

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker<br>= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of<br>Swiss Actuaries |
| <b>Herausgeber:</b> | Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker   |
| <b>Band:</b>        | 11 (1916)   |
| <b>Artikel:</b>     | Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der<br>Lebensversicherungsrechnung   |
| <b>Autor:</b>       | Schenker, O.  |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-550819">https://doi.org/10.5169/seals-550819</a>   |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Journal für die gesamte Lebensversicherungsrechnung

Verlag von F. A. Perthes, Gotha

1899. Heft 1. Preis 1.50 Mark

## Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der Lebensversicherungsrechnung.

Von Dr. O. Schenker, Bern.

Wir knüpfen an die verdienstvolle Kinkelin'sche Arbeit: „Elemente der Lebensversicherungsrechnung“ (I. Kapitel, 4. Aufgabe), an. Es heisst dort in der Ausgabe von 1869:

„Eine Anzahl gleich alter Ehepaare sei gegeben, man soll finden, wie viele von ihnen nach einer gegebenen Zeit noch leben, wie viele ausgestorben sind, wie viele Witwer und Witwen zurückgelassen wurden.“

Professor Kinkelin konnte noch nicht von den einheitlichen internationalen Bezeichnungen Gebrauch machen, da dieselben erst seit 1898 bestehen. Selbstverständlich werden wir, soweit möglich, dieselben verwenden. Von den in Frage stehenden Ehepaaren sei der Mann  $x$ , die Frau  $y$  Jahre alt, ihre Zahl sei  $l_{xy}$ , so ist bekanntlich die Zahl der nach  $n$  Jahren noch vorhandenen Ehepaare:

$$l_{x+n} l_{y+n} = l_{xy} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = l_{xy} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n p_y.$$

Von den  $l_{xy}$  Ehepaaren sind nach  $n$  Jahren ausgestorben:

$$l_{xy} \cdot \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_y - l_{y+n}}{l_y} \\ = l_{xy} \cdot (1 - {}_n p_x) (1 - {}_n p_y) = l_{xy} \cdot {}_n q_x \cdot {}_n q_y.$$

Von den  $l_{xy}$  Ehepaaren leben nach  $n$  Jahren als Witwen  $l_{xy} \cdot {}_n q_x \cdot {}_n p_y$ , und als Witwer  $l_{xy} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_y$  Personen.

Zum Beispiel sind von 400 Ehepaaren, wo die Männer 30 und die Frauen 25 Jahre alt sind, nach 10 Jahren, auf Grund der Tafel der 17 englischen Gesellschaften, noch 335,15 Ehepaare vorhanden, 2,86 Ehepaare sind ausgestorben, Witwen sind vorhanden 32,55, Witwer 29,44 (siehe Kinkelin o. c., Seite 10). Sehr interessant sind nun die hieraus sich ergebenden Folgerungen. Prof. Kinkelin sagt wörtlich:

„Es ist eine weit verbreitete Meinung, dass schon die ersten Jahre des Bestandes einer Witwenkasse auf ihr zukünftiges Gedeihen schliessen lassen. Ferner wird gewöhnlich angenommen, dass ein grosser Zugang junger Mitglieder einer morsch gewordenen Kasse aufhelfen könne. Die Irrtümlichkeit dieser Ansichten wird durch nachfolgendes Beispiel dargetan.“

„Eine Witwenkasse enthalte 400 Ehepaare, in denen die Männer 30, die Frauen 25 Jahre alt sind. Sobald eine Frau stirbt, trete der Witwer aus. Die gestorbenen und die ausgetretenen Mitglieder werden jeweilen nach 10 Jahren durch neue Ehen von den angegebenen Altern ersetzt, so dass die Gesamtzahl alle 10 Jahre wieder auf 400 steht. Dann sind vorhanden:

| Nach Jahren | Witwen | % der Ehen | Lebende erste Mitglieder | Witwen der ersten Mitglieder |
|-------------|--------|------------|--------------------------|------------------------------|
| 10          | 32,55  | 8,14       | 335,15                   | 32,55                        |
| 20          | 69,79  | 17,45      | 267,00                   | 64,43                        |
| 30          | 116,23 | 29,06      | 183,31                   | 99,29                        |
| 40          | 159,36 | 39,84      | 86,46                    | 121,72                       |
| 50          | 158,96 | 39,74      | 16,53                    | 90,78                        |
| 60          | 123,50 | 30,87      | 0,37                     | 23,75                        |

„Hieran knüpfen sich folgende Bemerkungen: Würden zunächst keine neuen Mitglieder eintreten, so zeigen die die ersten Mitglieder betreffenden Zahlen, dass die Witwenzahl bis zu einem zwischen dem 30. und 40. Vereinsjahr (genauer zwischen dem 37. und 38.) liegenden Zeitpunkt unter der Mitgliederzahl bleibt, von dort an aber rasch grösser wird, so dass nach 60 Jahren die zahlenden Mitglieder ausgestorben, dagegen noch 24 Witwen am Leben sind. Ähnliche Umstände würden eintreten, wenn während längerer Zeit keine oder nur wenig neue Mitglieder dem Verein beitreten. Auch bei Wiederersetzung der gestorbenen und ausgetretenen Mitglieder zeigt die Witwenzahl eine beständige Zunahme bis zum 40. Vereinsjahr, erreicht dort ein Maximum von nahe 40 % der Mitgliederzahl, nimmt vom 50. Jahr an wieder ab bis auf etwa 30 % und wächst später wieder. Etwas günstiger gestaltet sich die Sache, wenn die Mitgliederzahl selbst im Zuge des Wachstums ist; aber dieses Wachstum kann nicht ins Unendliche fortgehen, und es wird einmal ein Stillstand oder Rückgang eintreten, und von diesem Moment an wird das Verhältnis der Zahl der Witwen zu der der Mitglieder in um so stärkerem Masse zunehmen. Diese Beobachtung hat grosse Wichtigkeit für Witwenkassen, welche die zu verwerfende Einrichtung haben, dass der Betrag der Witwenpension

von dem Stande der Kasse, d. h. von der Anzahl der zahlenden Mitglieder abhängt. Einem derartigen Verein kann nichts Schlimmeres begegnen als ein plötzlicher starker Zugang neuer Mitglieder, dem ein Stillstand folgt. Denn in diesem Fall wächst die Zahl der Witwen anfangs beinahe so, wie in der ersten Abteilung obiger Tabelle angegeben ist; infolgedessen nehmen die Witwengehalte ab, was wieder eine Rückwirkung auf den Zutritt neuer Mitglieder ausübt und nun eine um so raschere Zunahme der Witwen, wie sie die zweite Abteilung der Tabelle zeigt, verursacht. Wer es mit unsren Witwen-, Alters- und Sterbekassen aufrichtig meint, muss aufs dringendste vor dem Abhängigmachen der Bezugsbeträge von der Mitgliederzahl warnen, weil sie dies mit mathematischer Gewissheit einer traurigen Zukunft entgegenführt.“

Die Darlegungen von Prof. Kinkelin geben nun Anlass zu einer interessanten und, wie mir scheint, lehrreichen Aufgabe, die wir folgendermassen formulieren können:

Eine Witwenkasse zählt  $l_{xy}$  Ehepaare von der Alterskombination  $x, y$ . Alle durch Tod des einen oder beider Ehegatten aufgelösten Ehepaare sollen *kontinuierlich* durch Ehepaare von der Alterskombination  $x, y$  ersetzt werden, so dass die Gesamtzahl der lebenden Ehepaare in irgend einem Zeitpunkt stets  $l_{xy}$  beträgt; wie gross ist nach  $n$  Jahren die Zahl der vorhandenen Witwen und Witwer, sowie die Zahl der ausgestorbenen Ehepaare, und zu welchen Zeiten erreichen die Zahlen der Witwen und Witwer ein Maximum, bzw. Minimum?

