=1}^{\kappa=8} ({}^{(\kappa)}p_1 e^{({}^{(\kappa)}k_1 x_1 i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm({}^{(\kappa)}k_2 x_2 i} + {}^{(\kappa)}p_3) e^{-(K_1 x_1 \pm K_2 x_2) i} dx_1 dx_2, \quad (3)$$

auf welchen sich unsere weiteren Berechnungen stützen sollen, weil die Anpassung des durch die Formeln (1<sup>a</sup>) und (2<sup>a</sup>) veranschaulichten Theorems auf das hier zu behandelnde Problem immerhin zu weitläufigeren Untersuchungen führt.

Zur Abkürzung schreibend

$$\prod_{\kappa=1}^{\kappa=8} ({}^{(\kappa)}p_1 e^{({}^{(\kappa)}k_1 x_1 i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm({}^{(\kappa)}k_2 x_2 i} + {}^{(\kappa)}p_3) e^{-(K_1 x_1 \pm K_2 x_2) i} = X_{(x_1, x_2)} e^{-(K_1 x_1 \pm K_2 x_2) i} = Y_{(x_1, x_2)},$$

werde die näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_{(x_1, x_2)} dx_1 dx_2$$

mittelst der Laplaceschen Formel

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_1'} \int_{a_2}^{a_2'} Y_{(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 = \\ & = \frac{2\pi Y(x_1^0, x_2^0)}{\sqrt{\left(\frac{\delta^2 \ln Y}{\delta x_1^2}\right)_{x_1^0} \left(\frac{\delta^2 \ln Y}{\delta x_2^2}\right)_{x_2^0} - \left(\frac{\delta^2 \ln Y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)_{x_1^0 x_2^0}^2}} \end{aligned}$$

vorgenommen, deren Herleitung man auch bei Meyer (Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von Czuber) findet.

Um in Kürze zu einem brauchbaren Resultate zu gelangen, führe man für  $X_{(x_1, x_2)}$  den auf bekannte Weise darstellbaren Näherungsausdruck ein

$$\begin{aligned} \ln X_{(x_1, x_2)} = & \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}k_1 x_1 \pm {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_2 x_2 \right) i - \\ & - \frac{1}{2} \left[ \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}p_1 (1 - {}^{(\kappa)}p_1) {}^{(\kappa)}k_1^2 \right] x_1^2 \\ & - \frac{1}{2} \left[ \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}p_2 (1 - {}^{(\kappa)}p_2) {}^{(\kappa)}k_2^2 \right] x_2^2 \pm \\ & \pm \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left[ {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_1 {}^{(\kappa)}k_2 \right] x_1 x_2. \end{aligned}$$

Vermöge desselben erhält man

$$\begin{aligned} \ln Y_{(x_1, x_2)} = & - \frac{1}{2} a_{11} x_1^2 - \frac{1}{2} a_{22} x_2^2 \pm a_{12} x_1 x_2 - \\ & - u x_1 i + v x_2 i, \end{aligned}$$

wobei ist

$$\begin{aligned} a_{11} = & \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}p_1 (1 - {}^{(\kappa)}p_1) {}^{(\kappa)}k_1^2, \\ a_{22} = & \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}p_2 (1 - {}^{(\kappa)}p_2) {}^{(\kappa)}k_2^2, \\ a_{12} = & \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left[ {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_1 {}^{(\kappa)}k_2 \right]. \end{aligned}$$

Diese angenäherte Funktion von  $x_1$  und  $x_2$  diene nun zur Auswertung der Laplaceschen Formel (4). Um das Maximum von  $Y_{(x_1, x_2)}$  beziehungsweise von  $\ln Y_{(x_1, x_2)}$  zu finden, werden die Differentialquotienten

$$\frac{\delta \ln Y_{(x_1^0, x_2^0)}}{\delta x_1^0} = -a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 - ui = 0$$

$$\frac{\delta \ln Y_{(x_1^0, x_2^0)}}{\delta x_2^0} = -a_{22}x_2^0 + a_{12}x_1^0 + vi = 0$$

gebildet, aus welchen man findet

$$x_1^0 = -\frac{a_{22}u + a_{12}v}{a_{12}a_{22} - a_{12}^2}i, \quad x_2^0 = +\frac{a_{11}v + a_{12}u}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}i.$$

Substituiert man nun diese Werte in  $\ln Y_{(x_1^0, x_2^0)}$ , so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \ln Y_{(x_1^0, x_2^0)} &= \frac{1}{2}a_{11}\left(\frac{a_{22}u + a_{12}v}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}a_{22}\left(\frac{a_{11}v + a_{12}u}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right)^2 - a_{22}\frac{(a_{22}u + a_{12}v)(a_{11}v + a_{12}u)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2} \\ &- u\left(\frac{a_{22}u + a_{12}v}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right) - v\left(\frac{a_{11}v + a_{12}u}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right) \end{aligned}$$

und hieraus nach mehrfachen Umformungen

$$\ln Y_{(x_1^0, x_2^0)} = -\frac{a_{22}u^2 + a_{11}v^2 + 2a_{12}uv}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}.$$



