Die zahlenmässige Berechnung der "unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den "abhängigen" und der "abhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den "unabhängigen"

Autor(en): **Spangenberg, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **10 (1915)**

PDF erstellt am: **24.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967465

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die zahlenmässige Berechnung der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten aus den „abhängigen“ und der „abhängigen“ Wahrscheinlichkeiten aus den „unabhängigen“.

Von **Paul Spangenberg**, Berlin.

In meiner im 20. Heft der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft erschienenen Arbeit „Die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten“ habe ich das Problem der zahlenmässigen Berechnung der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten aus den „abhängigen“, sowie dessen Umkehrung ausführlich behandelt. Unter Anwendung der Differenzenrechnung habe ich dort eine Anzahl von Formeln abgeleitet, die eine *numerisch genaue* Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten der einen Art aus denen der andern Art ermöglichen, und auf der Grundlage dieser Formeln umfangreiche Berechnungen ausgeführt, „um den Nachweis der Richtigkeit der Karupschen Theorie *auch zahlenmässig* zu führen und einmal, was bisher überhaupt noch nicht geschehen, die Grundwerte durchweg genau zu bestimmen“ (a. a. O., Seite 160).

Die Bedeutung dieser Formeln und Berechnungen ist, wie meine weiteren Ausführungen zu zeigen noch

Gelegenheit bieten werden, *nicht* überall in der Fachwelt richtig erkannt worden.

Eine nochmalige Behandlung des Problems wird deshalb nicht überflüssig sein.

Hierzu werde eine geschlossene Gesamtheit B von gleichalterigen Personen angenommen, auf die n voneinander verschiedene Abgangsursachen einwirken mögen, die im Laufe des Jahres die Abgänge $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A} \ldots \overset{n}{A}$ zur Folge haben. Die Zahl der von einem Anfangsbestande von Personen dieser Gesamtheit (B_a) des Alters a im Alter x in der Gesamtheit noch vorhandenen Personen soll mit B_x, die zugehörigen Abgangsintensitäten sollen mit $\overset{1}{\mu}_x$, $\overset{2}{\mu}_x$, $\overset{3}{\mu}_x \ldots \overset{n}{\mu}_x$, die entsprechenden „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten mit $\overset{1}{w}_x$, $\overset{2}{w}_x$, $\overset{3}{w}_x \ldots \overset{n}{w}_x$ und die entsprechenden „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten mit $\overset{\overline{1}}{w}_x$, $\overset{\overline{2}}{w}_x$, $\overset{\overline{3}}{w}_x \ldots \overset{\overline{n}}{w}_x$ bezeichnet werden.

I. Berechnung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten $\overset{\overline{n}}{w}_x$ aus den „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten w_x.

Unter Anwendung der gewählten Bezeichnungen hat man

$$\overset{\overline{n}}{w}_x = 1 - e^{-\int\limits_0^1 \overset{n}{\mu}_{x+t}\,dt} = 1 - e^{-\int\limits_x^{x+1} \overset{n}{\mu}_x\,d_x}, \tag{1}$$

$$\overset{n}{w}_x = \frac{\overset{n}{A}_x}{B_x} = \frac{1}{B_x}\int\limits_0^1 B_{x+t}\,\overset{n}{\mu}_{x+t}\,dt = \frac{1}{B_x}\int\limits_x^{x+1} B_x\,\overset{n}{\mu}_x\,d_x, \tag{2}$$

$$\overset{n}{A}_a + \overset{n}{A}_{a+1} + \ldots \overset{n}{A}_{x-1} = \int_a^x B_x \overset{n}{\mu}_x d_x. \tag{2a}$$

Wird

$$\overset{n}{A}_a + \overset{n}{A}_{a+1} + \ldots \overset{n}{A}_{x-1} = \overset{n}{U}_x$$

gesetzt, so erhält man aus (2a) durch Differentiation

$$\overset{n}{\mu}_x = \frac{d\overset{n}{U}_x}{B_x dx} = \frac{\overset{n}{U}{}'_x}{B_x}. \tag{3}$$

Die direkte Ausführung der Differentiation in (3) und der Integration in (1) und damit die *mathematisch exakte* Lösung der Aufgabe würde nur dann in Frage kommen können, wenn die Grössen U und μ analytische Funktionen sind. Dies wird nur in ganz seltenen Fällen zutreffen, die hier ausser Betracht gelassen werden können. Im allgemeinen sind diese Grössen nur für die einjährigen Altersintervalle bekannt. Soll trotzdem die Bestimmung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten numerisch genau erfolgen, so kann dies nur dadurch geschehen, dass man Interpolations- oder Differenzenrechnung anwendet, die bekanntlich immer zulässig ist, wenn es sich um stetige und differentiierbare Funktionen handelt. Dass aber die hier in Frage kommenden Funktionen dieser Bedingung entsprechen, ist eine Voraussetzung, zu der das Problem selbst nötigt, und die tatsächlich auch alle Autoren, die sich mit diesem beschäftigen, machen*).

