Beiträge zur Theorie des Einflusses der Sterblichkeit auf die Reserven

Autor(en): **Goldmann, Martin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **10 (1915)**

PDF erstellt am: **23.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967466

Beiträge zur Theorie des Einflusses der Sterblichkeit auf die Reserven.

Von Dr. **Martin Goldmann**, Bern.

Eine der wichtigsten Aufgaben der modernen Lebensversicherungstechnik besteht in dem Bestreben, die tatsächlichen Verhältnisse und Massenerscheinungen, auf denen das Versicherungswesen beruht, möglichst allseitig und präzis in ihren Details zu erfassen und sich denselben anzupassen. Als eine Folgeerscheinung dieser Tendenz sehen wir unter anderem die stets wachsende Anzahl von Sterblichkeitstafeln, welche, von verschiedenen Gesellschaften und deren Gruppen aufgestellt, in ihrer immer weitergehenden Spezialisierung den Zweck verfolgen, die Eigenart jeder Gesamtheit, der sie dienen, statistisch zu erforschen und die Resultate der Untersuchung in Rechnung zu ziehen. Die bisherigen Untersuchungen gestatten die sichere Annahme, dass die Sterblichkeit einer Volksschicht, auch wenn abnormale Zustände nicht eintreten, innerhalb gewisser Zeitperioden Änderungen unterworfen ist. In ganz besonderem Masse trifft dies bei dem Bestande einer Lebensversicherungsgesellschaft zu, da dessen Zusammensetzung nicht nur von der allgemeinwirtschaftlichen Lage, sondern auch vom geschäftlichen Gebaren der Gesellschaft und den Prinzipien der medizinischen Auslese ganz bedeutend abhängt. Diese

Gründe zwingen die Gesellschaften, innerhalb verhältnismässig kurzer Zeit (etwa 20 Jahren) ihre Rechnungsgrundlagen („erster Ordnung“), insbesondere die Sterblichkeitstafel, durch den geänderten Verhältnissen angepasste zu ersetzen. Da nun die Liquidierung des nach der früheren Sterblichkeitstafel behandelten Stockes um so langsamer vor sich geht, mit je grösserer Sorgfalt bei Sammlung desselben verfahren wurde, ist es fast zur Regel geworden, dass eine Gesellschaft für die Todesfallversicherung (und auch für Erlebensfallversicherungen) mehrere Tafeln gleichzeitig anwendet. Es ist sogar zu erwarten, dass nach Abschluss der durch den Verein deutscher Gesellschaften jetzt eingeleiteten statistischen Untersuchungen die Zahl der zur Verwendung gelangenden Tafeln eine bedeutende Steigerung erfahren dürfte, und dass die mit Einführung einer neuen Tafel in den Betrieb entstehenden Fragen erhöhtes Interesse gewinnen.

Von wesentlichem Interesse ist die Frage nach dem Einflusse der neuen Tafel auf den bisherigen Stock, bzw. auf seine momentane und zukünftige Reserve. Die Kenntnis dieses Einflusses wäre von eminent praktischer Bedeutung, und zwar nicht nur aus Rücksichten auf die Vereinfachung des Betriebes, sondern auch um den Anforderungen der Aufsichtsämter in möglichst einfacher Weise genügen zu können. Die Frage nach der relativen Höhe der zukünftigen Reserven muss aber bei der Wahl der neuen Tafel sorgfältig berücksichtigt werden; sie hängt auch aufs engste mit der Reservierung der Prämienerhöhungen der minderwertigen Risken zusammen und ist von besonderer Tragweite bei Versicherungen ohne Gewinnanteil, die nicht überall in solchem Masse wie in Deutschland abnehmen und wohl kaum verschwinden dürften.

Die Abhängigkeit der verschiedenen Versicherungswerte von der Sterblichkeit ist sehr verwickelter Natur. Ganz beträchtlich steigern sich die Schwierigkeiten bei der kompliziertesten Funktion, der Prämienreserve; so dass die namhaftesten Autoren die Lösbarkeit des Problems, das hier einigen Betrachtungen unterworfen werden soll: die Änderung der Sterblichkeit in übersichtlicher Weise mit den entsprechenden Änderungen der Prämienreserven in Zusammenhang zu bringen, direkt bezweifeln. Sprague[1]), Dormoy[2]) halten die Lösbarkeit für „schwer, wenn nicht unmöglich". Man empfiehlt als ultima ratio Stichproben in „genügender Anzahl". Dazu könnte man bemerken, dass die Bestimmung, welche Anzahl als genügend zu erachten wäre, fast ebenso schwer, wie das Problem selbst ist: eine zu kleine Anzahl könnte leicht zu Überraschungen bei einer etwaigen definitiven Umrechnung der Reserven eines Stockes führen, eine sehr grosse hingegen würde die Gesamtübersicht vermindern und ist, zumal bei neuen oder hypothetischen Tafeln, wenn nicht alle Hülfswerte vorliegen, äusserst mühsam. So hat z. B. King[3]) direkt einen Stock der Todesfallversicherungen („Model Office") mit willkürlich angenommenem Zu- und Abgang konstruiert und die Gesamtreserven nach diversen Sterblichkeitstafeln und Zinssätzen berechnet, wobei auch Selekttafeln berücksichtigt wurden.

Bei Untersuchung eines derartigen Problems dürfte es auch von Vorteil und einiger Bedeutung sein, wenn man mehr Klarheit in der Weise zu schaffen sucht, dass man die durch die Praxis geschaffenen Verhältnisse durch andere ersetzt, denen möglichst einfache

---

[1]) „Journal of the Institute of Actuaries", Bd. XXI, S. 78.
[2]) „Théorie mathématique des Assurances, Bd. II, S. 7—8.
[3]) „Journal of the Institute of Actuaries, Bd. XX, S. 268 ff.

Beziehungen zugrunde liegen. Mögen derartige abstrakte Annahmen den tatsächlichen Verhältnissen auch wenig und nur entfernt entsprechen, so kann doch eine erschöpfende und allseitige Kenntnis der Folgen solcher vereinfachenden Hypothesen von Vorteil sein, sowohl bei weiteren theoretischen Untersuchungen, als auch bei den von der Praxis geforderten Arbeiten auf diesem Gebiete [1]).

Im folgenden soll unter Versicherung kurzerhand immer die gemischte (alterierte) Versicherung verstanden werden, und nur diese wird hier in Betracht gezogen. Dies ist durch die theoretische und praktische Bedeutung dieser Versicherungsform gerechtfertigt, und zwar um so eher, als die durch Betrachtung dieser Versicherungsform gewonnenen Schlüsse auch auf andere Versicherungsformen Anwendung finden können.

§ 1. Wir betrachten die Lebenswahrscheinlichkeiten und die von denselben abhängigen Versicherungswerte zweier differierenden Tafeln; die korrespondierenden Grössen seien durch Indices unterschieden, und ihre Differenzen, die wir Variationen nennen wollen, seien mit δ bezeichnet.

Ausgehend von den Überlebenswahrscheinlichkeiten kann man ihre Variation schreiben:

$$\delta_n p_x = {}_n p'_x - {}_n p_x = p'_x \cdot {}_{n-1}p'_{x+1} - {}_{n-1}p_x \cdot p_{x+n-1}.$$

Durch Subtraktion und Addition gleicher Grössen folgt:

$$\delta_n p_x = p'_x \cdot {}_{n-1}p'_{x+1} - p_x \cdot {}_{n-1}p'_{x+1} + p_x \cdot p'_{x+1} \cdot {}_{n-2}p'_{x+2} - + \cdots - {}_{n-2}p_x \cdot p_{x+n-2} \cdot p'_{x+n-1} + {}_{n-1}p_x \cdot p'_{x+n-1} - {}_{n-1}p_x \cdot p_{x+n-1}.$$

---

[1]) Vgl. Meikle, Policy Life-lines, „Journal of the Institute of Actuaries“, Bd. XXIII, S. 385.

Aus je zwei Nachbargliedern nehmen wir die gemeinschaftlichen Faktoren vor die Klammer und erhalten für die Variation der Überlebenswahrscheinlichkeiten:

$$\delta_n p_x = (p'_x - p_x) \cdot {}_{n-1}p'_{x+1} + p_x (p'_{x+1} - p_{x+1})\, {}_{n-2}p'_{x+2} + \cdots \cdot {}_{n-1}p_x (p'_{x+n-1} - p_{x+n-1}).$$

Die Variation der einjährigen Lebenswahrscheinlichkeit $\delta p_x = p'_x - p_x$ sei abkürzend mit δ_x bezeichnet.

Dann ist, wenn wir obige Gleichung für $\delta_n p_x$ mit dem Abzinsungsfaktor v^n multiplizieren:

$$\delta_n p_x \cdot v^n = \delta_n E_x = \left\{\delta_x \cdot {}_{n-1}E'_{x+1} + {}_1E_x \cdot \delta_{x+1} \cdot {}_{n-2}E'_{x+2} + \cdots {}_{n-1}E_x \cdot \delta_{x+n-1}\right\} v.$$

Bilden wir die Summe aller Variationen $\delta_m E_x$ für $m = 0$ bis $m = n - 1$, wobei aus Zweckmässigkeitsgründen statt der üblichen Rentenbezeichnung die temporäre Leibrente des $(x + i)$-jährigen auf das Endalter $(x + n)$ durch ${}^n\mathrm{a}_{x+i}$ bezeichnet wird. Es resultiert:

$$\begin{array}{l} \delta^n \mathrm{a}_x \\ = {}^n\mathrm{a}'_x - {}^n\mathrm{a}_x = \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \delta_x \\ + \delta_x \cdot {}_1E'_{x+1} + \delta_{x+1} \cdot {}_1E_x \\ + \delta_x \cdot {}_2E'_{x+1} + \delta_{x+1} \cdot {}_1E_x \cdot {}_1E'_{x+2} \\ \qquad\qquad + \delta_{x+2} \cdot {}_2E_x \\ + \delta_x \cdot {}_{n-2}E'_{x+1} + \delta_{x+1} \cdot {}_1E_x \cdot {}_{n-3}E'_{x+2} \\ \qquad\qquad + \cdots \delta_{x+n-2} \cdot {}_{n-2}E_x \end{array} \right\} v.$$

Ändern wir die Reihenfolge der Summanden, indem wir die in einer vertikalen Kolonne stehenden Glieder zusammenfassen, so ergibt sich als Summe jeder Vertikalkolonne ein Rentenausdruck, und es nimmt die vorstehende Gleichung folgende Form an:

$$\text{(I)} \qquad \delta^n \mathrm{a}_x = v \Big\{ \delta_x \cdot {}^n\mathrm{a}'_{x+1} + \delta_{x+1} \cdot {}_1E_x \cdot {}^n\mathrm{a}'_{x+2} + \ldots \delta_{x+n-3} \cdot {}^n\mathrm{a}'_{x+n-2} \cdot {}_{n-3}E_x + \delta_{x+n-2} \cdot {}_{n-2}E_x \Big\}$$

Für die Folge sei diese Gleichung als *Rentenvariationsformel* angeführt.