Weiterhin folgt

$$\frac{\delta^2 \ln Y_{(x_1, x_2)}}{\delta x_1^2} = -a_{11}, \quad \frac{\delta^2 \ln Y_{(x_1, x_2)}}{\delta x_2^2} = -a_{22},$$

$$\frac{\delta^2 \ln Y_{(x_1, x_2)}}{\delta x_1 \delta x_2} = \pm a_{12},$$

daher ist

$$\left( \frac{\delta^2 \ln Y_{(x_1, x_2)}}{\delta x_1^2} \right)_{x_1^0, x_2^0} \left( \frac{\delta^2 \ln Y_{(x_1, x_2)}}{\delta x_2^2} \right)_{x_1^0, x_2^0} -$$

$$- \left( \frac{\delta^2 \ln Y_{(x_1, x_2)}}{\delta x_1 \delta x_2} \right)_{x_1^0, x_2^0} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2.$$

Es ergibt somit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit der Ausdruck

$$P_{(u, v)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}} e^{-\frac{a_{22} u^2 + a_{11} v^2 + 2 a_{12} u v}{2(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}}. \quad (5)$$

Indem man aus diesem etwa  $u$  vermöge der Gleichung  $\Delta = u \pm v$  eliminiert, erhält man die Wahrscheinlichkeit

$$P_{(u, v)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}} e^{-\frac{a_1 \Delta^2 + (\sqrt{a_2} v + \sqrt{a_3} \Delta)^2}{2(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}},$$

in welcher ist

$$\alpha_1 = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11} + a_{22} + 2 a_{12}}, \quad \sqrt{a_2} = \sqrt{a_{11} + a_{22} + 2 a_{12}},$$

$$\sqrt{a_3} = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} + 2 a_{12}}}.$$

Setzt man noch

$$\frac{\sqrt{a_2} v + \sqrt{a_3} \Delta}{\sqrt{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}} = t,$$

mithin

$$dv = \sqrt{\frac{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{11} + a_{22} + 2a_{12}}} dt,$$

und beachtet gleichzeitig, dass ist

$$\frac{a_1}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{1}{2(a_{11} + a_{22} + a_{12})},$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \sqrt{\frac{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{11} + a_{22} + 2a_{12}}} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(a_{11} + a_{22} + 2a_{12})}}, \end{aligned}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned} P_{(\Delta)} &= \frac{\eta}{\pi} e^{-\eta^2 \Delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2 \Delta^2}, \end{aligned}$$

worin  $\eta$  nach der Formel zu berechnen ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^2} &= 2(a_{11} + a_{22} + 2a_{12}) \\ &= 2 \sum_{K=1}^{K=8} \left[ \begin{matrix} (s) \\ p_1(1 - (s)p_1) \end{matrix} \begin{matrix} (s) \\ k_1^2 \end{matrix} + \begin{matrix} (s) \\ p_2(1 - (s)p_2) \end{matrix} \begin{matrix} (s) \\ k_2^2 \end{matrix} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \begin{matrix} (s) \\ p_1 \end{matrix} \begin{matrix} (s) \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} (s) \\ k_1 \end{matrix} \begin{matrix} (s) \\ k_2 \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Dabei ist das Minuszeichen zu nehmen, sofern  $\Delta = u + v$ , hingegen das Pluszeichen, wenn  $\Delta = u - v$  ist.

### 3. Unmittelbare Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder Gewinnes.

1. So anregend die im vorangehenden Abschnitte gegebene Darstellung auch ist, so kann man sie von dem Vorwurfe der Weitläufigkeit nicht völlig freisprechen. Zweifellos verdient ein Verfahren, welches die unmittelbare Berechnung eines Verlustes oder Gewinnes

$$K = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}H \pm \Delta$$

gestattet, den Vorzug. Ein solches ist durch das Laplace-Poissonsche Integral

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} X_{(x)} e^{-Kxi} dx \quad (1)$$

oder

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{(x)} e^{-Kxi} dx \quad (1^a)$$

gegeben, über dessen Entstehung hinweggegangen werden kann, weil dieselbe für  $s$  einander gleiche Verträge bereits besprochen wurde. Für einfachere Versicherungsformen gibt die Darstellung dieser Integrale auch Küttner (Das Risiko der Lebensversicherungsanstalten und Unterstützungskassen, Berlin, 1906). Für die erste der hier betrachteten Vertragsarten ist

$$X_{(x)} = \prod_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 e^{({}^{(\kappa)}c_1 x i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{-({}^{(\kappa)}c_2 x i} + {}^{(\kappa)}p_3 \right),$$

hingegen für die zweite Vertragsgattung

$$X_{(x)} = \prod_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 e^{(\kappa)\zeta_1 x i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{(\kappa)\zeta_2 x i} + {}^{(\kappa)}p_3 \right).$$

Beide erzeugenden Funktionen lassen sich unter der gemeinsamen Form

$$X_{(x)} = \prod_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 e^{(\kappa)k_1 x i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm (\kappa)k_2 x i} + {}^{(\kappa)}p_3 \right)$$

darstellen, bei deren Anwendung man zu setzen hat

$$K = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}H \pm \Delta = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}k_1 \pm {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_2 \right) \pm \Delta.$$

In Übereinstimmung mit diesen Erörterungen lassen sich den Ausdrücken (1) und (1<sup>a</sup>) auch die Formen geben