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen wir verschiedene Voraussetzungen machen, wobei uns die geometrische Methode gute Dienste leisten wird. Wir wählen

die  $x$ -Koordinaten eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems zur Darstellung der Geburtszeit und die  $y$ -Koordinaten desselben zur Darstellung des Alters. Treffen wir die Vereinbarung, dass wir im Verlaufe der Rechnung nur Bezug nehmen wollen auf Ehepaare mit konstanter Altersdifferenz (z. B.  $30 - 25 = 5$ ), so können wir die zu einer beliebigen Zeit vorhandenen Ehepaare geometrisch zur Darstellung bringen, indem wir ihre Anzahl als  $z$ -Koordinate, das Alter des Ehemanns als  $y$ -Koordinate und den Zeitpunkt seiner Geburt auf der  $X$ -Achse auftragen. Nehmen wir speziell mit Kinkel an, es seien ursprünglich 400 Ehepaare vorhanden, das Alter der Ehemänner sei 30 und das der Ehefrauen 25. Für die weitere Rechnung können wir nun nicht annehmen, alle Ehemänner seien genau 30 und daher die Ehefrauen genau 25 Jahre alt; denn sonst würde die hierzu gehörige  $z$ -Koordinate unendlich gross werden, also einem Unstetigkeitspunkt entsprechen; wir müssen vielmehr für das Alter 30 die Grenzen  $30 - \frac{1}{2}$  und  $30 + \frac{1}{2}$  und daher für das Alter 25 die Grenzen  $25 - \frac{1}{2}$  und  $25 + \frac{1}{2}$  setzen, also den Begriff des laufenden Alters verwenden. Ferner lassen wir die Hypothese gelten, die zwischen diesen Grenzen liegenden Alter seien gleich stark vertreten; dem Alter  $30 - \frac{1}{2}$  entspreche die  $y$ -Koordinate 0 und die Geburtszeit 1. Dann lassen sich die im Anfang des ersten Vereinsjahres vorhandenen 400 Ehepaare vom laufenden Alter 30,25 wie in Figur 1 geometrisch darstellen. Auf der  $X$ -Achse tragen wir vom Nullpunkt aus die Strecke 1 ab und errichten in ihrem Endpunkt  $A$  die  $z$ -Koordinate  $\frac{400}{\sqrt{2}} = AD$ ; auf der  $Y$ -Achse tragen wir vom Nullpunkt aus ebenfalls die Strecke 1 ab und errichten in ihrem Endpunkt  $B$  die  $z$ -Koordinate

$\frac{400}{\sqrt{2}} = BC$ , so stellt das Parallelogramm  $ABCD$  die Zahl der anfänglich vorhandenen Ehepaare vom laufenden Alter 30,25 dar. Wenn diese Ehepaare nach dem Gesetz  $F(y)$  aussterben (durch Tod des Mannes, der Frau oder beider Teile aufgelöst werden), so sind nach  $n$  Jahren hiervon noch vorhanden:

$$400 \cdot \int_0^1 F(n+1-x) \cdot dx.$$

oder wenn  $n+1 = \alpha$  gesetzt wird

$$400 \cdot \int_0^1 F(\alpha-x) \cdot dx.$$

Soll die Zahl der Ehepaare stets 400 betragen, so müssen fortwährend neue Ehepaare in die Kasse eintreten. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, dass von diesen eintretenden Ehepaaren der Mann genau  $30 - \frac{1}{2}$  Jahre alt sei, so wird das Gesetz, nach welchem diese Eintritte stattfinden, durch eine Kurve in der  $XZ$ -Ebene dargestellt, ihre Gleichung sei  $z = f(x)$ ; alsdann muss den Bedingungen der Aufgabe gemäss für jedes  $\alpha$  die Gleichung bestehen:

$$400 \cdot \int_0^1 F(\alpha-x) \cdot dx + 400 \cdot \int_1^\alpha f(x) \cdot F(\alpha-x) \cdot dx = 400.$$

oder

$$(1) \int_0^1 F(\alpha-x) \cdot dx + \int_1^\alpha f(x) \cdot F(\alpha-x) \cdot dx = 1.$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von  $\alpha$  bestehen muss, so ist sie identisch erfüllt; man kann sie daher

beliebig viel Mal nach  $\alpha$  differenzieren und dadurch so viele Gleichungen erhalten, als man will. Zuvor müssen wir uns darüber Rechenschaft geben, wie ein bestimmtes Integral nach einer Konstanten differenziert wird, wenn diese Konstante in den Integrationsgrenzen vorkommt. Sei abkürzend  $f$  Funktion von  $x$  und  $\alpha$ ; seien ferner  $u$  und  $v$  Funktionen von  $\alpha$ , so besteht die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\delta \int_u^v f(x, \alpha) \cdot dx}{\delta \alpha} = -f(u) \cdot \frac{\delta u}{\delta \alpha} + f(v) \cdot \frac{\delta v}{\delta \alpha} + \int_u^v f'_\alpha(x, \alpha) \cdot dx.$$

Mittelst dieser Formel differenzieren wir die Gleichung:

$$\int_0^1 F(a-x) \cdot dx + \int_1^a f(x) \cdot F(a-x) \cdot dx = 1$$

nach  $\alpha$  und bekommen dadurch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 F'_\alpha(a-x) \cdot dx + f(a) \cdot F(0) + \int_1^a f(x) \cdot F'_\alpha(a-x) \cdot dx &= 0 \\ \int_0^1 F''_\alpha(a-x) \cdot dx + f'(a) \cdot F(0) + f(a) \cdot F'_\alpha(0) \\ + \int_1^a f(x) \cdot F''_\alpha(a-x) \cdot dx &= 0 \\ \int_0^1 F'''(a-x) \cdot dx + f''(a) \cdot F(0) + f'(a) \cdot F'_\alpha(0) \\ + f(a) \cdot F''_\alpha(0) + \int_1^a f(x) \cdot F'''_\alpha(a-x) \cdot dx &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

Eine allgemeine Lösung dieser Gleichungen, d. h. die Bestimmung von  $f(a)$  und damit auch von  $f(x)$  kennen wir nicht. Wir beschränken uns deshalb auf Spezialfälle, indem wir zunächst voraussetzen, die Absterbeordnung folge der Moivre'schen Hypothese, d. h. sie verlaufe geradlinig und breche mit dem Alter 86 ab. Dann sind von den 400 Ehepaaren vom Alter 30,25 nach  $\alpha - 1$  Jahren noch vorhanden:

$$400 \cdot \left(1 - \frac{\alpha - 1}{56}\right) \left(1 - \frac{\alpha - 1}{61}\right).$$