§ **2.** Betrachten wir nun die Reservenvariation. Da nach der bekannten Formel:

$$(1 - {}_iV_x) = (1 - {}_1V_x)\,(1 - {}_1V_{x+1}) \cdots (1 - {}_1V_{x+i-1})$$

alle Resultate, die für die erstjährige Reserve gelten, unmittelbar auf alle späteren Reserven übertragen werden können, so dürfen wir uns auf die Betrachtung der Variation der erstjährigen Reserve beschränken. Unsere Formeln beziehen sich auf eine konstante Versicherungsdauer bzw. konstantes Endalter, es soll daher, solange kein Missverständnis möglich ist, der Index n in der Folge wegfallen. Die Reservenvariation ist:

$$\delta_1 V_x = \frac{\mathrm{a}_{x+1}}{\mathrm{a}_x} - \frac{\mathrm{a}'_{x+1}}{\mathrm{a}'_x} = \frac{1}{\mathrm{a}_x \cdot \mathrm{a}'_x} \Big\{ \mathrm{a}'_x \cdot \mathrm{a}_{x+1} - \mathrm{a}_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} \Big\}.$$

Die Rente des x-jährigen werde nach der bekannten Formel $\mathrm{a}_x = 1 + vp_x \cdot \mathrm{a}_{x+1}$ durch die Rente des $(x+1)$-jährigen ersetzt. Es folgt mithin

$$\delta_1 V_x = \frac{1}{\mathrm{a}_x \cdot \mathrm{a}'_x} \cdot$$

$$\Big\{ \mathrm{a}_{x+1} + vp'_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} \cdot \mathrm{a}_{x+1} - \mathrm{a}'_{x+1} - vp_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} \cdot \mathrm{a}_{x+1} \Big\}$$

$$= \frac{v}{\mathrm{a}_x \cdot \mathrm{a}'_x} \left\{ \delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} \cdot \mathrm{a}_{x+1} - \frac{\delta \mathrm{a}_{x+1}}{v} \right\}$$

Wir ersetzen die Rente a_{x+1} durch ihre $(n-1)$ Summanden und erhalten bezugnehmend auf Gleichung (I), die wir auf das Alter $(x+1)$ anwenden:

$$\delta_1 V_x = \frac{v}{\mathrm{a}_x \cdot \mathrm{a}'_x} \left\{ \begin{array}{l} \delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} + \delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} \cdot {}_1E_{x+1} + \ldots \delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} \cdot {}_{n-2}E_{x+1} \\ -\delta_{x+1} \cdot \mathrm{a}'_{x+2} - \delta_{x+2} \cdot \mathrm{a}'_{x+3} \cdot {}_1E_{x+1} - \ldots \delta_{x+n-2} \cdot {}_{n-3}E_{x+1} \end{array} \right\}$$

und daraus folgende Formel für die Berechnung der Unterschiede zwischen Reserven, die infolge Änderungen der Lebenswahrscheinlichkeiten entstehen:

$$\text{(II)} \quad \delta_1 V_x = \frac{v}{\mathrm{a}_x \cdot \mathrm{a}'_x} \Big\{ \left(\delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} - \delta_{x+1} \cdot \mathrm{a}'_{x+2} \right)$$

$$+ {}_1E_{x+1} \left(\delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} - \delta_{x+2} \cdot \mathrm{a}'_{x+3} \right) + \ldots .$$

$$+ {}_{n-3}E_{x+1} \left(\delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} - \delta_{x+n-2} \right) + {}_{n-2}E_{x+1} \cdot \delta_x \cdot \mathrm{a}'_{x+1} \Big\}$$

Diese Gleichung wollen wir als *Reservenvariationsformel* bezeichnen.

Zur Illustration derselben möge folgendes numerisches Beispiel Platz finden, in welchem die aus den Tafeln M W I und Anker-Tafel resultierenden Reserven miteinander verglichen werden (s. S. 60).

Die Anwendungsmöglichkeit der Reservenvariationsformel ist sehr mannigfaltig, und ich behalte mir vor, bei einer andern Gelegenheit auf dieselbe zurückzukommen. In der vorliegenden Arbeit sei sie benutzt, um einen neuen Beweis des Schärtlinschen Satzes zu liefern.

§ 3. In seinem in Ehrenzweigs Assekuranzjahrbuch, Bd. XI, 1890, erschienenen Aufsatz: „Über die Reservenrechnung mit Bruttoprämien" beweist Dr. G. Schärtlin die von uns wie folgt formulierte Eigenschaft der Reserve:

Sind bei einer Versicherungsdauer **n** *die Reserven nach 2 Sterblichkeitstafeln einander gleich, so werden bei einer* **kürzeren** *Versicherungsdauer* **m** *jene Reserven* **grösser,** *welche nach der Tafel mit* **grösseren** *Erlebenswahrscheinlichkeiten berechnet sind.*

i	Anker-Tafel p'_{30+i}	MWI p_{30+i}	δ_{30+i}	${}^{40}\mathfrak{a}'_{31+i}$	$\delta_{30+i}\cdot{}^{40}\mathfrak{a}'_{31+i}$	$\delta_{30}\cdot{}^{40}\mathfrak{a}'_{31} - \delta_{31+i}\cdot{}^{40}\mathfrak{a}'_{31+i}$	${}_{i-1}E_{31}$	Kol. 7 × Kol. 8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.99557	0.99118	0.00439	7.730	0.03393			
1	547	099	448	6.997	3135	0.00258	1.—	0.00258
2	537	076	461	6.236	2875	0518	0.9575	496
3	523	056	467	5.445	2543	0850	0.9166	779
4	505	030	475	4.624	2196	1197	0.8772	1050
5	482	001	481	3.770	1813	1580	0.8393	1326
6	452	8973	479	2.883	1381	2012	0.8028	1615
7	414	8942	472	1.960	0925	2468	0.7677	1895
8	367	8905	462	1. —	0462	2931	0.7339	2151
9						3393	0.7013	2380
								$\Sigma = 0.11950$

$$\delta\,{}^{10}_{1}V_{30} = \frac{0.11950}{{}^{40}\mathfrak{a}_{30}\cdot{}^{40}\mathfrak{a}'_{30}}\cdot v = \frac{0.11950}{8.275\cdot 8.435\cdot 1.035} = 0.00165.$$

Direkte Rechnung ergibt: ${}^{10}_{1}V'_{30} - {}^{10}_{1}V_{30} = 0.08358 - 0.08198 = 0.00160.$

Sind nach obiger Voraussetzung die Reserven der Versicherungsdauer n nach 2 verschiedenen Tafeln einander gleich, so muss, wie bekannt, in diesem Falle ${}^n\mathfrak{a}_{x+i} = {}^n\mathfrak{a}'_{x+i}\,(1-k)$ sein (wir wählen k positiv), und es folgt aus der bekannten Beziehung: $p'_{x+i} = p_{x+i}\left(1 + \frac{k}{{}^n\mathfrak{a}_{x+i} - 1}\right)$ durch Einsetzung der Rente des nächstfolgenden Alters $p'_{x+i} = p_{x+i} + \frac{k}{v\,{}^n\mathfrak{a}_{x+i+1}}$; mithin ist

$$(\alpha)\quad p'_{x+i} - p_{x+i} = \delta_{x+i} = \frac{k}{v\cdot{}^n\mathfrak{a}_{x+i+1}} = \frac{k}{(1-k)\cdot v\cdot{}^n\mathfrak{a}'_{x+i+1}}$$

Daher

$$(\beta)\qquad \delta_{x+i}\cdot{}^n\mathfrak{a}'_{x+i+1} = \frac{k}{v\,(1-k)} = \text{cons.}$$

Diese Beziehung gilt nur für $0 \gtreqless i \leqq n-3$.

Das vorletzte $(n-1)$-te Versicherungsjahr kommt hier nicht in Betracht, da die letzten Reserven vor der Auszahlung einander nicht gleich sein können.

Aus ${}^n\mathfrak{a}_{x+n-2} = {}^n\mathfrak{a}'_{x+n-2}\,(1-k)$ folgt:

$$1 + v\,p_{x+n-2} = 1 + v\,p'_{x+n-2} - k\cdot{}^n\mathfrak{a}'_{x+n-2}$$

Mithin ist

$$(\gamma)\qquad p'_{x+n-2} - p_{x+n-2} = \delta_{x+n-2}$$
$$= \frac{k}{v}\cdot{}^n\mathfrak{a}'_{x+n-2} = \frac{k}{(1-k)\cdot v}\cdot{}^n\mathfrak{a}_{x+n-2}$$

In der Reservenvariationsformel:

$$\delta^m_1 V_x = \frac{v}{{}^m\mathfrak{a}_x\cdot{}^m\mathfrak{a}'_x}\Big\{\left(\delta_x\cdot{}^m\mathfrak{a}'_{x+1} - \delta_{x+1}\cdot{}^m\mathfrak{a}'_{x+2}\right) + \cdots$$
$$+ {}_{m-3}E_{x+1}\left(\delta_x\cdot{}^m\mathfrak{a}'_{x+1} - \delta_{x+m-2}\right) + {}_{m-2}E_{x+1}\cdot\delta_x\cdot{}^m\mathfrak{a}'_{x+1}\Big\}$$

untersuchen wir das Vorzeichen der zu summierenden

Terme, nachdem δ_{x+i} durch die oben festgestellten Ausdrücke laut Gleichung (α) ersetzt wurde:

$$\frac{k}{(1-k)\,v}\cdot\frac{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+1}}{{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+1}}-\frac{k}{(1-k)\,v}\cdot\frac{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+i+1}}{{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+i+1}}.$$

Wir wollen die hier vorkommenden Rentenquotienten näher betrachten:

$$\frac{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+1}}{{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+1}}=\frac{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+1}}{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+1}+{}_{m-1}E'_{x+1}\cdot{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+m}}=\frac{1}{1+\frac{{}_{m-1}E'_{x+1}}{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+1}}\cdot{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+m}}.$$

Im Nenner erscheint, ausser dem vom laufenden Versicherungsjahr i nicht abhängigen Faktor ${}^{n}\mathfrak{a}'_{x+m}$, die jährliche Erlebensfallprämie. Durch Einsetzung der diskontierten Zahlen der Lebenden erhält man:

$$\frac{{}_{m-1}E'_{x+1}}{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+1}}=\frac{D'_{x+m}}{N'_{x+1}-N'_{x+m}}$$

Da $(x+m)$, das Endalter der Versicherung, konstant bleibt, so folgt daraus, dass sich diese Prämie bei steigendem Eintrittsalter *erhöht*. Mithin *fällt* der Rentenquotient $\left(\frac{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+i+1}}{{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+i+1}}\right)$ bei steigendem Alter, die Differenzen:

$$\frac{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+1}}{{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+1}}-\frac{{}^{m}\mathfrak{a}'_{x+i+1}}{{}^{n}\mathfrak{a}'_{x+i+1}}$$

sind daher *sämtlich positiv*, und es folgt:

$$\underline{\delta\,{}^{m}_{1}V_{x}={}^{m}_{1}V'_{x}-{}^{m}_{1}V_{x}>0}\quad\text{w. z. b. w.}$$

Untersuchen wir das Ergebnis vorstehender Formeln, wenn wir zu dem Grenzfall $m=n$ übergehen.

Da laut (β) alle Produkte $\delta_{x+i} \cdot {}^{n}\mathfrak{a}'_{x+1+i} = \frac{k}{(1-k)\,v}$ sind, solange $0 \overline{\gtrless} i \leqq n-3$, so verschwinden ohne weiteres alle Summanden in der Reservenvariationsformel bis auf die 2 letzten; diese müssen wir näher untersuchen.

Es ist also:

$$\delta\,{}_{1}^{n}V_x = \frac{v}{{}^{n}\mathfrak{a}_x \cdot {}^{n}\mathfrak{a}'_x} \Big\{ {}_{n-3}E_{x+1} \left(\delta_x \cdot {}^{n}\mathfrak{a}'_{x+1} - \delta_{x+n-2}\right) + \delta_x \cdot {}^{n}\mathfrak{a}'_{x+1} \cdot {}_{n-2}E_{x+1} \Big\}.$$

Wir setzen:

$$\delta_x \cdot {}^{n}\mathfrak{a}'_{x+1} = \frac{k}{(1-k)\,v} \text{ und } \delta_{x+n-2} = \frac{k}{(1-k)\,v} \cdot {}^{n}\mathfrak{a}_{x+n-2}$$

laut Gleichung (α) bzw. (γ).