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \prod_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 e^{(\kappa)k_1 - (\kappa)H)x i} + \right. \\ \left. + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm (\kappa)k_2 - (\kappa)H)x i} + {}^{(\kappa)}p_3 e^{- (\kappa)H x i} \right) e^{\pm \Delta x i} dx \quad (\text{I})$$

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 e^{(\kappa)k_1 - (\kappa)H)x i} + \right. \\ \left. + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm (\kappa)k_2 - (\kappa)H)x i} + {}^{(\kappa)}p_3 e^{- (\kappa)H x i} \right) e^{\pm \Delta x i} dx \quad (\text{I}^a).$$

In seiner früheren, diesem Gegenstande gewidmeten Abhandlung hat der Verfasser die Übereinstimmung der Formeln (1<sup>a</sup>) und (I<sup>a</sup>) ausführlich besprochen.

Zur näherungsweise Berechnung der in den Ausdrücken (1) und (1<sup>a</sup>) vorkommenden Integrale gibt es verschiedene Verfahren. Erstlich kann man sich der einfachen Umwandlungsmethode bedienen, wie sie im dritten Abschnitte des zweiten Kapitels zur Anwendung kam. Fernerhin bietet aber die Laplacesche Näherungsformel

$$\int_a^b Y_{(x)} dx = \frac{\sqrt{\pi} Y_{(x_0)}}{\sqrt{-\frac{1}{2} \left( \frac{d^2 \ln Y_{(x)}}{dx^2} \right)_{x=x_0}}}, \quad (2)$$

deren Entstehung auch Poisson und Meyer gezeigt haben, einen Lösungsweg. In Übereinstimmung mit den Formeln (1) und (1<sup>a</sup>) setzend

$$Y_{(x)} = X_{(x)} e^{-\left( \sum_{\kappa=1}^{\kappa=i} {}^{(\kappa)}H \pm A \right) x i}$$

führe man für  $Y_{(x)}$  die auf bekannte Weise herleitbare Näherungsfunktion ein

$$Y_{(x)} = e^{\mp A x i - \frac{1}{2} M^2 x^2} \quad (3)$$

in welcher bedeutet

$$M^2 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=8} [ {}^{(\kappa)}p_1 (1 - {}^{(\kappa)}p_1) {}^{(\kappa)}k_1^2 + {}^{(\kappa)}p_2 (1 - {}^{(\kappa)}p_2) {}^{(\kappa)}k_2^2 \pm 2 {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_1 {}^{(\kappa)}k_2 ]. \quad (4)$$

Um den Wert  $x_0$  zu erhalten, welcher  $Y_{(x)}$  zu einem Maximum macht, setze man

$$\frac{d \ln Y_{(x)}}{dx} = 0, \quad (5)$$

man erhält sodann aus

$$\frac{d \ln Y_{(x_0)}}{dx_0} = + \Delta i - M^2 x_0 = 0:$$

$$x_0 = + \frac{\Delta i}{M^2}.$$

Substituiert man diesen Wert in (3), so folgt

$$Y_{(x_0)} = e^{+ \Delta \left( + \frac{\Delta i}{M^2} \right) i - \frac{1}{2} M^2 \left( + \frac{\Delta i}{M^2} \right)^2}$$

$$= e^{-\frac{\Delta^2}{M^2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{M^2}} = e^{-\frac{\Delta^2}{2M^2}}. \quad (6)$$

Aus  $\frac{d \ln Y_{(x)}}{dx}$  findet man durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2 \ln Y_{(x)}}{dx^2} = - M^2 \quad (7)$$

und mithin

$$\left( \frac{d^2 \ln Y_{(x)}}{dx^2} \right)_{x=x_0} = - M^2 \quad (8)$$

Setzt man die Werte (6) und (8) ein in die durch Verbindung von (1) bzw. (1<sup>a</sup>) und (2) entstehende Formel

$$P_{(\Delta)} = \frac{Y_{(x_0)}}{\sqrt{\pi} \sqrt{-2 \left( \frac{d^2 \ln Y_{(x)}}{dx^2} \right)_{x=x_0}}}, \quad (9)$$

so erhält man für die Wahrscheinlichkeit  $P_{(\Delta)}$  das bekannte Gesetz

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2M^2}} e^{-\frac{\Delta^2}{2M^2}}. \quad (10)$$

2. Ein anregendes und in einigem einwandfreieres Verfahren zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P_{(A)}$  nach dem Laplaceschen Gedankengange hat Arany in seiner Abhandlung „Ein Beitrag zur Laplaceschen Theorie der erzeugenden Funktion“ (Fonction génératrice) im 2. Hefte des 9. Bandes der versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen, im Hinblick auf einfachere Fälle besprochen.