Bezeichnen wir abkürzend  $\frac{1}{56}$  mit  $a$  und  $\frac{1}{61}$  mit  $b$ , so tritt an Stelle der Gleichung (1):

$$(1^a) \quad \int_0^1 [1 - a(\alpha - 1)] [1 - b(\alpha - 1)] dx \\ + \int_1^\alpha f(x) [1 - (a - x)a] [1 - (a - x)b] \cdot dx = 1.$$

denn  $F(\alpha - x)$  hat den Wert  $[1 - (a - x)a][1 - (a - x)b]$ , wobei wir näherungsweise und zur Vereinfachung der Rechnung statt  $\frac{1}{56 + \frac{1}{2}}$  und  $\frac{1}{61 + \frac{1}{2}}$  bzw.  $\frac{1}{56}$  und  $\frac{1}{61}$  und im Integral  $\int_0^1 [1 - a(\alpha - 1)][1 - b(\alpha - 1)] \cdot dx$  für die variablen Koeffizienten von  $\alpha - 1$  ihre Mittelwerte  $a$  und  $b$  gesetzt haben. Gemäss Gleichung (2) ergeben sich aus (1<sup>a</sup>) durch fortgesetztes Differenzieren nach  $\alpha$  die Gleichungen:

$$(3) \quad f(a) - a - b + 2(a-1) \cdot a \cdot b + \int_1^a f(x) \left\{ -a [1 - (a-x)b] - b [1 - (a-x)a] \right\} \cdot dx = 0$$

$$(4) \quad f'(a) - (a+b) \cdot f(a) + 2a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \int_1^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$(5) \quad f''(a) - (a+b) \cdot f'(a) + 2ab \cdot f(a) = 0$$

Gleichung (5) stellt eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Eine partikuläre Lösung derselben ist von der Form:  $C \cdot e^{A \cdot a}$ ;  $C$  ist eine verfügbare Konstante und  $A$  erhält man nach Einführung von  $f(a) = C \cdot e^{A \cdot a}$  in (5) vermittelst der Gleichung:

$$(6) \quad A^2 - 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot A + 2 \cdot a \cdot b = 0,$$

woraus

$$A_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2a \cdot b}.$$

Die vollständige Lösung der Gleichung (5) lautet daher:

$$(7) \quad f(a) = C_1 \cdot e^{A_1 \cdot a} + C_2 \cdot e^{A_2 \cdot a}.$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen sich vermittelst der Gleichungen (3) und (4), indem man den Wert von  $f(a)$  und entsprechend den von  $f(x)$  in denselben substituiert. So ergibt Gleichung (3):

$$\begin{aligned} & -a - b + 2(a-1) \cdot a \cdot b + C_1 \cdot e^{A_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{A_2 \cdot x} \\ & + \int_1^a (C_1 \cdot e^{A_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{A_2 \cdot x}) \\ & (2a \cdot b - 2ab \cdot x - a - b) \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

Durch partielle Integrieren, Reduzieren und Berücksichtigung der Gleichung (6):

$$A^2 - (a + b) \cdot A + 2ab = 0$$

erhält man hieraus schliesslich:

$$\begin{aligned} & k_1 \left\{ A_1 \cdot A_2^2 [2ab(1-a) + a + b] - 2ab \cdot A_2^2 \right\} \\ & + k_2 \left\{ A_1^2 \cdot A_2 [2ab(1-a) + a + b] - 2ab \cdot A_1^2 \right\} \\ & + A_1^2 \cdot A_2^2 [2(a-1)ab - a - b] = 0, \end{aligned}$$

oder

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} k_1 \cdot A_2^2 \left\{ A_1 [2ab(1-a) + a + b] - 2ab \right\} \\ + k_2 \cdot A_1^2 \left\{ A_2 [2ab(1-a) + a + b] - 2ab \right\} \\ + A_1^2 \cdot A_2^2 [2(a-1)ab - a - b] = 0 \end{array} \right.$$

wobei  $k_1 = C_1 \cdot e^{A_1}$  und  $k_2 = C_2 \cdot e^{A_2}$ .

Substituiert man aber gemäss Gleichung (7) die Werte von  $f(a)$  und  $f(x)$  in Gleichung (4), so erhält man

$$\begin{aligned} & 2ab + C_1 \cdot A_1 \cdot e^{A_1 \cdot a} + C_2 \cdot A_2 \cdot e^{A_2 \cdot a} \\ & - (a + b) (C_1 \cdot e^{A_1 \cdot a} + C_2 \cdot e^{A_2 \cdot a}) \\ & + 2ab \left[ C_1 \cdot \frac{e^{A_1 \cdot a} - e^{A_1}}{A_1} + C_2 \cdot \frac{e^{A_2 \cdot a} - e^{A_2}}{A_2} \right] = 0, \end{aligned}$$

oder durch Reduktion und Berücksichtigung der Gleichung (6), nämlich:

$$A^2 - 2 \frac{a+b}{2} \cdot A + 2ab = 0$$

$$(9) \quad k_1 \cdot A_2 + k_2 \cdot A_1 - A_1 \cdot A_2 = 0.$$

Aus (8) und (9) bestimmen wir nun leicht:

$$k_1 = \frac{A_1^2}{A_1 - A_2}; \quad k_2 = \frac{A_2^2}{A_2 - A_1}$$

Wir bekommen daher schliesslich für  $f(x)$  den Wert:

$$(10) \quad f(x) = \frac{A_1^2}{(A_1 - A_2) \cdot e^{A_1}} \cdot e^{A_1 \cdot x} + \frac{A_2^2}{(A_2 - A_1) \cdot e^{A_2}} \cdot e^{A_2 \cdot x}$$

denn  $C_1$  ist gleich

$$\frac{k_1}{e^{A_1}} = \frac{A_1^2}{(A_1 - A_2) \cdot e^{A_1}},$$

und  $C_2$  ist gleich

$$\frac{k_2}{e^{A_2}} = \frac{A_2^2}{(A_2 - A_1) \cdot e^{A_2}}.$$

Der gefundene Wert für  $f(x)$  muss natürlich die Gleichung (1<sup>a</sup>) erfüllen. Es ist unschwer, zu zeigen, dass dies wirklich auch der Fall ist, wenn die Gleichung (6)  $A^2 - 2 \frac{a+b}{2} \cdot A + 2ab = 0$  berücksichtigt wird.