Dann wird, wenn wir noch

$${}_{n-2}E_{x+1} = {}_{n-3}E_{x+1} \cdot {}_{1}E_{x+n-2}$$

berücksichtigen:

$$\delta\,{}_{1}^{n}V_x = \frac{v}{{}^{n}\mathfrak{a}_x \cdot {}^{n}\mathfrak{a}'_x} \cdot {}_{n-3}E_{x+1} \cdot \frac{k}{(1-k)\,v} \cdot \Big\{ 1 - {}^{n}\mathfrak{a}_{x+n-2} + {}_{1}E_{x+n-2} \Big\} = 0$$

welche Gleichung die Voraussetzung, von der wir ausgegangen sind, darstellt.

§ 4. *Einführung der Sterblichkeitsintensität.* Für die folgenden Betrachtungen ist die Einführung des Begriffes der Sterblichkeitsintensität notwendig. Diese [1]) gibt die in einem Moment zur Zeit x erfolgende Ab-

[1]) Vgl. Direktor Prof. Dr. Ch. Moser: „Intensität der Sterblichkeit“ in den Mitteilungen der schweizerischen Versicherungsmathematiker, 1906, S. 30, und diesbezügliche Vorlesung.

nahme der Funktion $F(x)$ an, wenn diese Abnahme auf den Grössenbetrag 1 und die Zeitdauer 1 bezogen wird. $F(x)$ stellt die Zahl der Lebenden des Alters x dar.

Bezeichnet man die Abnahme von $F(x)$ in dem endlichen Zeitintervall Δx mit $\{F(x) - F(x + \Delta x)\}$, so folgt aus dem Bruche

$$\frac{F(x) - F(x + \Delta x)}{F(x) \cdot \Delta x}$$

nach dem Grenzübergang Lim $\Delta x = dx = 0$ als Sterblichkeitsintensität des Alters x:

$$\mu_x = \lim_{\Delta x = dx} \frac{F(x) - F(x + \Delta x)}{F(x) \cdot \Delta x}$$

$$= - \frac{d\,F(x)}{F(x) \cdot dx} = - \frac{d}{dx} \operatorname{Lg} F(x)$$

Es bedeutet $-d\,F(x) = F(x) - F(x + dx)$ die Anzahl der Sterbefälle T_x in dem Zeitintervall dx. Man erhält demnach: $T_x = F(x) \cdot \mu_x dx$; d. h. die Zahl der Todesfälle aus einer bestimmten Anzahl der Lebenden, die in das Zeitintervall eintreten, *vergrössert* sich, wenn die Sterblichkeitsintensität μ_x durch eine *grössere* μ'_x ersetzt wird.

Anderseits erhält man aus der Definitionsgleichung durch Integration zwischen den Grenzen x und $(x + 1)$:

$$-\int_x^{x+1} \mu_\tau \, d\tau = \left[\operatorname{Lg} F(\tau)\right]_x^{x+1} = \operatorname{Lg} \frac{F(x+1)}{F(x)} = \operatorname{Lg} p_x$$

Daraus folgt die Beziehung zwischen der Sterblichkeitsintensität und der Sterbenswahrscheinlichkeit $q_x = 1 - p_x$:

$$q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu_\tau \, d\tau}.$$

§ **5.** *Kontinuierliche Renten.* Betrachten wir die Gesamtheit der x-jährigen Personen und nehmen an, dass sich ihre Anzahl in jedem Momente $d\tau$ der Zeitstrecke von 0 bis n Jahren durch eine analytische Funktion $F(x+\tau)$ ausdrücken lässt.

Es liegt im Wesen der Leibrente, dass die Zahlungen der von der Person durchlebten Zeit proportional sind, und üblicherweise wird der Proportionalitätsfaktor gleich 1 gesetzt. Mithin beträgt die Zahlung im Zeitelement $d\tau$: $F(x+\tau) \cdot d\tau$; dementsprechend ist der Barwert dieser Zahlung an alle Lebenden im Zeitpunkt t gleich:

$$(1) \qquad v^{\tau-t} \cdot F(x+\tau)\, d\tau.$$

Durchläuft τ kontinuierlich alle Werte von t bis n, so ergibt die Summe aller dadurch entstehenden Ausdrücke (1) den Barwert der Zahlungen an die Gruppe zur Zeit t als:

$$(2) \qquad v^{-t} \int_t^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau$$

Daraus folgt nach Division durch $F(x+t)$ der Barwert der $(n-t)$ Jahre temporären Leibrente des $(x+t)$-jährigen:

$$(3) \qquad \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = \frac{1}{v^t F(x+t)} \cdot \int_t^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau$$

und man erhält für die n-jährige, sofort beginnende temporäre Rente des x-jährigen:

$$(3^a) \qquad \bar{\mathrm{a}}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{F(x)} \cdot \int_0^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau$$

§ **6.** *Prämie und Reserve für die kontinuierliche Todesfall- und gemischte Versicherung.* Für jeden im

Zeitelement $d\tau$ vorkommenden Todesfall sei die Einheit zu zahlen; deren Anzahl ergibt sich aus der Differenz der Zahlen der Lebenden als:

$$F(x+\tau) - F(x+\tau+d\tau) = -dF(x+\tau);$$

der Zuwachs hat negatives Vorzeichen, da die Funktion eine fallende ist. Diese Grösse, auf den Moment t rückdiskontiert, liefert:

$$-v^{\tau-t} \cdot dF(x+\tau).$$

Wir lassen die Variable kontinuierlich alle Werte von t bis n durchlaufen und erhalten, wenn wir summieren, das Integral: $-\int\limits_t^n v^{\tau-t}\, dF(x+\tau)$, dessen Wert die Zahlung an die Gesamtheit darstellt. Durch die Anzahl der ins Alter $(x+t)$ Eintretenden dividiert, ergibt dieser Wert die einmalige Prämie für die kontinuierliche temporäre Todesfallversicherung:

$$-\frac{1}{v^t \cdot F(x+t)} \cdot \int\limits_t^n v^\tau\, dF(x+\tau).$$

Die partielle Integration ergibt:

$$(4)\quad -\frac{\int\limits_t^n v^\tau\, dF(x+\tau)}{v^t \cdot F(x+t)} = \frac{-\left|v^\tau \cdot F(x+\tau)\right|_t^n + \operatorname{Lg} v \cdot \int\limits_t^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau}{v^t \cdot F(x+t)}$$

$$= 1 - \frac{v^n \cdot F(x+n)}{v^t \cdot F(x+t)} + \operatorname{Lg} v \cdot \frac{1}{v^t \cdot F(x+t)} \cdot \int\limits_t^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau.$$

Nun ist die Einmalprämie für die Erlebensversicherung des $(x+t)$-jährigen auf $(n-t)$ Jahre

$${}_{n-t}E_{x+t} = \frac{v^n \cdot F(x+n)}{v^t \cdot F(x+t)}.$$

Führt man die Grösse $-\operatorname{Lg} v = \delta$ (die Zinsintensität [1])) ein, so lässt sich (4) jetzt schreiben:

(4[a])
$$1 - {}_{n-t}E_{x+t} - \delta \cdot \frac{1}{v^t \cdot F(x+t)} \cdot \int_t^n v^\tau\, F(x+\tau)\, d\tau$$

Ziehen wir die Gleichung (3) für die Rente in Betracht und addieren zu (4[a]) die Erlebensversicherungsprämie ${}_{n-t}E_{x+t}$, um die Prämie für die gemischte Versicherung zu erhalten, so resultiert dieselbe als:

$$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} = 1 - \delta \cdot \bar{\mathrm{a}}_{x+t:\overline{n-t|}}. \tag{5}$$

Durch die entsprechende Rente dividiert, ergibt sich die jährliche Prämie für die kontinuierliche $(n-t)$-jährige gemischte Versicherung des $(x+t)$-jährigen

$$\bar{P}_{x+t:\overline{n-t|}} = \frac{1}{\bar{\mathrm{a}}_{x+t:\overline{n-t|}}} - \delta. \tag{6}$$

Für die Reserve der kontinuierlichen Versicherung erhält man nach Einsetzung der erhaltenen Ausdrücke aus Gleichung (5) und (6):

$$ {}_tV(\bar{P}_{x:\overline{n|}}) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{P}_{x:\overline{n|}} \cdot \bar{\mathrm{a}}_{x+t:\overline{n-t|}} = 1 - \frac{\bar{\mathrm{a}}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\bar{\mathrm{a}}_{x:\overline{n|}}} \tag{7a}$$

Und daraus laut Gleichung (3):

$$ {}_tV(\bar{P}_{x:\overline{n|}}) = 1 - \frac{\dfrac{1}{v^t \cdot F(x+t)} \cdot \displaystyle\int_t^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau}{\dfrac{1}{F(x)} \cdot \displaystyle\int_0^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau}. \tag{7}$$

§ **7.** *Der Zeichenwechselsatz.* Diese Benennung gibt Herr Prof. Dr. Moser (Vorlesung an der Universität

[1]) Eine Verwechslung mit der früheren Bezeichnung von δ als „Variation“ in den §§ 1—3 ist wohl ausgeschlossen.

Bern, 1911)[1]) einem allgemeinen Satz über den Einfluss einer Änderung der Sterblichkeitsintensität auf die Reserve.

Den Ausgangspunkt bildet die allgemeine Reserveformel (7) am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen (6)

$$(\alpha)\quad {}_tV\left(\overline{P}_{x:\overline{n}|}\right) = 1 - \frac{\dfrac{1}{v^t \cdot F(x+t)} \cdot \displaystyle\int_t^n v^\tau F(x+\tau)\,d\tau}{\dfrac{1}{F(x)} \cdot \displaystyle\int_0^n v^\tau F(x+\tau)\,d\tau}.$$

Erhöht man die Sterblichkeitsintensität μ_τ in einem Bereich zwischen t und n, so vermindert sich die Zahl der Lebenden $F(x+\tau)$; infolgedessen wird $F'(x+\tau) < F(x+\tau)$. Für die Reserve bei erhöhter Sterblichkeitsintensität erhält man:

$$(\beta)\quad {}_tV' = 1 - \frac{\dfrac{1}{v^t \cdot F'(x+t)} \cdot \displaystyle\int_t^n v^\tau F'(x+\tau)\,d\tau}{\dfrac{1}{F'(x)} \cdot \displaystyle\int_0^n v^\tau F'(x+\tau)\,d\tau}.$$

Da die Anderung von μ *nach* dem Momente der Reservierung t einsetzt, ist $F'(x) = F(x)$ und ferner $F'(x+t) = F(x+t)$.

Nach Einführung einer Hülfsgrösse φ:

$$(\gamma)\quad \int_t^n v^\tau F'(x+\tau)\,d\tau = \int_t^n v^\tau F(x+\tau)\,d\tau - \varphi$$

kann man die Gleichung (β) schreiben:

---

[1]) Vgl. „Mitteilungen der schweizerischen Versicherungsmathematiker", Heft 9.

$$(\delta)\quad {}_tV' = 1 - \frac{\dfrac{1}{v^t \cdot F(x+t)}}{\dfrac{1}{F(x)}} \cdot \frac{\int_t^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau - \varphi}{\int_0^n v^\tau F(x+\tau)\, d\tau - \varphi}$$

Es ist sowohl in Gleichung (α) als in Gleichung (δ) der Subtrahend ein echter positiver Bruch; auch φ ist positiv und naturgemäss kleiner als jedes der Integrale in Gleichung (γ). Mithin ist der Bruch auf der rechten Seite der Gleichung (δ) kleiner als derjenige in Gleichung (α); folglich ist:

$$\text{(I)} \qquad {}_tV' > {}_tV.$$

Nimmt man dagegen an, dass die Erhöhung von μ in einem Zeitintervall zwischen 0 und t erfolgt, so vermindern sich diejenigen Renten, welche sich auf Altersklassen beziehen, auf welche die Erhöhung von μ gewirkt hat; mithin wird: $\bar{a}'_{x:\overline{n}|} < \bar{a}_{x:\overline{n}|}$; dagegen bleiben diejenigen Renten, welche sich nicht über diese Altersklasse erstrecken, ohne Änderung; daher bleibt: $\bar{a}'_{x+t:\overline{n-t}|} = \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$. Vergleicht man nun die ursprüngliche Reserve ${}_tV = 1 - \dfrac{\bar{a}_{x+t:\overline{x-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$ mit der auf Grund eines höheren μ' gebildeten: ${}_tV' = 1 - \dfrac{\bar{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}'_{x:\overline{n}|}}$, so wird, da nach Obigem der Nenner im Subtrahenden des letzten Ausdruckes kleiner ist als derjenige des ersten, die Zähler dagegen gleich bleiben:

$$\text{(II)} \qquad {}_tV' < {}_tV.$$

Mithin verwandelt die Differenz $V' - V$ ihr negatives Vorzeichen in ein positives, falls eine streckenweise Vergrösserung der Sterblichkeitsintensität zuerst *vor*, dann *nach* dem Rechnungstermin eintritt. Es muss folglich innerhalb des Zeitintervalles, in welchem μ vergrössert wurde, einen Moment geben, in dem diese Reservendifferenz *zu Null* wird.