Mittelst der aus

$$Y'_{(x_0)} = X'_{(x_0)} e^{-K x_0 i} - X_{(x_0)} e^{-K x_0 i} K i = 0$$

hervorgehenden Gleichung

$$K = \frac{1}{i} \frac{X'_{(x_0)}}{X_{(x_0)}} = \frac{1}{i} \left( \frac{d \ln X_{(x)}}{dx} \right)_{x=x_0}, \quad (11)$$

in welcher  $x_0$  den Wert des Arguments  $x$  darstellt, welcher zu  $K$  gehört, findet er zunächst

$$X_{(x_0)} = e^{\int_0^{x_0} K dx}$$

und sodann

$$Y_{(x_0)} = X_{(x_0)} e^{-K x_0 i} = e^{\int_0^{x_0} K dx - K x_0 i}$$

Ist nun  $K_0$  der Wert, welcher zu  $x=0$  gehört, so ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{K_0}^K x dK = (Kx)_{x=0}^{x=x_0} - \int_0^{x_0} K dx,$$

daher kann man auch setzen

$$Y_{(x_0)} = e^{\int_{K_0}^K -i x dK} \quad (12)$$

Um nun noch für  $\frac{1}{\sqrt{-2 \left( \frac{d^2 \ln Y_{(x)}}{dx^2} \right)_{x=x_0}}}$  einen

Wert zu erhalten, welcher dem Arany'schen Ergebnisse entspricht, hat man sich zu vergegenwärtigen, dass die Ableitungen von  $\ln Y_{(x)}$  in der Voraussetzung gebildet werden, dass  $K$  eine konstante Grösse ist. Aus der Gleichung

$$\ln Y_{(x)} = \ln X_{(x)} - Kx i$$

erhält man durch zweimaliges Differenzieren

$$\frac{d \ln Y_{(x)}}{dx} = \frac{d \ln X_{(x)}}{dx} - K i,$$

$$\frac{d^2 \ln Y_{(x)}}{dx^2} = \frac{d^2 \ln X_{(x)}}{dx^2}.$$

Aus der von Arany aufgestellten, für jeden beliebigen Wert von  $K$  geltenden Gleichung

$$K i = \frac{d \ln X_{(x)}}{dx}$$

folgt aber allgemein

$$\frac{d K}{d x} i = \frac{d^2 \ln X_{(x)}}{dx^2},$$

mithin ist auch

$$\left( \frac{d^2 \ln Y_{(x)}}{dx^2} \right)_{x=x_0} = \left( \frac{d^2 \ln X_{(x)}}{dx^2} \right)_{x=x_0} = i \left( \frac{d K}{d x} \right)_{x=x_0}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes kommt man nun zu der der Arany'schen Formel entsprechenden



$$P_{(A)} = \frac{e^{-i \int_{K_0}^K x dK}}{\sqrt{\pi} \sqrt{-2i \left( \frac{dK}{dx} \right)_{x=x_0}}}. \quad (13)$$

Dieses Ergebnis lässt sich noch vereinfachen, indem man setzt

$$K = \frac{1}{i} \cdot \frac{d \ln X_{(x)}}{dx} = \varphi(x i)$$

und  $\varphi(x i)$  nach dem Maclaurinschen Satze entwickelt; man erhält so

$$K = \varphi_{(0)} + x i \varphi'_{(0)} - \frac{x^2}{2!} \varphi''_{(0)} \dots$$

Für  $x=0$  wird  $K$  zu  $K_0$ , und daher ist  $\varphi_{(0)} = K_0$ . Vernachlässigt man alle höheren Potenzen von  $x$ , mit der zweiten beginnend, so ergibt sich die Näherungsgleichung

$$K = K_0 + x i \varphi'_{(0)}, \quad (14)$$

aus welcher folgt

$$\pm \Delta = K - K_0 = x i \varphi'_{(0)}$$

und

$$x = \pm \frac{\Delta}{\varphi'_{(0)} i}. \quad (15)$$

Führt man die Werte (14) und (15) in die Gleichung (13) ein, so bekommt man die stets anwendbare Näherungsformel

$$P_{(A)} = \frac{e^{-\frac{\Delta^2}{2 \varphi'_{(0)}}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{2 \varphi'_{(0)}}}. \quad (16)$$

Im vorliegenden Falle ist  $\varphi'_{(0)}$  aus der Gleichung

$$K = \frac{1}{i} \frac{d \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \ln \left( {}^{(\kappa)}p_1 e^{{}^{(\kappa)}k_1 x i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm {}^{(\kappa)}k_2 x i} + {}^{(\kappa)}p_3 \right)}{dx} \quad (17)$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \frac{{}^{(\kappa)}p_1 e^{{}^{(\kappa)}k_1 x i} {}^{(\kappa)}k_1 \pm {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm {}^{(\kappa)}k_2 x i} {}^{(\kappa)}k_2}{{}^{(\kappa)}p_1 e^{{}^{(\kappa)}k_1 x i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm {}^{(\kappa)}k_2 x i} + {}^{(\kappa)}p_3} = \varphi'(xi)$$

zu bestimmen. Auf dem bereits beschriebenen Wege findet man die Näherungsgleichung

$$K = K_0 + M^2 x i,$$

in welcher ist

$$K_0 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left( {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}k_1 \pm {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_2 \right)$$

und

$$M^2 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} \left[ {}^{(\kappa)}p_1 (1 - {}^{(\kappa)}p_1) {}^{(\kappa)}k_1^2 + \right. \\ \left. + {}^{(\kappa)}p_2 (1 - {}^{(\kappa)}p_2) {}^{(\kappa)}k_2^2 \pm 2 {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_1 {}^{(\kappa)}k_2 \right].$$

Sohin ergibt sich wiederum die Formel (10).