Bestimmen wir nun unter der Moivre'schen Hypothese die Zahl der Witwen nach  $n$  Jahren; sie ist offenbar:

$$400 \cdot (a-1) \cdot a [1 - (a-1) \cdot b]$$

$$+ 400 \cdot \int_1^a f(x) \cdot (a-x) \cdot a [1 - (a-x) \cdot b] dx.$$

Nach Einführung des Wertes für  $f(x)$  reduziert sich dieser Ausdruck schliesslich auf:

$$(11) \quad \frac{e^{A_1(\alpha-1)}[a-A_2]-e^{A_2(\alpha-1)}[a-A_1]}{A_1-A_2}-1$$

wegen  $A_1 \cdot A_2 = 2 \cdot ab$ . Für  $\alpha = 1$  reduziert sich (11) auf Null, wie es auch sein soll. Der Ausdruck (11) wird ein Maximum bzw. Minimum, wenn

$$(12) \quad A_1 \cdot e^{A_1(\alpha-1)}[a-A_2]-A_2 \cdot e^{A_2(\alpha-1)}[a-A_1]=0.$$

Für den angenommenen Spezialfall ist:

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{56} + \frac{1}{61} \right)$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{56} + \frac{1}{61} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{61}} = 0,0171$$

$$\pm i \cdot 0,0171.$$

Ist allgemein  $A_{1,2} = p \pm q \cdot i$ , so lautet die Gleichung (12):

$$(p+q \cdot i) e^{(p+q \cdot i)(\alpha-1)}(a-p+q \cdot i) - (p-q \cdot i) \cdot e^{(p-q \cdot i)(\alpha-1)}(a-p-q \cdot i) = 0,$$

oder nach einigen Reduktionen:

$$(a \cdot p - p^2 - q^2) \cdot \sin q(\alpha-1) + a \cdot q \cdot \cos q(\alpha-1) = 0,$$

woraus

$$(12^a) \quad \operatorname{tg} q(\alpha-1) = -a \cdot q : (a \cdot p - p^2 - q^2).$$

Für unser Zahlenbeispiel ist  $\operatorname{tg} q(\alpha-1) = 1,0961$ , also  $q(\alpha-1) = 47^\circ 37' 30''$  oder in Bruchteilen von

$\Pi: 0,831$ , woraus:  $a - 1 = 0,831 : 0,0171 = 48,6$  Jahre, d. h. nach der Moivre'schen Hypothese erreicht die Zahl der Witwen in unserem Beispiel nach 49 Jahren das 1. Maximum. Die aufeinanderfolgenden Maxima und Minima stehen in gleichen Zeiträumen voneinander ab. Durch Bildung der 2. Ableitung von (11) nach  $a$  findet man, dass für ein Maximum der Ausdruck

$$q(p^2 + q^2) [(a - p)^2 + q^2] : \sqrt{a^2 \cdot q^2 + (a \cdot p - p^2 - q^2)^2}$$

negativ und für ein Minimum positiv sein muss, d. h. für ein Maximum ist das Vorzeichen der Wurzel negativ und für ein Minimum positiv zu nehmen, was sich auch durch Betrachtung der Gleichung (12<sup>a</sup>) bestätigt. Das 1. Minimum ergibt sich aus:

$$q(a - 1) = 0,831 + \Pi = 3,973,$$

also ist  $a - 1 = 232,3$  Jahre und die Periode ist 367,4 Jahre.

*Umformung der Gleichung (10):*

$$f(x) = \frac{A_1^2}{A_1 - A_2} \cdot e^{A_1(x-1)} - \frac{A_2^2}{A_1 - A_2} \cdot e^{A_2(x-1)}.$$

Sei  $A_1 = p + q \cdot i$ ;  $A_2 = p - q \cdot i$ , so kommt:

$$(10^a) \quad f(x) = \frac{e^{p(x-1)}}{q} \left[ (p^2 - q^2) \cdot \sin q(x-1) + 2p \cdot q \cdot \cos q(x-1) \right]$$

nach leichten Reduktionen.

Für  $x = 1$  muss man den Anfangswert von  $f(x)$  erhalten, das ist  $f(1) = 2p = a + b$ .

Zur Probe kann man  $f(1)$  auch aus Gleichung (1<sup>a</sup>) berechnen, indem man  $\alpha = 1 + dx$  setzt. Es dient dann zur Bestimmung von  $f(1)$  die Gleichung:

$$(1 - a \cdot dx)(1 - b \cdot dx) + f(1) \cdot dx = 1,$$

also

$$f(1) = a + b$$

mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen der 2. Ordnung. Die Maxima und Minima von  $f(\alpha)$  ergeben sich nach bekannten Regeln aus der Gleichung:

$$(13) \quad \operatorname{tg} q(\alpha - 1) = \frac{3p^2 \cdot q - q^3}{3p \cdot q^2 - p^3}.$$

Nehmen wir endlich mit Kinkelin die Mortalitätstafel der 17 englischen Gesellschaften als Ausgangspunkt der Rechnung, so bleibt uns zur Berechnung von  $f(x)$  bloss der Näherungsweg offen, in dem wir  $f(x)$  sukzessive von Jahr zu Jahr berechnen (also während eines Jahres die Sterblichkeit als konstant voraussetzen).

Setzen wir zunächst voraus, die Eintritte finden am Anfang eines jeden Vereinsjahres statt, so dass am Ende desselben die Gesamtzahl wieder genau auf 400 stehe. Weiter nehmen wir an, die eintretenden Ehepaare stehen alle genau im Alter 30, 25 (nicht wie bisher angenommen im Alter  $30 - \frac{1}{2} | 25 - \frac{1}{2}$ ), so tritt an Stelle der Gleichung (1) die folgende:

$$(1^b) \quad \int_0^1 F(\alpha - x) \cdot dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x) \cdot F(\alpha - x) \cdot dx = 1$$

(siehe Figur 1<sup>a</sup>).

Die aufeinanderfolgenden Werte für  $f(x)$  heissen wir:  $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1}$ , so ergibt sich nach (1<sup>b</sup>), indem man  $\int_0^1 F(a - x) \cdot dx$  näherungsweise durch  ${}_n p_{30} \cdot {}_n p_{25}$  und das zweite Integral durch eine endliche Summe ersetzt:

$$(14) \quad {}_n p_{30} \cdot {}_n p_{25} + [f_0 \cdot {}_n p_{30} \cdot {}_n p_{25} + f_1 \cdot {}_{n-1} p_{30} \cdot {}_{n-1} p_{25} \\ + f_2 \cdot {}_{n-2} p_{30} \cdot {}_{n-2} p_{25} + \dots + f_{n-1} \cdot p_{30} \cdot p_{25}] = 1.$$

Setzt man in dieser Gleichung für  $n$  nacheinander die Werte: 1, 2, 3, ...  $n$ , so erhält man das folgende Gleichungssystem:

Aus den Gleichungen (15) lassen sich  $f_0, f_1, f_2, \dots f_{n-1}$  sukzessive berechnen. Es leuchtet ohne weiteres ein, dass  $f_0, f_1, f_2, \dots f_{n-1}$  gegenüber den kontinuierlich stattfindenden Eintritten etwas zu gross sein werden, weil die eintretenden Ehepaare dem Risiko des Absterbens während des *ganzen* Eintrittsjahres ausgesetzt sind (siehe Figur 1<sup>a</sup>). Gemeint ist natürlich nur das Risiko, welches die Kasse belastet.

Nehmen wir an, die Eintritte finden am Ende eines jeden Vereinsjahres statt, so dass dadurch der Bestand der Kasse genau wieder auf 400 gebracht werde. Die aufeinanderfolgenden Werte für  $f(x)$  wollen wir  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  heissen, so lässt sich die Gleichung (1<sup>b</sup>) näherungsweise darstellen durch:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & {}_n p_{30} \cdot {}_n p_{25} + [f_1 \cdot {}_{n-1} p_{30} \cdot {}_{n-1} p_{25} \\
 & + f_2 \cdot {}_{n-2} p_{30} \cdot {}_{n-2} p_{25} + f_3 \cdot {}_{n-3} p_{30} \cdot {}_{n-3} p_{25} \\
 & + \dots + f_{n-1} \cdot p_{30} \cdot p_{25} + f_n] = 1.
 \end{aligned}$$

Substituiert man in (16) nacheinander für  $n$  die Werte 1, 2, 3, ...  $n$ , so resultiert das Gleichungssystem (17):

Aus den Gleichungen (17) lassen sich  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  sukzessive berechnen; es ist klar, dass diese Werte gegenüber den kontinuierlich stattfindenden Eintritten etwas zu klein sein werden, da die eintretenden Ehepaare während dem Eintrittsjahr dem Risiko des Absterbens gar nicht ausgesetzt sind, wobei dasjenige Risiko gemeint ist, welches die Kasse belastet.