Man könnte zu diesem Resultate auch durch folgende Überlegung gelangen. Die Reserve nach der prospektiven Methode ist:

$$ {}^n_tV_x = A_{x+t:\overline{n-t|}} - \mathfrak{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \cdot P_{x:\overline{n|}}. $$

Man erhöht die Prämie, wenn man die Sterblichkeitsintensität und infolgedessen die Zahl der Toten in einem Intervall zwischen 0 und t erhöht: $P'_{x:\overline{n|}} > P_{x:\overline{n|}}$. Dagegen erfahren Einmalprämie und Rente keine Änderung; es wird also

$$ {}^n_tV'_x = A_{x+t:\overline{n-t|}} - \mathfrak{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \cdot P'_{x:\overline{n|}} < {}^n_tV_x \quad \text{wie II.} $$

Erhöht man dagegen μ im Intervall zwischen t und n, so schliesst man in ähnlicher Weise mittelst der Reserveformel auf Grund der retrospektiven Methode:

$$ {}^n_tV'_x = \left(P'_{x:\overline{n|}} \cdot \mathfrak{a}_{x:\overline{t|}} - A_{x:\overline{t|}}\right) \cdot \frac{1}{{}_tE_x} > {}^n_tV_x \quad \text{wie I.} $$

§ 8. Wir wenden die allgemeine Formel (7) auf einige Spezialfälle an, die das Wesen der Reserve als Funktion der Sterblichkeitsintensität besonders hervortreten lassen. Um den Einfluss derselben besser zu veranschaulichen, vernachlässigen wir den Zinsfuss, d. h. wir setzen $v = 1$.

I. Fall. Angenommen es ist $F(x+t) = k$, so folgt, dass die Sterblichkeitsintensität, also auch die -wahrscheinlichkeit, beide zu Null werden. Daher ist:

$$(8)\quad {}_tV\left(\bar{P}_{x:\overline{n}|}\right) = 1 - \frac{\frac{1}{k}\cdot\int\limits_t^n n\,d\tau}{\frac{1}{k}\cdot\int\limits_0^n n\,d\tau} = 1 - \frac{n-t}{n} = \frac{t}{n}$$

d. h. sind Verzinsung und Sterblichkeitsintensität gleich Null, so wird die Reserve der verflossenen Versicherungsdauer direkt proportional. Die Kurve, welche sie darstellt, verläuft geradlinig von Null im Ursprung bis zur Einheit am Schluss der Versicherung.

Diese Gerade werden wir kürzehalber mit $h_{\overline{01}}$ bezeichnen.

II. Fall. Gehen wir zum komplizierteren Fall über und setzen:

$$F(x+\tau) = ks^{\tau};$$

dies ergibt für die Sterblichkeitsintensität den Wert:

$$\mu_{x+\tau} = -\frac{1}{F(x+\tau)}\cdot\frac{dF(x+\tau)}{d(x+\tau)} = -\frac{1}{ks^{\tau}}\cdot ks^{\tau}\,\mathrm{Lg}\,s = -\mathrm{Lg}\,s.$$

Auch die Lebenswahrscheinlichkeit wird konstant:

$$p_{x+\tau} = \frac{F(x+\tau+1)}{F(x+\tau)} = \frac{ks^{x+\tau+1}}{ks^{x+\tau}} = s.$$

Aus der allgemeinen Formel, die Sterbenswahrscheinlichkeit und μ miteinander verbindet, folgt dasselbe Resultat:

$$q_{x+t} = 1 - e^{-\int\limits_{x+t}^{x+t+1}\mu_{x+\tau}\,d\tau} = 1 - e^{\mathrm{Lg}\,s} = 1 - s.$$

Mithin wird die Reserve:

$$(9)\qquad {}_tV = 1 - \frac{\frac{1}{k \cdot s^t}\int\limits_t^n k s^\tau \, d\tau}{\frac{1}{k} \cdot \int\limits_0^n k s^\tau \, d\tau} = 1 - \frac{1}{s^t} \cdot \frac{s^n - s^t}{s^n - 1} = 1 - \frac{1 - s^{n-t}}{1 - s^n}.$$

Um zu untersuchen, ob diese Reserve mit der Sterblichkeitsintensität zu- oder abnimmt, bilden wir die Ableitung:

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{1}{(1-s^n)^2}\left[-(1-s^n)(n-t)s^{n-t-1} + (1-s^{n-t})\,ns^{n-1}\right]$$

$$= -\frac{s^{n-t-1}}{(1-s^n)^2}\left[t(1-s^n) - n(1-s^n) + n(s^t - s^n)\right]$$

$$= -\frac{s^{n-t-1}}{(1-s^n)^2}\left[t(1-s^n) - n(1-s^t)\right].$$

Klammern wir noch den Ausdruck $(1-s)\,tn$ aus und führen das negative Vorzeichen unter die Klammer ein, so ist:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{s^{n-t-1}(1-s)\,tn}{(1-s^n)^2}\left[\frac{1-s^t}{1-s} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1-s^n}{1-s} \cdot \frac{1}{n}\right]$$

Angenommen s sei kleiner als 1, so werden alle Ausdrücke vor der Klammer positiv; in der Klammer selbst ergibt sich eine Differenz zwischen zwei arithmetischen Mitteln, und zwar:

$$\frac{1 + s + s^2 + \cdots s^{t-1}}{t} - \frac{1 + s + s^2 + \cdots s^{n-1}}{n}$$

Die Zahl t ist naturgemäss kleiner als n; da nun das arithmetische Mittel immer *kleiner* werdender Zahlen bei *wachsender* Anzahl derselben immer *kleiner* wird, so ist die obige Differenz *positiv*. Mithin ist die Reserve eine *steigende* Funktion von s, der Lebenswahrscheinlichkeit, und eine fallende Funktion von μ. Wir können dies folgendermassen formulieren:

Unter der Annahme, dass der Zinsfuss gleich Null und die Sterblichkeitsintensität konstant ist, wird die Reserve bei **grösserer** *Sterblichkeitsintensität* **kleiner.**

Für den zuerst behandelten Spezialfall $s = 1$ wird der Ausdruck (9) für die Reserve $V = 1 - \frac{1 - s^{n-t}}{1 - s^n}$ unbestimmt; nach den Regeln der Differentialrechnung ist aber

$$V = 1 - \left| \frac{(n - t)\, s^{n-t-1}}{n\, s^{n-1}} \right|_{\lim\, s=1} = 1 - \frac{n - t}{n} = \frac{t}{n}$$

d. h. wir erhalten wieder den Ausdruck (8). Nach dem zuletzt ausgesprochenen Satze ist diese Reserve für $s = 1$ und dementsprechend für $\mu = q = 0$ *grösser* als die Reserve für den zuletzt betrachteten Fall: $q = 1 - s > 0$, bzw. $\mu > 0$.

§ **9.** Führen wir jetzt unter Beibehaltung des Ansatzes $F(x + \tau) = ks^\tau$ den *Zinsfuss* ein, so erhalten wir nach (7) für die Reserve den Ausdruck:

$${}_tV = 1 - \frac{\frac{1}{v^t \cdot k \cdot s^t} \cdot \int\limits_t^n v^\tau ks^\tau \, d\tau}{\frac{1}{k} \cdot \int\limits_0^n v^\tau ks^\tau \, d\tau}$$

$$= 1 - \frac{1}{(sv)^t} \cdot \frac{\left[(vs)^n - (vs)^t\right] \frac{1}{\mathrm{Lg}\,(vs)}}{\left[(vs)^n - 1\right] \frac{1}{\mathrm{Lg}\,(vs)}} = 1 - \frac{1 - (vs)^{n-t}}{1 - (vs)^n}.$$

Mithin entspricht diese Reserve der früher laut Gleichung (9) gebildeten, nur dass an Stelle von s das

Produkt (vs) getreten ist. Es ist aber der Abzinsungsfaktor v kleiner als die Einheit, also $vs < s$. Man kann daher obige Reserve auf die frühere zurückführen, wenn man statt der früheren Lebenswahrscheinlichkeit s jetzt die neue Lebenswahrscheinlichkeit $\sigma = vs < s$ setzt. Nach oben ausgesprochenem Satze wird sich die Reserve bei solchermassen erhöhter Sterblichkeit vermindern. Anderseits ist es evident, dass eine Erhöhung des Diskontierungsfaktors v durch eine entgegengesetzt gleiche Verminderung der Lebenswahrscheinlichkeit in ihrer Wirkung auf die Reserve paralysiert werden kann, falls nur das Produkt (vs) konstant bleibt.

Wir können daher zusammenfassend sagen:

Unter der Annahme einer konstanten Sterblichkeitsintensität und einer konstanten Verzinsung wird die Reserve nicht nur mit ***steigender Sterblichkeitsintensität,*** *sondern auch mit* ***steigendem Zinsfuss kleiner.***

§ **10.** Wir stellen nun die Untersuchung des Einflusses der Sterblichkeit in den Vordergrund und nehmen wieder $v = 1$ an. Die beiden Ansätze I. und II. im § 8 kann man in folgender Weise verbinden. Die ganze Versicherungsdauer n sei in drei Intervalle geteilt: im ersten, es sei α genannt, zwischen 0 und θ, sei die Sterblichkeitsintensität gleich Null, im zweiten Intervall β, zwischen θ und T, sei μ konstant und von Null verschieden, im dritten Intervall γ, in der Zeit T bis n, sei wieder $\mu = 0$.

Dann wird im ersten Intervall α die Reservenkurve gradlinig wie im Falle I; nach dem Zeichenwechselsatz ist hier die Reserve grösser als in dem Falle, in welchem μ während der *ganzen* Versicherungsdauer gleich Null ist. Im letzten Intervall γ (also für $T \gtrless t \leq n$) ist die Reservenkurve wieder gradlinig, und zwar ist die Reserve jetzt *kleiner* als diejenige im Falle I. Von der Reserve im mittleren Intervall weiss man, auf Grund des Vorhergesagten, dass ihre Kurve die Gerade $h_{\overline{01}}$, die die Reserve im Falle I darstellt, schneiden wird. Wir stellen nunmehr die Gleichung dieser Reserve auf.