*Anmerkung:* Die in den Abschnitten 1 und 2 gegebenen Entwicklungen erfüllen nicht die von Laplace aufgestellte Forderung, dass die Integranden der näherungsweise zu berechnenden Integrale für die Integralgrenzen verschwinden. Wie man sogleich bemerkt, nehmen die Integranden der hier betrachteten Integrale für die Grenzargumente Werte an, welche in der Umgebung von 0 liegen. Da es sich aber ohnehin nur um Näherungsberechnungen handelt, so wird man über diese Ungenauigkeit hinwegblicken dürfen.

3. Schliesslich kann man die Formeln (1) und (1<sup>a</sup>) auch durch Verallgemeinerung des Poissonschen Verfahrens umgestalten. Führt man zu diesem Zwecke in den  $\varkappa^{\text{ten}}$  Faktor der erzeugenden Funktion

$$({}^{\varkappa})p_1 e^{({}^{\varkappa})k_1 x i} + ({}^{\varkappa})p_2 e^{\pm ({}^{\varkappa})k_2 x i} + ({}^{\varkappa})p_3$$

die Moivreschen Werte ein

$$e^{({}^{\varkappa})k_1 x i} = \cos ({}^{\varkappa})k_1 x + i \sin ({}^{\varkappa})k_1 x$$

$$e^{\pm ({}^{\varkappa})k_2 x i} = \cos ({}^{\varkappa})k_2 x \pm i \sin ({}^{\varkappa})k_2 x,$$

so folgt

$$\begin{aligned} & ({}^{\varkappa})p_1 e^{({}^{\varkappa})k_1 x i} + ({}^{\varkappa})p_2 e^{\pm ({}^{\varkappa})k_2 x i} + ({}^{\varkappa})p_3 \\ &= \left( ({}^{\varkappa})p_1 \cos ({}^{\varkappa})k_1 x + ({}^{\varkappa})p_2 \cos ({}^{\varkappa})k_2 x + ({}^{\varkappa})p_3 \right) \\ &+ i \left( ({}^{\varkappa})p_1 \sin ({}^{\varkappa})k_1 x \pm ({}^{\varkappa})p_2 \sin ({}^{\varkappa})k_2 x \right). \end{aligned}$$

Darauf bestimme man den Modulus des  $\varkappa^{\text{ten}}$  Vertrags aus

$$\begin{aligned} \varrho_{\varkappa}^2 &= \left( ({}^{\varkappa})p_1 \cos ({}^{\varkappa})k_1 x + ({}^{\varkappa})p_2 \cos ({}^{\varkappa})k_2 x + ({}^{\varkappa})p_3 \right)^2 + \\ &+ \left( ({}^{\varkappa})p_1 \sin ({}^{\varkappa})k_1 x \pm ({}^{\varkappa})p_2 \sin ({}^{\varkappa})k_2 x \right)^2, \quad (18) \end{aligned}$$

und bilde zur Berechnung des Arguments  $\varphi_{\varkappa}$  die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} & ({}^{\varkappa})p_1 \cos ({}^{\varkappa})k_1 x + ({}^{\varkappa})p_2 \cos ({}^{\varkappa})k_2 x + ({}^{\varkappa})p_3 = \varrho_{\varkappa} \cos \varphi \\ & ({}^{\varkappa})p_1 \sin ({}^{\varkappa})k_1 x \pm ({}^{\varkappa})p_2 \sin ({}^{\varkappa})k_2 x = \varrho_{\varkappa} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Man erhält so

$$\left. \begin{aligned} & \left( {}^{(\kappa)}p_1 \cos {}^{(\kappa)}k_1 x + {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}k_2 x + {}^{(\kappa)}p_3 \right) + \\ & + i \left( {}^{(\kappa)}p_1 \sin {}^{(\kappa)}k_1 x \pm {}^{(\kappa)}p_2 \sin {}^{(\kappa)}k_2 x \right) = \varrho_{\kappa} e^{\varphi_{\kappa} i} \\ & \text{oder} \\ & \left( {}^{(\kappa)}p_1 e^{{}^{(\kappa)}k_1 x i} + {}^{(\kappa)}p_2 e^{\pm {}^{(\kappa)}k_2 x i} + {}^{(\kappa)}p_3 \right) = \varrho_{\kappa} e^{\varphi_{\kappa} i} \end{aligned} \right\} (20)$$

Durch Auflösen der Quadrate geht die Gleichung (18) über in

$$\begin{aligned} \varrho_{\kappa}^2 &= {}^{(\kappa)}p_1^2 + {}^{(\kappa)}p_2^2 + {}^{(\kappa)}p_3^2 + \\ &+ 2 {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_2 \cos \left( {}^{(\kappa)}k_2 \mp {}^{(\kappa)}k_1 \right) x + \\ &+ 2 {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_3 \cos {}^{(\kappa)}k_1 x + 2 {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}p_3 \cos {}^{(\kappa)}k_2 x. \end{aligned}$$

Wendet man auf die auf der rechten Seite auftretenden Kosinusse die Formel

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

an, so geht die vorstehende Gleichung über in

$$\begin{aligned} \varrho_{\kappa}^2 &= 1 - 4 \left[ {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_2 \sin^2 \frac{1}{2} \left( {}^{(\kappa)}k_1 \mp {}^{(\kappa)}k_2 \right) x + \right. \\ &+ \left. {}^{(\kappa)}p_1 {}^{(\kappa)}p_3 \sin^2 \frac{1}{2} {}^{(\kappa)}k_1 x + {}^{(\kappa)}p_2 {}^{(\kappa)}p_3 \sin^2 \frac{1}{2} {}^{(\kappa)}k_2 x \right]. \end{aligned}$$