Nehmen wir drittens an, die Eintritte finden Mitte eines Vereinsjahres statt, so dass am Ende eines jeden Vereinsjahres die Zahl der Ehepaare wieder genau auf 400 stehe. Die aufeinanderfolgenden Näherungswerte für  $f(x)$  seien  $f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{3}{2}}, f_{\frac{5}{2}}, \dots, f_{n-\frac{1}{2}}$ , so lässt sich die Gleichung (1<sup>b</sup>) näherungsweise durch die Gleichung (18) darstellen:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & n p_{30} + n p_{25} + \left[ f_{\frac{1}{2}} + n - \frac{1}{2} p_{30} + n - \frac{1}{2} p_{25} \right. \\
 & + f_{\frac{3}{2}} + n - \frac{3}{2} p_{30} + n - \frac{3}{2} p_{25} + f_{\frac{5}{2}} + n - \frac{5}{2} p_{30} + n - \frac{5}{2} p_{25} \\
 & \left. + \dots + f_{n - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} p_{30} + \frac{1}{2} p_{25} \right] = 1.
 \end{aligned}$$

Setzt man in Gleichung (18) für  $n$  der Reihe nach  $1, 2, 3, \dots, n$ , so ergibt sich das Gleichungssystem (19):

Hieraus lassen sich  $f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{3}{2}}, f_{\frac{5}{2}}, \dots, f_{n-\frac{1}{2}}$  sukzessive berechnen. Die Werte für  $\frac{1}{2}p_{30} \cdot \frac{1}{2}p_{25}, \frac{3}{2}p_{30} \cdot \frac{3}{2}p_{25}, \dots$  kann man durch Interpolation mittelst der Geraden oder der Parabel bestimmen. Bedenkt man, dass

$$n + \frac{1}{2}p_{30} + n + \frac{1}{2}p_{25} = \left(\frac{1}{2}p_{30} + \frac{1}{2}p_{25}\right) \cdot \left(n p_{30} + \frac{1}{2} + n p_{25} + \frac{1}{2}\right),$$

und ersetzt man näherungsweise  $n p_{30+\frac{1}{2}} \cdot n p_{25+\frac{1}{2}}$  durch  $n p_{30} \cdot n p_{25}$ , so resultiert aus (19) das Gleichungssystem (20):

Fassen wir das System (17) ins Auge, und setzen wir  $n = \infty$ ;  $\omega$  sei das höchste vorkommende Alter, so dass  $\omega+1 p_{30} \cdot \omega+1 p_{25} = 0$ ;  $\omega+2 p_{30} \cdot \omega+2 p_{25} = 0 \dots$ , so gehen die Gleichungen (17) über in (17<sup>a</sup>):

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 1 - p_{30} \cdot p_{25} &= f_1 \\
 1 - {}_2p_{30} \cdot {}_2p_{25} &= f_1 \cdot p_{30} \cdot p_{25} + f_2 \\
 1 - {}_3p_{30} \cdot {}_3p_{25} &= f_1 \cdot {}_2p_{30} \cdot {}_2p_{25} + f_2 \cdot p_{30} \cdot p_{25} + f_3 \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 1 - {}_\omega p_{30} \cdot {}_\omega p_{25} &= f_1 \cdot {}_{\omega-1}p_{30} \cdot {}_{\omega-1}p_{25} \\
 &\quad + f_2 \cdot {}_{\omega-2}p_{30} \cdot {}_{\omega-2}p_{25} + \dots + f_\omega \\
 (17^a) \} \quad 1 &= f_1 \cdot {}_\omega p_{30} \cdot {}_\omega p_{25} + f_2 \cdot {}_{\omega-1}p_{30} \cdot {}_{\omega-1}p_{25} \\
 &\quad + \dots + f_\omega \cdot p_{30} \cdot p_{25} + f_{\omega+1} \\
 &1 = f_2 \cdot {}_\omega p_{30} \cdot {}_\omega p_{25} + \dots \\
 &\quad + f_\omega \cdot {}_2p_{30} \cdot {}_2p_{25} + f_{\omega+1} \cdot p_{30} \cdot p_{25} \\
 &\quad + f_{\omega+2} \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem (17<sup>a</sup>) greifen wir die Gleichung heraus:

$$\begin{aligned}
 1 &= f_n \cdot {}_\omega p_{30} \cdot {}_\omega p_{25} + f_{n+1} \cdot {}_{\omega-1}p_{30} \cdot {}_{\omega-1}p_{25} \\
 &\quad + f_{n+2} \cdot {}_{\omega-2}p_{30} \cdot {}_{\omega-2}p_{25} + \dots + f_{n+\omega}.
 \end{aligned}$$

Sie besteht unabhängig von  $n$ , was nur denkbar ist, wenn  $f_n = f_{n+1} = f_{n+2} = f_{n+3} = \dots = f_{n+\omega}$  ( $\lim n = \infty$ ), d. h. die aus den Gleichungen (17) fliessenden Werte von  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$  bestimmen eine Kurve, welche sich der  $X$ -Achse asymptotisch nähert, und zwar im Abstande:

$$\begin{aligned}
 1 : (1 + p_{30} \cdot p_{25} + {}_2p_{30} \cdot {}_2p_{25} + {}_3p_{30} \cdot {}_3p_{25} \\
 + \dots + {}_\omega p_{30} \cdot {}_\omega p_{25}) = 0,03625.
 \end{aligned}$$

Analog findet man, dass die Werte  $f_0, f_1, f_2 \dots f_{n-1}$  gemäss den Gleichungen (15) eine Kurve bestimmen, die sich der  $X$ -Achse asymptotisch nähert, und zwar im Abstande:

$$1 : (p_{30} \cdot p_{25} + {}_2p_{30} \cdot {}_2p_{25} + {}_3p_{30} \cdot {}_3p_{25} + \dots + {}_\omega p_{30} \cdot {}_\omega p_{25}) = 0,03761.$$

Die Gleichungen (20) führen auf die Asymptote

$$1 : \frac{1}{2}p_{30} \cdot \frac{1}{2}p_{25} \cdot (1 + p_{30} \cdot p_{25} + {}_2p_{30} \cdot {}_2p_{25} + {}_3p_{30} \cdot {}_3p_{25} + \dots + {}_\omega p_{30} \cdot {}_\omega p_{25}) = 0,0365.$$