Die Definition der Funktion der Zahl der Lebenden heisst:

$$F(x+\tau) = k \qquad \text{für } 0 \overset{=}{<} \tau \leqq \theta \quad (\text{Intervall } \alpha)$$

$$F(x+\tau) = ks^{\tau-\theta} \qquad \text{für } \theta \overset{=}{<} \tau \leqq T \quad (\text{Intervall } \beta)$$

$$F(x+\tau) = ks^{T-\theta} \qquad \text{für } T \overset{=}{<} \tau \leqq n \quad (\text{Intervall } \gamma)$$

Nach Gleichung (7) wird für $\theta \overset{=}{<} t \leqq T$

$$_tV = 1 - \frac{\dfrac{1}{ks^{t-\theta}}\left\{\displaystyle\int_t^T ks^{\tau-\theta}\,d\tau + \int_T^n ks^{T-\theta}\,d\tau\right\}}{\dfrac{1}{k}\left\{\displaystyle\int_0^\theta k\,d\tau + \int_\theta^T ks^{\tau-\theta}\,d\tau + \int_T^n ks^{T-\theta}\,d\tau\right\}}$$

$$= 1 - \frac{\dfrac{s^{T-\theta} - s^{t-\theta}}{\operatorname{Lg} s \cdot s^{t-\theta}} + (n-T)\,s^{T-t}}{\theta + \dfrac{1}{\operatorname{Lg} s}(s^{T-\theta} - 1) + (n-T)\,s^{T-\theta}}.$$

Wir bringen den Ausdruck auf gemeinschaftlichen Nenner:

$$(10) \quad {}_tV = \frac{\theta + \left(\dfrac{1}{\operatorname{Lg} s} + n - T\right)(s^{T-\theta} - s^{T-t})}{\theta + \dfrac{1}{\operatorname{Lg} s}(s^{T-\theta} - 1) + (n-T)\,s^{T-\theta}}.$$

Der Ausdruck im Nenner stellt die temporäre Rente dar, ihr reziproker Wert die Prämie, die wir mit Π bezeichnen wollen. Wir führen noch den Ausdruck $\mu = -\operatorname{Lg} s$ für die Sterblichkeitsintensität ein, addieren und subtrahieren $\frac{1}{\mu}$ im Zähler; dann wird

$$(10^a) \quad {}_tV = \Pi\left\{\frac{1}{\Pi} - \frac{1}{\mu} - s^{T-t}\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)\right\}$$

oder, wenn man eine abkürzende Bezeichnung einführt:

$$(10^b) \quad M(t) = 1 - \frac{\Pi}{\mu} - s^{T-t}\,\Pi\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)$$

Dieser Ausdruck für die Reserve im mittleren Intervalle β, also für $\theta \gtreqless t \leqq T$, stellt im wesentlichen eine Exponentialfunktion dar. Für $\theta = 0$ und $T = n$ wird Gleichung (10) ohne weiteres in Gleichung (9) übergehen: ${}_tV = \frac{s^n - s^{n-t}}{s^n - 1}$, während für $\theta = T = t$ man wieder Gleichung (8) erhält: ${}_tV = \frac{t}{n}$.

Die Exponentialkurve $M(t)$ artet für einen besonderen Wert der Sterblichkeitsintensität in eine horizontale Gerade aus; die trifft ein, wenn $\mu = \frac{1}{n - T}$ ist.

Der Ausdruck für die Prämie reduziert sich in diesem Falle auf $\Pi = \frac{1}{\theta + n - T}$, und es folgt $M(\theta) = M(T) = \frac{\theta}{\theta + n - T}$.

Für den Schnittpunkt t_0 mit der Geraden $h_{\overline{01}}$ erhält man aus der Gleichung $\frac{t_0}{n} = \frac{\theta}{\theta + n - T}$ den Wert

$$t_0 = \frac{\theta n}{\theta + n - T} = \frac{\theta n}{\theta + \frac{1}{\mu}}.$$

Setzt man $\lambda \cdot \theta = (n - T)$, wo λ eine Konstante bedeutet, so erhält man für die Abszisse des Schnittpunktes: $t_0 = \frac{n}{1+\lambda}$. Sind insbesondere die beiden äusseren Intervalle (α und γ) einander gleich, also $\lambda = 1$, so wird $t_0 = \frac{n}{2}$, und die Reserve behält im mittleren Intervall den Wert $\frac{1}{2}$, zu welchem sie innerhalb des ersten Intervalles aufgestiegen ist; im letzten Intervall verläuft die Gerade, die die Reserve darstellt, parallel zur Reservengeraden im Intervall α von dem Werte $\frac{1}{2}$ bis 1.

Im allgemeinen Falle können wir durch Bildung der Ableitung: $\frac{dM}{dt} = s^{T-t} \cdot \Pi \left(n - T - \frac{1}{\mu}\right) \operatorname{Lg} s$ darauf schliessen, dass die Exponentialkurve, die im mittleren Intervall den Verlauf der Reserve ausdrückt, steigt, wenn $n - T - \frac{1}{\mu} < 0$ bleibt; d. h. wenn $\mu < \frac{1}{n-T}$ sein wird. Zu demselben Schlusse gelangt man, wenn man aus den beiden Werten an den Intervallsgrenzen $M(\theta) = \theta \cdot \Pi$, $M(T) = 1 - (n - T)\,\Pi$, deren Differenz bildet:

$$M(T) - M(\theta) = 1 - \frac{\theta + n - T}{\theta + \frac{1}{\operatorname{Lg} s}(s^{T-\theta} - 1) + (n - T)\, s^{T-\theta}}$$

$$= \frac{(s^{T-\theta} - 1)\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)}{\theta - \frac{1}{\mu}(s^{T-\theta} - 1) + (n - T)\, s^{T-\theta}}.$$

Dies Kriterium $\mu < \frac{1}{n - T}$ für das Steigen der Reserve im mittleren Intervall gilt, solange $s < 1$ $(\mu > 0)$ bleibt.

§ **11.** Eine besondere Art von Funktionen wird nun entstehen, wenn man die Intervallsgrenze θ, in der die Sterblichkeitsintensität von Null verschieden wird, und von welchem Punkte an dementsprechend die Reservenkurve, statt wie bis dahin gradlinig zu verlaufen, zur Exponentialkurve wird, mit dem Moment der Reservierung *zusammenfallen* lässt.

Mithin lassen wir in Gleichung (10) das Intervall γ zu Null, d. h. $T = n$ werden; die Reserve des Intervalles β wird dann

$$(10^c) \qquad M_1(t) = \frac{\theta + \frac{1}{\operatorname{Lg} s}\left(s^{n-\theta} - s^{n-t}\right)}{\theta + \frac{1}{\operatorname{Lg} s}\left(s^{n-\theta} - 1\right)}.$$

Die Reserve wird mithin durch eine Exponentialkurve mit ständig steigendem Verlauf dargestellt, da hier $\mu < \frac{1}{n - T}$ bleibt; wir werden später auf dieselbe eingehender zurückkommen. Als Reserve dieser Versicherung, bei der von 0 bis θ die Sterblichkeitsintensität $\mu = 0$, dagegen zwischen θ und n konstant ist, erhalten wir: eine Gerade zwischen 0 und θ und obige Kurve M_1 im Bereich θ bis n. Variieren wir den Parameter θ kontinuierlich, indem wir $\theta = t$ setzen, so entsteht laut Gleichung (10^c) eine Grenzkurve, die sämtliche Unstätigkeitspunkte θ der Reservenkurve enthält; wir bezeichnen diese Grenzkurve mit $g(t)$ und erhalten die Gleichung [1]:

---

[1]) Diese Gleichung wurde in der in § 7 angegebenen Vorlesung des Herrn Prof. Dr. Ch. Moser aufgestellt.

$$(11) \quad g(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{\operatorname{Lg} s}(s^{n-t} - 1)} = \frac{1}{1 + \frac{s^n - s^t}{s^t \operatorname{Lg} s^t}}.$$

Entstehungsweise und Verlauf dieser Grenzkurve werden durch Figur 1 veranschaulicht.

Diese so erhaltene Grenzfunktion wollen wir nun einer Diskussion unterwerfen, wobei es auch von Interesse sein dürfte, die bei Aufstellung ihrer Gleichung gemachten versicherungstechnischen Annahmen über die Variabilitätsgrenzen der Parameter und Variablen fallen zu lassen, um somit ein möglichst vollständiges Bild über den Charakter der Grenzfunktion zu gewinnen.

Der weiteren Diskussion entziehen sich folgende Spezialfälle: für negative s verliert die Kurve, wegen des vorkommenden Logarithmus, die Bedeutung. Des weiteren erhalten wir für $s = 1$ nach früherem $g(t) = \frac{t}{n}$, was auch die Rechnung auf Grund obiger Definitionsformel bestätigt. Ferner ist für $s = 0$ die Reserve und ihre Grenzkurve $g(t) = 1$, was auch aus der Gleichung (11) mit Hülfe von $\lim\limits_{s=0} \left(\frac{s^{n-t} - 1}{s^t \operatorname{Lg} s^t} \right) = 0$ hervorgeht. Infolgedessen müssen nur die Fälle berücksichtigt werden, für welche $0 < s \lesseqgtr 1$ ist.

Wir bilden die zur Diskussion erforderlichen Grössen:

$$J = \int g(t)\, dt = \int \frac{s^t \operatorname{Lg} s^t}{s^t \operatorname{Lg} s^t + s^n - s^t}\, dt.$$

Die erste Substitution sei $s^t = y$, und daraus folgt:

$$dy = s^t \operatorname{Lg} s\, dt \quad \text{und} \quad J = \int \frac{\operatorname{Lg} y \cdot dy}{\operatorname{Lg} s\,(y \operatorname{Lg} y + s^n - y)};$$

weiter sei $y \operatorname{Lg} y - y = z$ und dementsprechend $\operatorname{Lg} y \cdot dy = dz$; mithin wird

$$(12) \qquad J = \int \frac{dz}{\operatorname{Lg} s\,(z + s^n)} = \frac{1}{\operatorname{Lg} s} \operatorname{Lg}(z + s^n)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Lg} s} \operatorname{Lg}(s^t \operatorname{Lg} s^t - s^t + s^n).$$

Für die Ableitung erhalten wir

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\operatorname{Lg} s}{[s^t \operatorname{Lg} s^t + s^n - s^t]^2} \Big\{ (s^t \operatorname{Lg} s^t + s^n - s^t) s^t (\operatorname{Lg} s^t - 1)$$

$$- s^t \cdot t\,[\operatorname{Lg} s \cdot s^t (t \operatorname{Lg} s + 1) - s^t \operatorname{Lg} s] \Big\};$$

daher ist

$$(13) \quad \frac{dg(t)}{dt} = \frac{\operatorname{Lg} s \cdot s^t}{[s^t \operatorname{Lg} s^t + s^n - s^t]^2} (s^n - s^t + s^n \operatorname{Lg} s^t).$$

Schreiben wir dies in folgender Form:

$$tg' = g^2 \left(\frac{1}{g} - 1 + s^{n-t} \right),$$

so wird die zweite Ableitung:

$$(14) \quad tg'' = - g^2 s^{n-t} \operatorname{Lg} s + 2\,(s^{n-t} - 1) \cdot g \cdot g'.$$

§ 12. Nun betrachten wir die Funktion für verschiedene Werte der Parameter.

Ia. Es sei: $n > 0,\ s < 1$. Ohne weiteres erhält man aus (11) die Werte:

$$g(0) = 0;\ g(n) = 1.$$

Aus Gleichung (13) folgt:

$$(15) \qquad g'(0) = \frac{\operatorname{Lg} s}{s - 1} > 0;\ g'(n) = \frac{1}{n} > 0;$$

laut Regeln der Differentialrechnung erhält man ferner:

$$(15^a) \quad \lim_{t=\infty} \left(\frac{s^{n-t} - 1}{t \operatorname{Lg} s} \right) = \lim_{t=\infty} (- s^{n-t}) = - \infty.$$

Folglich ist: $g(\infty) = 0;\ g(-\infty) = 1$.