Da man der Urvariable  $x$  zunächst einen sehr kleinen Wert erteilen kann, so darf man für die Sinusse die Winkel selbst setzen. Dadurch ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \varrho_z^2 &= 1 - \left[ {}^{(z)}p_1 {}^{(z)}p_2 \left( {}^{(z)}k_1 + {}^{(z)}k_2 \right)^2 x^2 + \right. \\ &\quad \left. + {}^{(z)}p_1 {}^{(z)}p_3 {}^{(z)}k_1^2 x^2 + {}^{(z)}p_2 {}^{(z)}p_3 {}^{(z)}k_2^2 x^2 \right] \\ &= 1 - \left[ {}^{(z)}p_1 \left( 1 - {}^{(z)}p_1 \right) {}^{(z)}k_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + {}^{(z)}p_2 \left( 1 - {}^{(z)}p_2 \right) {}^{(z)}k_2^2 + 2 {}^{(z)}p_1 {}^{(z)}p_2 {}^{(z)}k_1 {}^{(z)}k_2 \right] x^2 \\ &= 1 - {}^{(z)}M^2 x^2. \end{aligned} \right\} (21)$$

Durch Übergang zu den Logarithmen findet man die Gleichung

$$2 \ln \varrho_z = \ln (1 - {}^{(z)}M^2 x^2), \quad (22)$$

aus welcher man die weiteren Annäherungen erhält

$$\ln \varrho_z = -\frac{1}{2} {}^{(z)}M^2 x^2 \quad (22^a)$$

und

$$\varrho_z = e^{-\frac{1}{2} {}^{(z)}M^2 x^2}. \quad (22^b)$$

Endlich bekommt man durch Einsetzen der Ausdrücke (20) und (22<sup>b</sup>) für die erzeugende Funktion den Näherungswert

$$X = \prod_{z=1}^{z=s} \varrho_z e^{\varphi_z i} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{z=1}^{z=s} {}^{(z)}M^2 x^2} e^{\sum_{z=1}^{z=s} \varphi_z i},$$

in welchem man noch zur Abkürzung setze

$$\sum_{z=1}^{z=s} {}^{(z)}M^2 = M^2.$$

Weiterhin handelt es sich um die annähernde Berechnung der Amplitude  $\varphi_z$ .

Aus der Gleichung

$$\varrho_{\varkappa} \sin \varphi_{\varkappa} = {}^{(\varkappa)}p_1 \sin {}^{(\varkappa)}k_1 x \pm {}^{(\varkappa)}p_2 \sin {}^{(\varkappa)}k_2 x$$

findet man

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{\varkappa} &= e^{\frac{1}{2} {}^{(\varkappa)}M^2 x^2} \left( {}^{(\varkappa)}p_1 \sin {}^{(\varkappa)}k_1 x \pm {}^{(\varkappa)}p_2 \sin {}^{(\varkappa)}k_2 x \right) \\ &= f_{\varkappa(x)}, \end{aligned}$$

daher ist

$$\begin{aligned} \varphi_{\varkappa} &= \arcsin f_{\varkappa(x)} \\ &= f_{\varkappa(x)} + \frac{1}{2} \frac{(f_{\varkappa(x)})^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{(f_{\varkappa(x)})^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

Die Funktion  $f_{\varkappa(x)}$  entwickle man in die Maclaurinsche Reihe

$$f_{\varkappa(x)} = f_{\varkappa(0)} + x f'_{\varkappa(0)} + \frac{x^2}{2} f''_{\varkappa(0)} + \dots,$$

in welcher man zu setzen hat

$$f_{\varkappa(0)} = 0,$$

$$f'_{\varkappa(0)} = \left( {}^{(\varkappa)}p_1 {}^{(\varkappa)}k_1 \pm {}^{(\varkappa)}p_2 {}^{(\varkappa)}k_2 \right) = {}^{(\varkappa)}H,$$

$$f''_{\varkappa(0)} = 0.$$

Gemäss dieser Untersuchungen ergibt sich aber die Näherungsgleichung

$$\varrho_{\varkappa} = {}^{(\varkappa)}H \cdot x + \frac{1}{2} \frac{({}^{(\varkappa)}H \cdot x)^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{({}^{(\varkappa)}H \cdot x)^5}{5} + \dots$$

Macht man wiederum von der Annahme Gebrauch, dass der Winkel  $x$  recht klein ist, so darf man auch im vorliegenden Falle seine höheren Potenzen ver-

nachlässigen. Auf diese Weise kommt man aber zu der Näherungsgleichung

$$\varrho_{\kappa} = {}^{(\kappa)}H \cdot x, \quad (23)$$

durch Anwendung derer man den bekannten Ausdruck erhält

$$X = e^{\sum_{\kappa=1}^{\kappa=s} {}^{(\kappa)}H x i - \frac{1}{2} M^2 x^2}$$

Führt man denselben in die Formel (1<sup>a</sup>) ein, so ergibt sich

$$P_{(A)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2 + \Delta x i} d x. \quad (24)$$