Die Werte  $f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{3}{2}}, f_{\frac{5}{2}}, \dots f_{n-\frac{1}{2}}$  gemäss den Gleichungen (19) legen eine Kurve fest, die sich gleichfalls asymptotisch der  $X$ -Achse nähert im Abstande:

$$1 : \left( \frac{1}{2}p_{30} \cdot \frac{1}{2}p_{25} + \frac{3}{2}p_{30} \cdot \frac{3}{2}p_{25} + \frac{5}{2}p_{30} \cdot \frac{5}{2}p_{25} + \dots + {}_{\omega-\frac{1}{2}}p_{30} \cdot {}_{\omega-\frac{1}{2}}p_{25} \right) = 0,0369.$$

Wir haben nun die Rechnung nach den Gleichungen (17) und (20) zahlenmässig durchgeführt. Die folgende Tabelle enthält die Werte für  $f(x)$  auf Grund der Gleichungen (17):

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ | $x$  | $f(x)$ |
|-----|--------|-----|--------|-----|--------|------|--------|
| 1   | 0,016  | 34  | 0,039  | 67  | 0,035  | 100  | 0,036  |
| 2   | 0,016  | 35  | 0,040  | 68  | 0,035  | 101  | 0,036  |
| 3   | 0,017  | 36  | 0,041  | 69  | 0,035  | 102  | 0,036  |
| 4   | 0,017  | 37  | 0,041  | 70  | 0,036  | 103  | 0,036  |
| 5   | 0,017  | 38  | 0,042  | 71  | 0,036  | 104  | 0,036  |
| 6   | 0,018  | 39  | 0,043  | 72  | 0,036  | 105  | 0,036  |
| 7   | 0,018  | 40  | 0,043  | 73  | 0,036  | 106  | 0,036  |
| 8   | 0,018  | 41  | 0,043  | 74  | 0,037  | 107  | 0,036  |
| 9   | 0,019  | 42  | 0,043  | 75  | 0,037  | 108  | 0,036  |
| 10  | 0,019  | 43  | 0,043  | 76  | 0,037  | 109  | 0,036  |
| 11  | 0,019  | 44  | 0,043  | 77  | 0,037  | 110  | 0,036  |
| 12  | 0,020  | 45  | 0,042  | 78  | 0,037  | 111  | 0,036  |
| 13  | 0,020  | 46  | 0,042  | 79  | 0,037  | 112  | 0,036  |
| 14  | 0,020  | 47  | 0,041  | 80  | 0,037  | 113  | 0,036  |
| 15  | 0,021  | 48  | 0,040  | 81  | 0,037  | 114  | 0,036  |
| 16  | 0,021  | 49  | 0,039  | 82  | 0,037  | 115  | 0,036  |
| 17  | 0,022  | 50  | 0,038  | 83  | 0,037  | 116  | 0,036  |
| 18  | 0,023  | 51  | 0,037  | 84  | 0,037  | 117  | 0,036  |
| 19  | 0,023  | 52  | 0,036  | 85  | 0,037  | 118  | 0,036  |
| 20  | 0,024  | 53  | 0,035  | 86  | 0,037  | 119  | 0,036  |
| 21  | 0,025  | 54  | 0,035  | 87  | 0,037  | 120  | 0,036  |
| 22  | 0,026  | 55  | 0,034  | 88  | 0,037  | 121  | 0,036  |
| 23  | 0,027  | 56  | 0,034  | 89  | 0,037  | 122  | 0,037  |
| 24  | 0,028  | 57  | 0,033  | 90  | 0,037  | 123  | 0,036  |
| 25  | 0,029  | 58  | 0,033  | 91  | 0,037  | 124  | 0,036  |
| 26  | 0,030  | 59  | 0,033  | 92  | 0,036  | 125  | 0,036  |
| 27  | 0,031  | 60  | 0,033  | 93  | 0,036  | 126  | 0,036  |
| 28  | 0,032  | 61  | 0,033  | 94  | 0,036  | 127  | 0,036  |
| 29  | 0,033  | 62  | 0,033  | 95  | 0,036  | 128  | 0,036  |
| 30  | 0,035  | 63  | 0,034  | 96  | 0,036  | .... | ....   |
| 31  | 0,036  | 64  | 0,034  | 97  | 0,036  | .... | ....   |
| 32  | 0,037  | 65  | 0,034  | 98  | 0,036  | .... | ....   |
| 33  | 0,038  | 66  | 0,034  | 99  | 0,036  | .... | ....   |

Die nächste Tabelle gibt die Werte für  $f(x)$  nach den Gleichungen (20):

| $x - \frac{1}{2}$ | $f(x)$ |
|-------------------|--------|-------------------|--------|-------------------|--------|-------------------|--------|
| 0                 | 0,016  | 32                | 0,038  | 64                | 0,034  | 96                | 0,036  |
| 1                 | 0,017  | 33                | 0,039  | 65                | 0,035  | 97                | 0,036  |
| 2                 | 0,017  | 34                | 0,040  | 66                | 0,035  | 98                | 0,036  |
| 3                 | 0,017  | 35                | 0,041  | 67                | 0,035  | 99                | 0,036  |
| 4                 | 0,017  | 36                | 0,042  | 68                | 0,036  | 100               | 0,036  |
| 5                 | 0,018  | 37                | 0,042  | 69                | 0,036  | 101               | 0,036  |
| 6                 | 0,018  | 38                | 0,043  | 70                | 0,036  | 102               | 0,036  |
| 7                 | 0,018  | 39                | 0,043  | 71                | 0,036  | 103               | 0,036  |
| 8                 | 0,019  | 40                | 0,043  | 72                | 0,037  | 104               | 0,036  |
| 9                 | 0,019  | 41                | 0,044  | 73                | 0,037  | 105               | 0,036  |
| 10                | 0,019  | 42                | 0,043  | 74                | 0,037  | 106               | 0,036  |
| 11                | 0,020  | 43                | 0,043  | 75                | 0,037  | 107               | 0,036  |
| 12                | 0,020  | 44                | 0,043  | 76                | 0,037  | 108               | 0,036  |
| 13                | 0,021  | 45                | 0,042  | 77                | 0,038  | 109               | 0,036  |
| 14                | 0,021  | 46                | 0,041  | 78                | 0,038  | 110               | 0,036  |
| 15                | 0,022  | 47                | 0,040  | 79                | 0,038  | 111               | 0,036  |
| 16                | 0,022  | 48                | 0,039  | 80                | 0,038  | 112               | 0,036  |
| 17                | 0,023  | 49                | 0,038  | 81                | 0,038  | 113               | 0,036  |
| 18                | 0,024  | 50                | 0,037  | 82                | 0,038  | 114               | 0,037  |
| 19                | 0,024  | 51                | 0,036  | 83                | 0,038  | 115               | 0,037  |
| 20                | 0,025  | 52                | 0,036  | 84                | 0,038  | 116               | 0,037  |
| 21                | 0,026  | 53                | 0,035  | 85                | 0,037  | 117               | 0,037  |
| 22                | 0,027  | 54                | 0,034  | 86                | 0,037  | 118               | 0,037  |
| 23                | 0,028  | 55                | 0,034  | 87                | 0,037  | 119               | 0,037  |
| 24                | 0,029  | 56                | 0,033  | 88                | 0,037  | 120               | 0,037  |
| 25                | 0,030  | 57                | 0,033  | 89                | 0,037  | 121               | 0,037  |
| 26                | 0,031  | 58                | 0,033  | 90                | 0,037  | 122               | 0,037  |
| 27                | 0,033  | 59                | 0,033  | 91                | 0,037  | 123               | 0,037  |
| 28                | 0,034  | 60                | 0,033  | 92                | 0,037  | 124               | 0,037  |
| 29                | 0,035  | 61                | 0,034  | 93                | 0,037  | 125               | 0,037  |
| 30                | 0,036  | 62                | 0,034  | 94                | 0,036  | ....              | ....   |
| 31                | 0,037  | 63                | 0,034  | 95                | 0,036  | ....              | ....   |