Die Gleichung $\frac{s^n - s^t}{s^t \cdot t \cdot \mathrm{Lg}\, s} = \pm \infty$ zeigt, dass nur die zwei Werte $t = 0$ und $t = \infty$ Nullstellen der Funktion liefern können. Als Bedingung des Unendlichwerdens der Funktion $g(t)$ erhalten wir laut Definitionsgleichung (11):

$$(16) \qquad \frac{s^n - s^t}{s^t\, t \mathrm{Lg}\, s} = -1$$

oder daraus:

$$(16^a) \qquad \varphi(t) = s^n - s^t + s^t \mathrm{Lg}\, s^t = 0.$$

Die Wurzel der so definierten Hülfsfunktion $\varphi(t)$ geben die Werte an, für welche die ursprüngliche Funktion unendlich wird. Die erste Ableitung lautet:

$$(17) \qquad \varphi'(t) = s^t \cdot t\, (\mathrm{Lg}\, s)^2.$$

Auf endliche Werte der Variablen uns beschränkend, finden wir, dass $\varphi(t)$ für $t = 0$ zu einem Minimum wird, da

$$(18) \qquad \varphi''(t) = (\mathrm{Lg}\, s)^2\, s^t\, (t \,\mathrm{Lg}\, s + 1),$$

also $\varphi''(0) = (\mathrm{Lg}\, s)^2 > 0$ ist. Nun ist $\varphi(0) = s^n - 1 < 0$, dagegen $\varphi(\infty) = s^n > 0$ und auch $\varphi(-\infty) = \infty > 0$.

Die letzte Relation ist nicht unmittelbar ersichtlich, wir gelangen zu ihr durch einen Grenzübergang, unter der Berücksichtigung, dass $\mathrm{Lg}\, s$ negativ ist:

$$\varphi(-\infty) = \lim_{t = -\infty} \left[s^t\, (s^{n-t} + t \,\mathrm{Lg}\, s - 1) \right]$$

Mithin schneidet die Kurve $\varphi(t) = 0$ die t-Axe in einem Punkte mit positivem und in einem mit negativem t. Also wird die ursprüngliche Funktion einmal unendlich für einen endlichen positiven und einmal für einen endlichen negativen Wert der Variablen.

Wir suchen nun die etwaigen im Endlichen liegenden Maxima oder Minima von $g(t)$ für endliche Werte von t; dieselben ergeben sich durch Nullsetzung der ersten Ableitung. Laut Gleichung (13) sind folgende Fälle möglich:

1. $s^t = 0$, $t = \infty$ wurde aus der Diskussion ausgeschlossen.
2. Der Nenner in Gleichung (13): $s^t \mathrm{Lg}\, s^t + s^n - s^t = \varphi(t)$ wird, wie bereits erörtert, unendlich nur für $t = -\infty$.
3. Wir setzen den Zähler in Gleichung (13):

(19) $$s^n - s^t + s^n \mathrm{Lg}\, s^t = \psi(t) = 0$$

Es ist:

(19^a) $$\psi'(t) = \mathrm{Lg}\, s\,(s^n - s^t),\quad \psi''(t) = -s^t(\mathrm{Lg}\, s)^2$$

Es zeigt sich, dass nur für $t = n$

(19^b) $$\psi_{\max}(n) = n\, s^n \,\mathrm{Lg}\, s$$

eintreten kann, und zwar ist dieses Maximum *negativ*. Die Hülfsfunktion hat keine Nullstellen und ist immer negativ. Daher hat $g(t)$ im Endlichen kein endliches Maximum oder Minimum und zeigt durchwegs einen steigenden Verlauf. Ihre Kurve besteht aus drei Zweigen: in $-\infty$ besitzt sie die Asymptote $g = 1$ und liegt oberhalb derselben. Ansteigend erreicht sie die im Negativen parallel zur Ordinatenaxe liegende Asymptote, deren Abstand von dieser Axe sich aus Gleichung $\varphi(t) = s^n - s^t + s^t \mathrm{Lg}\, s = 0$ bestimmt. Der zweite Zweig verläuft asymptotisch zu derselben im Negativen liegenden Geraden, wie der erste Zweig, und besitzt eine im Positiven liegende Asymptote parallel zur t-Axe, in dem durch die zweite Wurzel der Gleichung $\varphi(t) = 0$ gegebenen Abstand. Die Kurve geht immer steigend, sowohl durch den Nullpunkt, als auch durch den Punkt: $t = n$, $g = 1$. Der dritte Zweig berührt die im Positiven liegende Asymptote in $-\infty$, steigt gegen die t-Axe an und verläuft asymptotisch zu dieser, in deren positiven Richtung.

Von Interesse ist der Inhalt der durch Abszissenaxe, Kurve zwischen $t = 0$ und $t = n$, und die zu diesem letzten Punkt gehörigen Ordinate 1 begrenzten Fläche; nach Gleichung (12) wird sie:

$$\frac{1}{\operatorname{Lg} s} \Big| \operatorname{Lg}(s^t \operatorname{Lg} s^t + s^n - s^t) \Big|_0^n = \frac{1}{\operatorname{Lg} s} \cdot \operatorname{Lg} \left(\frac{s^n \operatorname{Lg} s^n}{s^n - 1} \right).$$

§ **13.** I*b*. Es sei: $n < 0$, $s > 1$. Dementsprechend ist: $\operatorname{Lg} s > 0$, $s^{\infty} = \infty$, $s^{-\infty} = 0$. Unmittelbar aus der Definitionsgleichung (11) und Gleichung (15) folgt:

$$g(0) = 0, \; g(n) = 1; \; g'(0) = \frac{\operatorname{Lg} s}{s^n - 1} > 0, \; g'(n) = \frac{1}{n} > 0$$

$$\text{Ferner ist: } \lim_{t=\infty} \left(\frac{s^{n-t} - 1}{t \operatorname{Lg} s} \right) = \lim_{t=\infty} (-s^{n-t}) = 0. \text{ Mithin:}$$

$g(\infty) = 1$. Aus $\lim\limits_{t=-\infty} (s^t \cdot t \operatorname{Lg} s) = 0$ folgt $g(-\infty) = 0$.

Um die Stellen, an denen die Funktion unendlich wird, zu erhalten, untersuchen wir wie früher die Hülfsfunktion, laut Gleichung (16):

$$\varphi(t) = s^n - s^t + s^t \cdot t \operatorname{Lg} s$$

Analog dem für diese Funktion früher erhaltenen Resultat, existiert ein Minimum derselben, und zwar ist:

$$\varphi_{\min}(0) = s^n - 1$$

Nun ist dieses Minimum hier positiv, und anderseits steigt die Funktion $\varphi(t)$ mit absoluten Werten von t beiderseits der Ordinatenaxe an. Sie hat mithin keine Nullstellen, $g(t)$ ist in diesem Falle für endliche Werte von t niemals unendlich. Wir bemerken noch, dass $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi(-\infty) = s^n$ ist.

Um die Maxima und Minima von t zu erhalten, beachte man, dass weder s^t, noch $\varphi(t) = \infty$ für endliche Werte von t erfüllt werden können, mithin durch diese Ansätze die Ableitung von $g(t)$ nicht zum Verschwinden gebracht wird. Dagegen liefert der dritte Faktor $\psi(t) = s^n - s^t + s^n \operatorname{Lg} s^t$ im Endlichen liegende endliche extreme Werte der Funktion. Es ist laut Gleichung (19b): $\psi_{\max}(n) = s^n \cdot n \cdot \operatorname{Lg} s$ jetzt positiv.

Da hier sowohl $\psi(-\infty) = -\infty$, als auch $\psi(\infty)$

$$= \lim_{t=\infty} \left[s^n + t \left(s^n \operatorname{Lg} s - \frac{s^t}{t} \right) \right] = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

ist, hat $\psi(t)$ bestimmt zwei Nullstellen, die beide im Endlichen, und zwar eine auf der positiven und eine auf der negativen Seite der t-Axe, liegen.

Diese Nullstellen entsprechen einem Maximum im positiven und einem Minimum im negativen Bereiche der Funktion $g(t)$. Es ist nämlich für $g'(t) = 0$ laut Gleichung (14):

$$g''_m(t) = -\frac{g^2}{t} s^{n-t} \operatorname{Lg} s.$$

Der Verlauf der Kurve stellt sich jetzt folgendermassen dar: Die Abszissenaxe berührt die Kurve in $-\infty$, von wo aus die Kurve bis zu einem endlichen Minimum fällt; sie geht sodann stetig steigend durch den Nullpunkt und schneidet für $t = n$ die Gerade $g = 1$. Sie erreicht weiter steigend ein endliches Maximum (das > 1 ist) und nähert sich in ihrem weiteren Verlauf asymptotisch der Geraden $g = 1$.

§ **14.** II*a*. Es sei: $n = 0$, $s < 1$. Aus diesem Ansatz folgt: $\operatorname{Lg} s < 0$, $s^{\infty} = 0$, $s^{-\infty} = \infty$, $s^n = 1$. Man erhält aus der modifizierten Definitionsgleichung die Grenzwerte:

$$\lim_{t=0} \left(\frac{s^{-t} - 1}{t \operatorname{Lg} s} \right) = (- s^{-t})_{t=0} = -1$$

und $\lim\limits_{t=\infty} (s^t \cdot t \operatorname{Lg} s) = (- s^t)_{t=\infty} = 0$, und daraus folgende Werte der Funktion:

$$g(0) = \pm \infty\,^{1)};\ g(\infty) = 0,\ g(-\infty) = 1.$$

Ein zweiter Unendlichkeitspunkt existiert nicht; dies zeigt die früher behandelte Hülfsfunktion $\varphi(t) = 1 - s^t + s^t \operatorname{Lg} s^t$, die in vorliegendem Falle ein Minimum bei $t = 0$, dessen Wert $\varphi(0) = 0$ ist, aufweist, und von diesem aus nach beiden Richtungen hin wächst: $\varphi(\infty) = 1$; $\varphi(-\infty) = \infty$. Wir wenden uns zur Betrachtung der zweiten Hülfsfunktion:

$$\psi(t) = 1 - s^t + t \operatorname{Lg} s.$$

Das Maximum derselben beträgt jetzt für

$$t = 0:\ \psi_{\max}(0) = 0.$$

Von da ab fällt sie nach beiden Richtungen, ist daher ausserhalb des Nullpunktes immer negativ. Daraus folgt:

$$g'(t) = \frac{\operatorname{Lg} s \cdot s^t}{[s^t \operatorname{Lg} s^t + 1 - s^t]^2} (1 - s^t + t \operatorname{Lg} s) > 0.$$

D. h. die Funktion $g(t)$ steigt beständig.

Der Verlauf der Kurve ist folgender: Sie zerfällt in zwei Äste, von denen einer im II., der andere im

---

[1]) Laut der allgemeinen Gleichung (13) kann die Unstetigkeit dieser Funktion an der Stelle $t = n = 0$ auch in einem endlichen Sprung bestehen; je nach der Reihenfolge, in welcher man diese Werte einsetzt, erhält man für $g(n, t)$ die Werte 0, 1, $\pm \infty$.

IV. Quadranten liegt; der im II. Quadranten liegende Ast verläuft asymptotisch zur Geraden $g = 1$, der im IV. Quadranten liegende asymptotisch zur t-Axe. Beide Äste haben die Ordinatenaxe zur gemeinschaftlichen Asymptote und besitzen weder Maxima noch Minima.

II*b*. Es sei: $n = 0$, $s > 1$. Wir gelangen unmittelbar zu den diesbezüglichen Resultaten, wenn wir in der Gleichung, die den Verlauf der Kurve im Falle II*a* darstellt:

$$g(t) = \frac{1}{1 + \frac{1 - s^t}{s^t \operatorname{Lg} s^t}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - S^{-t}}{S^{-t} \operatorname{Lg} S^{-t}}}$$

$S = \frac{1}{s}$ statt s substituieren und t durch $-t$ ersetzen. Infolgedessen wird die den Verlauf der Funktion darstellende Kurve ein Spiegelbild der zuletzt besprochenen in bezug auf die Ordinatenaxe sein.