Weil man ferner annehmen kann, dass der Integrand bereits für mässige Werte von  $x$  sehr klein wird, begeht man nur einen geringen Fehler, im Falle man die Grenzen  $-\pi$  und  $+\pi$  bis  $-\infty$  und  $+\infty$  ausdehnt. Sich hierauf noch der Substitution

$$e^{\pm \Delta x i} = \cos \Delta x \pm i \sin \Delta x$$

bedienend, gelangt man wieder zu der bekannten Formel

$$P_{(A)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2} \cos \Delta x d x; \quad (25)$$

denn der imaginäre Teil

$$\pm \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2} \sin \Delta x d x$$

verschwindet, weil sein Integrand eine ungerade Funktion von  $x$  ist.

#### 4. Weitere Bemerkungen über die Auswertung der vorkommenden Integrale.

Wie bereits im dritten Abschnitte des ersten Kapitels bemerkt wurde, gibt es verschiedene Verfahren, um das Integral

$$P_{(A)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2} \cos Ax \, dx \quad (1)$$

umzugestalten. Hier soll noch eine Umformung gezeigt werden, derer sich Bruns (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre) bediente, und die auch in mehreren Lehrbüchern der höheren Analysis Erwähnung gefunden hat, so beispielsweise bei J. L. Raabe („Die Differential- und Integralrechnung“, Zürich, 1843) und bei Oskar Schlömilch („Kompendium der höheren Analysis“, Braunschweig, 1895).

Durch Entwicklung von  $\cos bx$  gelangt man zu der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \sum_{K=0}^{K=\infty} (-1)^K \frac{(bx)^{2K}}{(2K)!} \, dx. \quad (2)$$

Es ist aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} (-1)^K \frac{(bx)^{2K}}{(2K)!} \, dx &= \frac{(-1)^K b^{2K}}{(2K)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2K} \, dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} (-1)^K \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2K-1)}{2^K} \left( \frac{b}{\sqrt{a}} \right)^{2K}, \end{aligned}$$



mithin folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[ 1 - \frac{1}{1!} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \frac{1}{2!} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^4 - \frac{1}{3!} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^6 + \dots \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\left( \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2} \end{aligned}$$

Mit Benutzung dieser Beziehung findet man für die Wahrscheinlichkeit  $P_{(A)}$  das bereits mehrfach angeführte Gesetz

$$P_{(A)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2M^2}} e^{-\frac{A^2}{2M^2}}.$$

Um vermöge dieses überaus brauchbaren Näherungswerts die Wahrscheinlichkeit  $W_{(-A, A)}$  zu ermitteln, dass die Ausgaben die Risikoprämiensumme um  $+A$  Franken überschreiten oder um diesen Betrag weniger als die Risikoprämiensumme ausmachen, stelle man in Anlehnung an Poisson die Formel auf

$$W_{(-A, A)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2} \sum_{K=-A}^{K=A} \cos Kx \, dx. \quad (3)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{K=-A}^{K=A} \cos Kx &= 2(1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \\ &\quad + \cos (A-1)x + \cos Ax) - 1 \\ &= 2 \frac{\cos \frac{1}{2} Ax \sin \frac{1}{2} (A+1)x}{\sin \frac{1}{2} x} - 1 \\ &= \frac{\sin (A + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2} x}, \end{aligned} \quad (4)$$

und wenn man für  $\sin \frac{1}{2} x$  näherungsweise  $\frac{1}{2} x$  schreibt,

$$W_{(-A, A)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2} \frac{\sin (A + \frac{1}{2}) x}{x} dx. \quad (5)$$

Dieses Integral stellt, wie schon früher bemerkt wurde, einen besonderen Fall des von Poisson häufig angegebenen Integrales dar. Um es weiter umzuformen, kann man wiederum verschiedene Wege einschlagen. Entwickelt man beispielsweise in dem Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \frac{\sin b x}{x} dx$$

den Quotienten  $\frac{\sin b x}{x}$  in eine Reihe, so folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \frac{\sin b x}{x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} b \sum_{K=0}^{K=\infty} (-1)^K \frac{(b x)^{2K}}{(2K+1)!} dx \\ &= \sum_{K=0}^{K=\infty} (-1)^K \frac{b^{2K+1}}{(2K+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} x^{2K} dx \\ &= 2 \sqrt{\pi} \sum_{K=0}^{K=\infty} \frac{(-1)^K}{K! (2K+1)} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^{2K+1}. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\sum_{K=0}^{K=\infty} \frac{(-1)^K}{K! (2K+1)} \left( \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^{2K+1} = \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2} dt, \quad (6)$$

mithin ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin bx}{x} dx = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2} dt. \quad (7)$$

Aus dieser Untersuchung lässt sich der Schluss ziehen, dass man mit der Wahrscheinlichkeit

$$W_{(-\Delta, \Delta)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\Delta + 1/2}{\sqrt{2} M}} e^{-t^2} dt = \Phi \left( \frac{\Delta + 0.5}{\sqrt{2} M} \right) \quad (8)$$

einen Verlust oder einen Gewinn bis zur Höhe von  $\Delta$  Franken erwarten darf. In der Formel (8) erkennt man das Ergebnis, welches Moser und nach diesem Eggenberger aus der Beziehung

$$W_{(-\Delta, \Delta)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\Delta}{\sqrt{2} M}} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2} M} e^{-\frac{\Delta^2}{2M^2}} \quad (9)$$

hergeleitet haben. Auch zu der letzteren aber gelangt man vermöge der Beziehung (4). Beachtet man nämlich, dass anderseits ist

$$\sum_{K=-\Delta}^{K=\Delta} \cos Kx = \frac{\sin \Delta x}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x} + \cos \Delta x, \quad (10)$$

und dass man näherungsweise setzen kann

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} x,$$

so folgt aus (5) mit Berücksichtigung von (2) die Formel (9).