Die anschliessende Tabelle gibt die Zahl  $w(x)$  der Witwen, berechnet auf Mitte eines jeden Vereinsjahres [auf Grund der Gleichungen (20)]:

| $x - \frac{1}{2}$ | $w(x)$ |
|-------------------|--------|-------------------|--------|-------------------|--------|-------------------|--------|
| 0                 | 0,004  | 32                | 0,356  | 64                | 0,362  | 96                | 0,400  |
| 1                 | 0,012  | 33                | 0,370  | 65                | 0,363  | 97                | 0,399  |
| 2                 | 0,021  | 34                | 0,384  | 66                | 0,364  | 98                | 0,398  |
| 3                 | 0,030  | 35                | 0,397  | 67                | 0,366  | 99                | 0,396  |
| 4                 | 0,039  | 36                | 0,410  | 68                | 0,369  | 100               | 0,395  |
| 5                 | 0,047  | 37                | 0,422  | 69                | 0,372  | 101               | 0,394  |
| 6                 | 0,056  | 38                | 0,434  | 70                | 0,376  | 102               | 0,394  |
| 7                 | 0,065  | 39                | 0,444  | 71                | 0,380  | 103               | 0,393  |
| 8                 | 0,075  | 40                | 0,453  | 72                | 0,385  | 104               | 0,393  |
| 9                 | 0,084  | 41                | 0,461  | 73                | 0,388  | 105               | 0,392  |
| 10                | 0,093  | 42                | 0,468  | 74                | 0,392  | 106               | 0,392  |
| 11                | 0,102  | 43                | 0,473  | 75                | 0,395  | 107               | 0,392  |
| 12                | 0,112  | 44                | 0,476  | 76                | 0,399  | 108               | 0,392  |
| 13                | 0,122  | 45                | 0,477  | 77                | 0,401  | 109               | 0,393  |
| 14                | 0,131  | 46                | 0,477  | 78                | 0,404  | 110               | 0,393  |
| 15                | 0,141  | 47                | 0,475  | 79                | 0,406  | 111               | 0,394  |
| 16                | 0,152  | 48                | 0,471  | 80                | 0,407  | 112               | 0,394  |
| 17                | 0,162  | 49                | 0,466  | 81                | 0,409  | 113               | 0,395  |
| 18                | 0,173  | 50                | 0,459  | 82                | 0,410  | 114               | 0,395  |
| 19                | 0,185  | 51                | 0,451  | 83                | 0,411  | 115               | 0,396  |
| 20                | 0,196  | 52                | 0,442  | 84                | 0,411  | 116               | 0,397  |
| 21                | 0,208  | 53                | 0,433  | 85                | 0,411  | 117               | 0,397  |
| 22                | 0,221  | 54                | 0,423  | 86                | 0,411  | 118               | 0,398  |
| 23                | 0,233  | 55                | 0,413  | 87                | 0,411  | 119               | 0,398  |
| 24                | 0,246  | 56                | 0,403  | 88                | 0,410  | 120               | 0,399  |
| 25                | 0,259  | 57                | 0,394  | 89                | 0,409  | 121               | 0,399  |
| 26                | 0,273  | 58                | 0,386  | 90                | 0,408  | 122               | 0,400  |
| 27                | 0,286  | 59                | 0,379  | 91                | 0,407  | 123               | 0,400  |
| 28                | 0,300  | 60                | 0,373  | 92                | 0,406  | 124               | 0,400  |
| 29                | 0,314  | 61                | 0,368  | 93                | 0,404  | 125               | 0,400  |
| 30                | 0,328  | 62                | 0,365  | 94                | 0,403  | ....              | ....   |
| 31                | 0,342  | 63                | 0,363  | 95                | 0,401  | ....              | ....   |

### Literaturangaben.

Herr Professor *Rudio* in Zürich war so freundlich, mich aufmerksam zu machen auf die Arbeiten von *Hilbert* und *Volterra* über die Integralgleichungen. Insbesondere verdanke ich Herrn Professor *Dumas* in Lausanne folgende Literaturangaben:

*Hilbert*, Grundzüge einer Theorie der linearen Integralgleichungen.

*Volterra*, Leçons sur les équations intégrales.

*Heywood* et *Fréchet*, L'équation de Fredholm et ses applications à la physique.

*Lalesco*, Introduction à la théorie des équations intégrales.

*Bôcher*, An introduction to the study of integral equations.

*Kneser*, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik.

*Korn*, Über freie und erzwungene Gleichungen.

*Horn*, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Von diesen Werken war mir zugänglich dasjenige von *Volterra*. Obwohl ich dasselbe für meine Zwecke eigentlich nicht habe verwendbar machen können, so muss dieses Werk nichtsdestoweniger als grundlegend für die Theorie der Integralgleichungen angesehen werden; auch zeichnet es sich durch zahlreiche Literaturangaben aus. Weiterhin sei bemerkt, dass die von mir abgeleitete lineare Integralgleichung als ein Spezialfall der Integralgleichung von *Volterra*:

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, \xi) \cdot u(\xi) \cdot d\xi,$$

anzusehen ist;  $\varphi(x)$  und  $K(x, \xi)$  sind gegebene Funktionen von  $x$  resp. von  $x$  und  $\xi$ ;  $u(\xi)$  ist gesuchte Funktion von  $\xi$ ;  $a$  ist eine Konstante.

Für die von uns befolgte geometrische Methode waren  
vorbildlich:

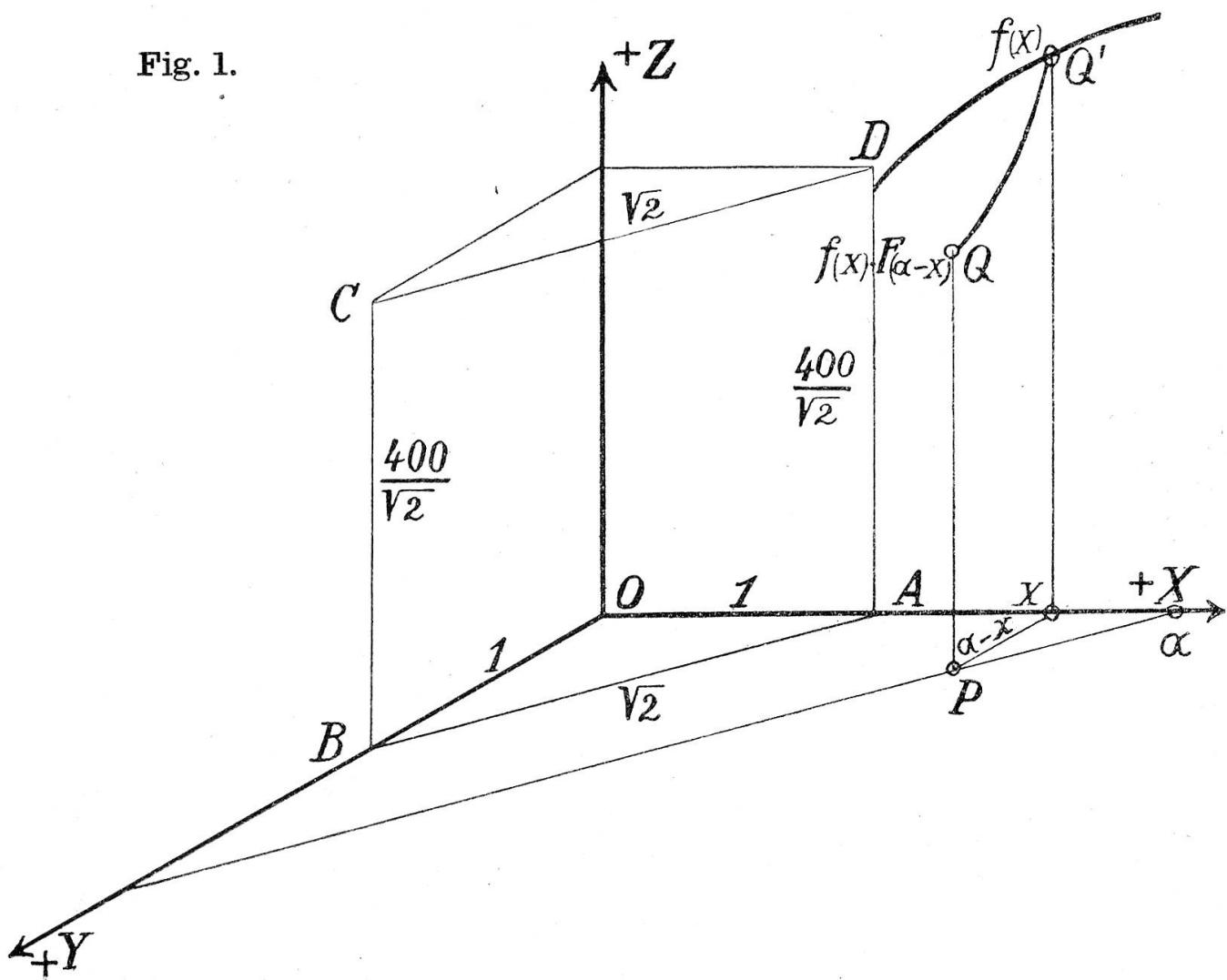
*Zeuners* Abhandlungen aus der mathematischen Sta-  
tistik (Leipzig, 1869).

Für die Ableitung von Gleichung (2) sei verwiesen  
auf:

*Czuber*, Vorlesungen über Differential- und Integral-  
rechnung, II. Band (1898), S. 149.

---

Fig. 1.



$$OA = 1$$

$$OB = 1$$

$$Ox = x$$

$$Oa = a$$

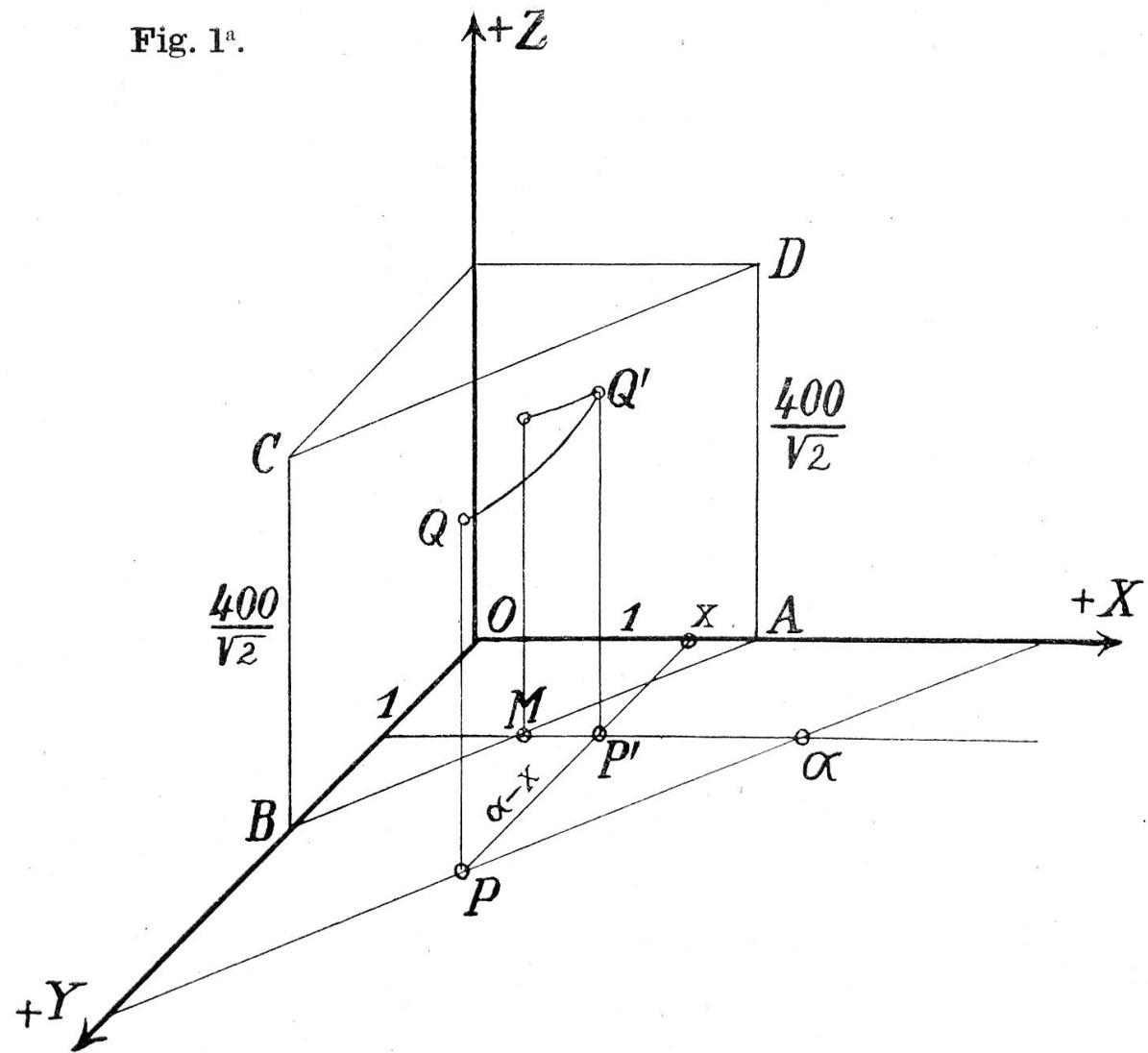
$$Aa = n = a - 1$$

$$xQ' = f(x)$$

$$PQ = f(x) \cdot F(a - x)$$

$$Px = ax = a - x$$

Fig. 1<sup>a</sup>.



$$\begin{aligned}
 OA &= 1 \\
 OB &= 1 \\
 Ox &= x \\
 Ma &= a - \frac{1}{2} = n \\
 P'Q' &= f(x) \\
 PQ &= f(x) \cdot F(a-x) \\
 PP' &= a - x
 \end{aligned}$$

63