Sie verläuft demgemäss in zwei getrennten, ständig fallenden Zweigen, die im I. bzw. III. Quadranten liegen; Ordinatenaxe bleibt gemeinschaftliche Asymptote; der in Richtung der t-Axe liegende Unendlichkeitspunkt ist nun negativ, der in der Geraden $g = 1$ liegende nunmehr positiv.

§ **15.** III*a*. Es sei: $n < 0$, $s > 1$. Es ist in diesem Falle zu erwarten, dass sich die Funktion für positive Werte so verhalten wird, wie im Falle I*b* für negative und umgekehrt. Tatsächlich wird, wenn wir s durch seinen reziproken Wert S, n und t durch ihre gleich grossen negativen Werte N und T ersetzen, die Funktion

$$g(t) = \frac{1}{1 + \frac{s^n - s^t}{s^t \operatorname{Lg} s^t}} \text{ übergehen in } \frac{1}{1 + \frac{S^N - S^T}{S^T \operatorname{Lg} S^N}}.$$

Man kann daher ohne weiteres, analog dem Falle Ib, den Verlauf der Funktion für vorliegende Annahme $n < 0$, $s > 1$ angeben, da ihre Kurve ebenfalls als Spiegelung der dort behandelten aufgefasst werden kann: Die Kurve wird von der Abszissenaxe in $+\infty$ berührt, von wo aus sie bei Abnahme der Abszissenwerte bis zu einem endlichen Minimum fällt, um dann steigend durch den Nullpunkt zu gehen und für $t = n$ die Gerade $g(t) = 1$ zu schneiden. Die Kurve erreicht weiter ein endliches positives Maximum und nähert sich im weiteren Verlauf asymptotisch der von ihr geschnittenen Geraden $g(t) = 1$.

IIIb. Der Ansatz $n < 0$, $s > 1$ zeigt eine ähnliche Spiegelung der im Falle Ia: $n > 0$, $s < 1$ erhaltenen Kurve.

Mithin ist die Abszissenaxe Asymptote für $-\infty$, die Funktion fällt, sich asymptotisch einer zur Ordinatenaxe parallelen Geraden nähernd; der Abstand zwischen diesen zwei Geraden ergibt sich als eine Wurzel der Gleichung: $\varphi(t) = s^n - s^t + s^t \operatorname{Lg} s^t$.

Bei dem weiteren Verlauf der Variablen fällt diese Funktion vom Werte $+\infty$ bis 1, welch letzteren Wert sie für $t = n$, also für negative Werte von t erreicht; immer fallend geht sie durch den Nullpunkt und nähert sich für einen endlichen positiven Wert von t, der die zweite Wurzel der Gleichung $\varphi(t) = 0$ bildet, asymptotisch der Geraden, die vertikal zur Abszissenaxe ist. Der dritte Zweig fällt von dieser Geraden bis zur vierten Asymptote $g = 1$.

IVa. Lässt man bei $s < 1$ $n = \infty$ werden, so ist

$$g(t) = \frac{1}{1 + \dfrac{s^n - s^t}{s^t \operatorname{Lg} s^t}} = \frac{t \operatorname{Lg} s}{t \operatorname{Lg} s - 1},$$ und dies ist die

Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel.

Man erhält: $g'(0)=0$, $g(\pm\infty)=1$, $g\left(\frac{1}{\operatorname{Lg} s}\right)=\infty$ und als Asymptoten die Geraden: $g=1$ und $t=\frac{1}{\operatorname{Lg} s}$.

Der Hyperbelmittelpunkt hat also die Koordinaten: $g=1$, $t=\frac{1}{\operatorname{Lg} s}$ und die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Funktion $g(t)$ heisst dementsprechend:

$$\left(t-\frac{1}{\operatorname{Lg} s}\right)(g-1)=\frac{1}{\operatorname{Lg} s}.$$

IV *b*. Wird dagegen $s>1$, so fällt die Kurve für $n=\infty$ im endlichen gänzlich mit der t-Axe zusammen; für $t=+\infty$ jedoch wird die Kurve unstetig, indem sie den Wert 1 annimmt.

V *a*. Analog wird im Falle $n=-\infty$, $s>1$ die Kurve gleichfalls in eine gleichseitige Hyperbel ausarten. Der Unterschied von der oben angegebenen besteht lediglich darin, dass $\frac{1}{\operatorname{Lg} s}$ (die Abszisse des Mittelpunktes und zugleich der Abstand der horizontalen Asymptote von der t-Axe) früher negativ, jetzt dagegen positiv ist.

V *b*. Beim letzten Ansatz: $n=-\infty$, $s<1$ geht die Kurve in die t-Axe über und hat nur für $t=-\infty$ den Wert 1, analog dem Falle IV *b*.

§ 16. Wir wenden uns nun der Betrachtung der Reserve zu, die nach § 11 im Intervall (α) also für $0 \gtreqless t \leqq \theta$ durch die Gerade mit der Steigung

$$\Pi=\frac{1}{\theta+\frac{1}{\operatorname{Lg} s}(s^{n-\theta}-1)}$$

und im Intervall β für ($\theta \gtreqless t \leqq n$) durch die Gleichung:

(10^c)
$$M_1(t) = \frac{\theta + \frac{1}{\mathrm{Lg}\, s}(s^{n-\theta} - s^{n-t})}{\theta + \frac{1}{\mathrm{Lg}\, s}(s^{n-\theta} - 1)} = 1 + \frac{1 - s^{n-t}}{\theta\, \mathrm{Lg}\, s + s^{n-\theta} - 1}$$

dargestellt wird.

Die Ableitung $\frac{dM_1}{dt} = \frac{s^{n-t}\, \mathrm{Lg}\, s}{\theta\, \mathrm{Lg}\, s + s^{n-\theta} - 1} = s^{n-t} \cdot \Pi$ erhält im Endpunkte der Versicherung ($t = n$) den Wert Π, d. h. die Tangente an die Reservenkurve im Endpunkte ist parallel der Reservengeraden im Intervall (α); diese Tangente wird steiler, wenn man μ vergrössert (s verkleinert) und besitzt die Grenzwerte $\frac{1}{n}$ für $\mu = 0$ und $\frac{1}{\theta}$ für $\mu = \infty$. Die Reserve $M_1(t)$ wächst mit der Zeit, und ferner wird $M(\theta) = \theta \cdot \Pi$ zugleich mit μ kleiner. Mithin folgt aus dem Umstand, dass die der anfänglich kleineren Reserve entsprechende Kurve im gemeinsamen Endpunkt eine kleinere Steigung hat, dass sich diese Kurven, die zwei verschiedenen μ entsprechen, in einem Punkte schneiden.

D. h.: Eine Reserve auf Grund kleinerer Sterblichkeitsintensität wird in einem bestimmten Momente im Intervall (β) einer Reserve, die auf Grund eines grösseren μ (kleineren s) gerechnet ist, gleich werden. Durch diesen Satz erhalten wir eine neue Bestätigung des Zeichenwechselsatzes.

Figur 2 möge das Gesagte veranschaulichen.

Was die Abhängigkeit der Reserve $M_1(t)$ von dem Parameter θ anbelangt, so ist ersichtlich, dass für $\theta = 0$ die Reserve des Falles II (Seite 71) resultiert; es ist dann nämlich $M_1(t) = \frac{s^n - s^{n-t}}{s^n - 1}$ identisch mit Gleichung (9).

Alle Reservenkurven für $0 < \theta < n$ liegen anfänglich oberhalb der Geraden $h_{\overline{01}}$ und müssen sie einmal schneiden. Bei $\theta = n$ wird auch das Intervall β zu Null, und wir erhalten wieder den Fall I, der auch mit obiger Definitionsformel im Einklang steht, indem hier $\theta = t = n$ und $M_1(n) = 1$ ist.

§ 17. Der Frage, ob und wann die Reservenformel (10^b)

$$M(t) = \left(1 - \frac{\Pi}{\mu}\right) - s^{T-t}\,\Pi\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)$$

negative Werte liefern kann, muss besondere Beachtung gewidmet werden. Da diese Reserve, die dem mittleren Intervall entspricht, sich nur in einem Sinne ändern kann, d. h. innerhalb des ganzen Intervalles entweder nur steigt oder nur fällt, so ist evident, dass negative Reserven nur dann entstehen, wenn in einem der Endpunkte des Intervalles die Reserve negativ ist. Es müsste also entweder $M(\theta) = \theta\,\Pi$, oder $M(T) = 1 - (n - T)\,\Pi$ negativ sein; daraus folgt, dass die Prämie entweder negativ oder grösser als $\frac{1}{n - T}$ sein müsste. Ersteres ist ausgeschlossen, da die Prämie

$$\Pi = \frac{1}{\theta + \frac{1}{\operatorname{Lg} s}(s^{T-\theta} - 1) + (n - T)\,s^{T-\theta}}$$

immer positiv ist; mithin bleibt nur die zweite Möglichkeit für das Entstehen negativer Reserven offen: nämlich dass $M(t)$ fällt und $M(T) < 0$ ist.

Daraus resultieren die beiden Bedingungen für das Vorkommen negativer Reserven: I. $n - T - \frac{1}{\mu} > 0$

und II. $\Pi > \frac{1}{n - T}$.

Die zweite Bedingung kann man auch in anderer Form ausdrücken: damit die Reserve in T nach Gleichung (10) negativ ist:

$$M(T) = \Pi\left[\theta + \left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)\right](s^{T-\theta} - 1) < 0, \text{ muss}$$

$$\text{(II}^{\text{a}}\text{)} \quad \theta + \left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)(s^{T-\theta} - 1) < 0 \text{ sein.}$$

Von besonderem Interesse sind die Nullpunkte t_0 der Reservenkurve. Im allgemeinen gibt es deren zwei, sofern die obigen Bedingungen erfüllt sind; der eine Nullpunkt liegt im Intervall β, in dem die Reservenkurve fällt, der andere im Intervall γ, in dem dieselbe steigt.

Der Moment t_0 des Nullwerdens der Reserve wird aus der allgemeinen Formel (10) gewonnen:

$$\text{(III)} \quad \theta + \left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)(s^{T-\theta} - s^{T-t_0}) = 0;$$

durch Addition und Subtraktion von $\frac{1}{\mu}$ erhält man daraus:

$$\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right) s^{T-t_0} = \frac{1}{\Pi} - \frac{1}{\mu}.$$

Für den andern Nullpunkt erhält man aus

$$t_0 V = 1 - (n - t_0)\,\Pi = 0$$

für die Abszisse den Wert: $t_0 = n - \frac{1}{\Pi}$, d. h. die Differenz zwischen Zeit- und Leibrente.

Beide Nullpunkte fallen zusammen, wenn $M(T) = 0$ ist; die Reserve wird überhaupt nicht negativ, sondern wird zu Null für $t_0 = T$. Die Bedingung hierfür lautet:

$$1 - \Pi(n - T) = 0 \quad \text{oder} \quad \Pi = \frac{1}{n - T}.$$

In anderer Form erhalten wir die Bedingung hierfür aus III:

$$(\mathrm{III^a}) \qquad \theta = \left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)(1 - s^{T-\theta}).$$

Verschwindet das Intervall α, d. h. wird $\theta = 0$, so entstehen negative Reserven in jedem Falle, wenn $M(t)$ fällt.

In der Tat werden dann die beiden Bedingungen I und II gleichbedeutend; denn aus $\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)(s^T - 1) < 0$ folgt sofort $\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right) > 0$ und umgekehrt.