Legt man der Grösse  $\Delta$  die Eigenschaften einer kontinuierlichen Grösse bei, so kann man einfach setzen

$$W_{(-\Delta, \Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2} dx \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos \Delta x d\Delta, \quad (11)$$

woraus sich die für Risikoberechnungen hinreichend genaue Formel ergibt

$$W_{(-\Delta, \Delta)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} M^2 x^2} \frac{\sin \Delta x}{x} dx. \quad (12)$$

Dieses uns schon bekannte Integral bietet uns Gelegenheit, noch einige Augenblicke bei der Funktion

$$\operatorname{sgn}(\Delta - z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta - z)v}{v} dv \quad (13)$$

zu verharren, welche Bruns und Czuber zur Darstellung der in der Kollektivmasslehre eine Rolle spielende Summenfunktion benutzt haben. Solange  $\Delta > z$ , ist bekanntlich  $\operatorname{sgn}(\Delta - z) = 1$ . Für  $\Delta < z$  wird  $\operatorname{sgn}(\Delta - z) = -1$ , und für  $\Delta = z$  folgt  $\operatorname{sgn}(\Delta - z) = 0$ . Zieht man ausserdem in Erwägung, dass für  $|\Delta| > z$  ist

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(-\Delta + z)v}{v} dv = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta - z)v}{v} dv = -1,$$

so kann man die Funktion  $\operatorname{sgn}(\Delta - z)$  wie einen Diskontinuitätsfaktor anwenden, um das Integral

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} g(z) dz$$

vermöge des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz = 1$$

berechnen zu können. Bedingung ist jedoch, dass  $g(z)$  eine gerade Funktion ist, welche stets der Gleichung

$$g(z) = g(-z)$$

unterliegt. In der Voraussetzung, dass dieser Bedingung Genüge geschieht, stelle man die Gleichung auf

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta - z)v}{v} dv. \quad (14)$$

Wendet man nun auf  $g(z)$  die Formel (25) des Abschnittes (3) an, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta}^{\Delta} P_{(\Delta)} d\Delta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}M^2 x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \cos zx dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta - z)v}{v} dv. \quad (15) \end{aligned}$$

Die weitere Vereinfachung dieses Integrals wird durch Anwendung der bekannten Fourierschen Integrale

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xy) \cos(uy) dx dy &= 2\pi f(u) \\ \text{und} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xy) \cos(uy) dx dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

bewirkt, über die bereits kleinere, ältere Lehrbücher der höheren Analysis, z. B. auch Franke (Lehrbuch der höheren Mathematik, Hannover, 1851), Aufschluss geben.

Beachtet man die Beziehung

$$\sin(\Delta - z)v = \sin \Delta v \cos zv - \cos \Delta v \sin zv,$$

so kann man die beiden Innenintegrale der Ausdrücke (5) umformen in die Integraldifferenz

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \cos zx dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta - z)v}{v} dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Delta v}{v} \cos(vz) \cos(xz) dv dz \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Delta v}{v} \sin(vz) \cos(xz) dv dz. \quad (17) \end{aligned}$$

Zufolge der angeführten Integrale von Fourier ist aber

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Delta v}{v} \cos(vz) \cos(xz) dv dz &= 2\pi \frac{\sin \Delta x}{x} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Delta v}{v} \sin(vz) \cos(xz) dv dz &= 0, \end{aligned} \right\} (18)$$

daher ergibt sich auch auf diese Weise der Ausdruck (12).

### Schlusswort.

Den Abschluss der Risikotheorie bildet die Erörterung folgender Aufgaben:

1. Bestimmung des Minimums des Risikos bei konstantem Bestande (Landré, Radtke);
2. Bestimmung des Minimums des relativen Risikos (Radtke);
3. Bestimmung des Maximums der durch neu hinzukommende Verträge erwachsenden Verbindlichkeiten (Hausdorff, Landré);
4. Aufstellung der von Wittstein eingeführten und von Bohlmann vervollkommeneten Risikoreserve;
5. Berechnung der Minimalzahl der Versicherten mit Hilfe der Risikoreserve (Bohlmann) und Bestimmung der Stabilität des Versicherungsbestandes;
6. Maximum der Risikoreserve (Broggi).

Für die in der vorliegenden Arbeit besprochenen Versicherungsformen hat der Verfasser diese Fragen bereits in seiner ersten Abhandlung untersucht. Da er seinen früheren Ausführungen nichts wesentliches hinzuzufügen hat, so glaubt er hinsichtlich dieser auf die erwähnte Arbeit verweisen zu können.