Der tiefste Stand der Reserve im Falle, dass $\theta = 0$ ist, wird mit dem Werte $M(T)$ erreicht:

$$M(T) = 1 - (n - T)\,\Pi = \frac{(s^T - 1)\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)}{\frac{1}{\mu} + s^T\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)}.$$

Der Zeitpunkt im Intervalle γ, in dem die Reserve wieder Null wird, ergibt sich aus dem allgemeinen Fall:

$$t_0 = n - \frac{1}{\Pi} = n - \frac{1}{\mu} - s^T\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right)$$
$$= T + (1 - s^T)\left(n - T - \frac{1}{\mu}\right).$$

§ **18.** Bevor wir unsere Untersuchungen abschliessen, wollen wir die Beziehungen feststellen, die zwischen den nach der kontinuierlichen Methode einerseits und den nach der gewöhnlichen (diskontinuierlichen) Methode anderseits gewonnenen Versicherungswerten bestehen.

In dem Falle II (§ 8) (des durch die ganze Versicherungsdauer konstanten μ) erhalten wir als Wert der Leibrente:

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_x^{x+\nu} \mu_{x+\tau}\, d\tau} d\nu = \int_0^n e^{-\nu \operatorname{Lg} s}\, d\nu = -\int_0^n s^\nu\, d\nu = \frac{1-s^n}{\operatorname{Lg} s}$$

Anderseits ist nach der diskontinuierlichen Methode im entsprechenden Falle (in dem $p_x = s$ ist) die Rente gleich der Summe der geometrischen Progression $1 + s + s^2 + \cdots s^{n-1}$:

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{1-s^n}{1-s}.$$

Die Reserve in diesem Falle wird daher (t als ganze Zahl vorausgesetzt):

$${}_tV = 1 - \frac{a_{x+t:\overline{n-t}|}}{a_{x:\overline{n}|}} = 1 - \frac{\dfrac{1-s^{n-t}}{1-s}}{\dfrac{1-s^n}{1-s}} = 1 - \frac{1-s^{n-t}}{1-s^n}.$$

und ist daher identisch mit der Formel (9).

M. a. W.: *Im Falle konstanter Sterblichkeitsintensität und -wahrscheinlichkeit während der ganzen Versicherungsdauer führt die kontinuierliche und diskontinuierliche Methode am Jahresschluss auf gleiche Reserven.*

Nach den Resultaten des § 9 bleibt dieser Satz auch dann noch bestehen, wenn man den Zinsfuss berücksichtigt.

Anders liegen die Verhältnisse im Falle, dass μ bzw. p_x den Ansatz des § 10 befolgt. Nach diesem wäre im I. und III. Intervall (α und γ) $p_x = 1$, im II. Intervall $p_x = s$. Daraus folgt der Wert der diskontinuierlichen Rente in diesem Fall:

$$\mathrm{a}_{x:n} = \theta + \frac{s^{T-\theta} - 1}{s - 1} + (n - T)\, s^{T-\theta}.$$

Nach früherem beträgt der Wert der kontinuierlichen Rente

$$\bar{\mathrm{a}}_{x:\overline{n}|} = \theta + \frac{1}{\mathrm{Lg}\, s}(s^{T-\theta} - 1) + (n - T)\, s^{T-\theta}$$

woraus ersichtlich ist, dass die Reserven in keinem der drei Intervalle miteinander übereinstimmen werden. In den beiden äusseren Intervallen steigen die Reserven bei beiden Methoden um den Betrag der Prämie, d. h. um den Betrag des reziproken Wertes der Rente.

Da $\mathrm{Lg}\, s > s - 1$ ist, so folgt:

$$\frac{s^{T-\theta} - 1}{s - 1} > \frac{s^{T-\theta} - 1}{\mathrm{Lg}\, s}$$

und weiter $\bar{\mathrm{a}}_{x:\overline{n}|} < \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$. Infolgedessen ist die Prämie bei der kontinuierlichen Methode *grösser* als die unter sonst gleichen Umständen mittelst der diskontinuierlichen Methode berechneten. Dasselbe gilt ohne weiteres für die Reserven des ersten Intervalles.

Bei den Reserven des dritten Intervalles tritt das Umgekehrte ein, da dieselben nach der Formel $1 - (n - t)\, P_{x:\overline{n}|}$, bzw. $1 - (n - t)\, \bar{P}_{x:\overline{n}|}$ gerechnet werden.

Für die Reserve im mittleren Intervall β erhält man nach der diskontinuierlichen Methode, in Analogie mit Gleichung (10) für die kontinuierliche Methode:

$$
{}_{t}V\,(P_{x:\overline{n}|}) = 1 - \frac{\dfrac{s^{T-t}-1}{s-1} + (n-T)\,s^{T-t}}{\theta + \dfrac{s^{T-\theta}-1}{s-1}\cdot s^{T-\theta}}
$$

$$
= \frac{\theta + \left(\dfrac{1}{s-1} + n - T\right)\left(s^{T-\theta} - s^{T-t}\right)}{\theta + \dfrac{s^{T-\theta}-1}{s-1} + (n-T)\,s^{T-\theta}}.
$$

Die beiden Formeln unterscheiden sich nur dadurch, dass der Faktor $\frac{1}{\operatorname{Lg} s}$ jetzt durch den Faktor $\frac{1}{s-1}$ ersetzt erscheint. Die beiden Reserven besitzen also auch im mittleren Intervall verschiedene Werte; auf Grund der für die Grenzen des Intervalls festgestellten Grössenverhältnisse der Reserven können wir behaupten, dass es im mittleren Intervall einen Zeitpunkt geben muss, für den die nach beiden Methoden berechneten Reserven einander *gleich* sind. Dieser Zeitpunkt wird aber im allgemeinen nicht mit dem üblichen Rechnungstermin der diskontinuierlichen Methode, dem Jahresende, zusammenfallen.

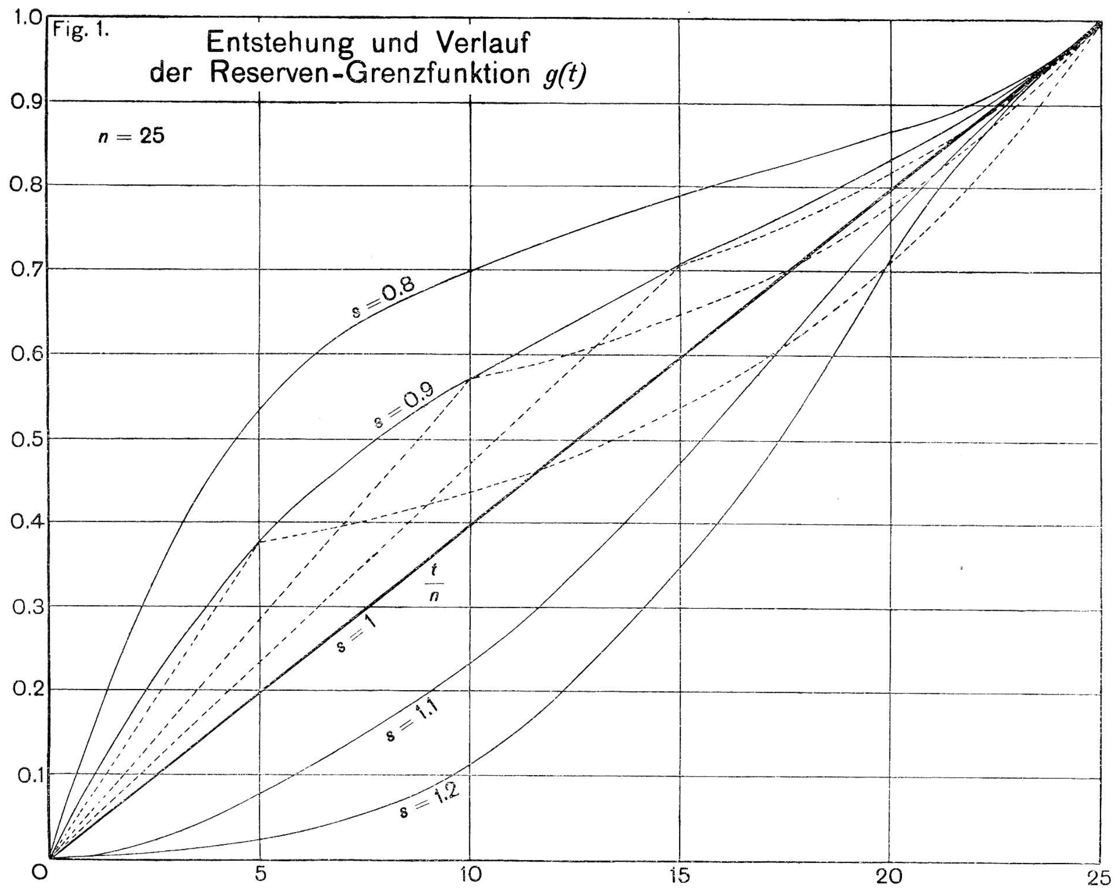

Fig. 1. Entstehung und Verlauf der Reserven-Grenzfunktion $g(t)$

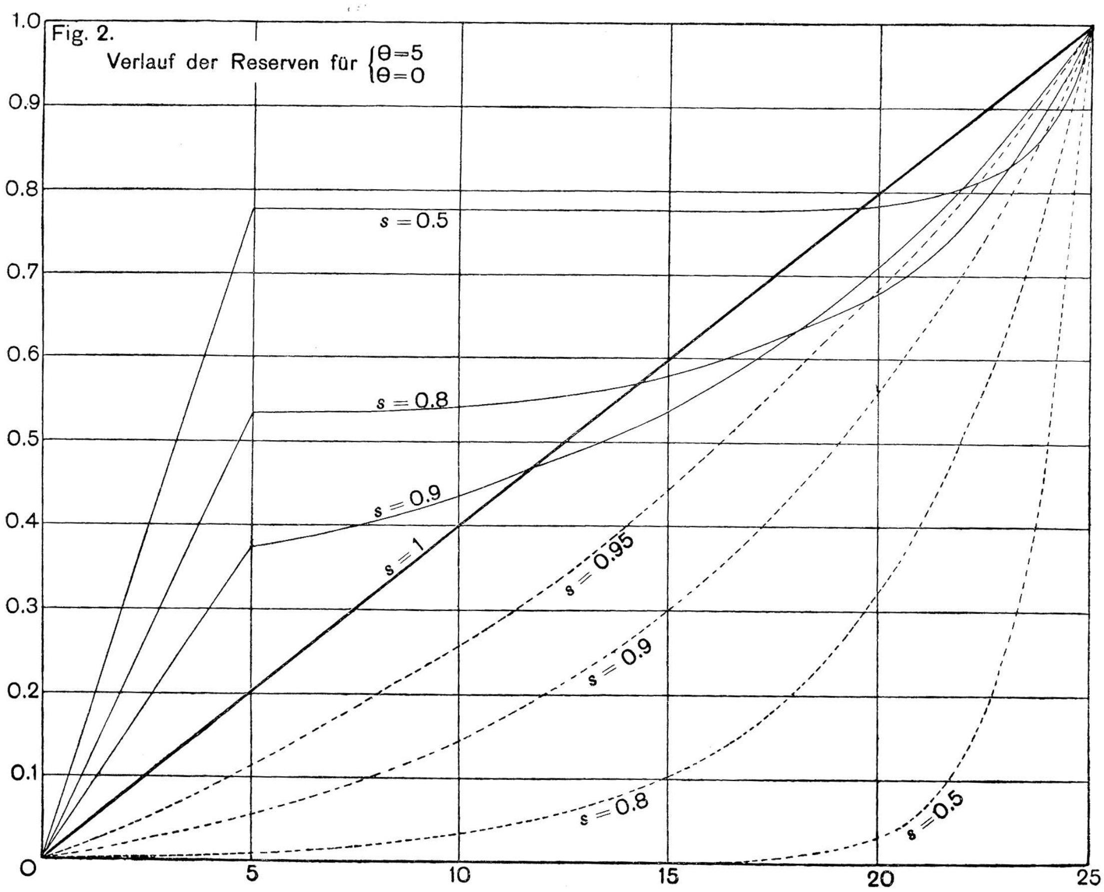

Fig. 2.
Verlauf der Reserven für $\begin{cases}\Theta = 5\\ \Theta = 0\end{cases}$