*) Allerdings nur für die Dauer des Beobachtungsintervalles, von einem Lebensjahr zum anderen. Es liegt aber offenbar kein Grund vor, gerade an den Übergangsstellen Diskontinuität oder einen Wechsel im gesetzmässigen Verlauf anzunehmen, zumal das Intervall selbst ein willkürliches ist und, wenn nicht praktische Gründe dagegen sprächen, auch durch ein anderes (halbjähriges, zweijähriges usw.) ersetzt werden könnte.

Setzt man nun in einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung

$$f_1 - f_0 = \varDelta f_0, \quad \varDelta f_1 - f_0 = \varDelta^2 f_0 \text{ usf.,}$$

so ist

$$f_t = f_0 + t\varDelta f_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}\varDelta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varDelta^3 f_0 + \ldots \tag{4}$$

Von Formel (4) gelangt man, wenn man beachtet, dass

$$\varDelta^2 f_{-1} + \varDelta^3 f_{-1} = \varDelta^2 f_0, \quad \varDelta^4 f_{-2} + \varDelta^5 f_{-2} = \varDelta^4 f_{-1} \text{ usf.}$$

ist, durch einfache Substitution zu der Formel

$$f_t = \frac{f_0 + f_1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\varDelta f_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2}\varDelta^2 \frac{f_0 + f_{-1}}{2} + \frac{t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varDelta^3 f_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\varDelta^4 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2} + \ldots, \tag{5}$$

und durch eine analoge Rechnung erhält man

$$f_t = f_0 + t\varDelta \frac{f_0 + f_{1}}{2} + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\varDelta^2 f_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varDelta^3 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2} + \frac{(t+1)t^2(t-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\varDelta^4 f_{-2} + \ldots \tag{6}$$

Aus Formel (6), der man auch die Form

$$f_t = f_0 + t\Delta \frac{f_0 + f_{-1}}{2} + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \Delta^2 f_{-1}$$

$$+ \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t}{6}\right) \Delta^3 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2} + \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{24}\right) \Delta^4 f_{-2} + \ldots$$

geben kann, folgt durch einmalige Differentiation

$$f'_t = \Delta \frac{f_0 + f_{-1}}{2} + t\Delta^2 f_{-1} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6}\right) \Delta^3 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2}$$

$$+ \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t}{12}\right) \Delta^3 f_{-2} + \ldots$$

und, für $t = 0$,

$$\begin{aligned} f'_0 = \Delta \frac{f_0 + f_{-1}}{2} - \frac{1}{6} \Delta^3 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2} \\ + \frac{1}{30} \Delta^5 \frac{f_{-2} + f_{-3}}{2} - \ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

woraus sich nach Einführung der Hilfsgrösse

$$\varphi_0 = \Delta \frac{f_0 + f_{-1}}{2} = \frac{f_{+1} - f_{-1}}{2}$$

ergibt:

$$f'_0 = \varphi_0 - \frac{1}{6} \Delta^2 \varphi_{-1} + \frac{1}{30} \Delta^4 \varphi_{-2} - \ldots$$

oder

$$f'_0 = \varphi_0 + \sum_{r=1}^{r=r} (-1)^r \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots r^2}{(2r+1)!} \Delta^{2r} \varphi_{-r} \tag{8}$$

Wird Formel (5) in der Form

$$f_t = \frac{f_0 + f_1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \Delta f_0 + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) \Delta^2 \frac{f_0 + f_{-1}}{2}$$

$$+ \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}\right) \Delta^3 f_{-1}$$

$$+ \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{24} + \frac{t}{12}\right) \Delta^4 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2} + \ldots$$

geschrieben und dann integriert, so erhält man

$$\int f_t \, dt = \frac{f_0 + f_1}{2} t + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) \Delta f_0$$

$$+ \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right) \Delta^2 \frac{f_0 + f_{-1}}{2} + \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{24}\right) \Delta^3 f_{-1}$$

$$+ \left(\frac{t^5}{120} - \frac{t^4}{48} - \frac{t^3}{72} + \frac{t^2}{24}\right) \Delta^4 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2}$$

$$+ \ldots \qquad + \text{Const.}$$

und daraus

$$\int_0^1 f_t \, dt = \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{1}{12} \Delta^2 \frac{f_0 + f_{-1}}{2}$$

$$+ \frac{11}{720} \Delta^4 \frac{f_{-1} + f_{-2}}{2} - \ldots \qquad (9)^{*)}$$

Wendet man Formel (8) auf den Zähler von (3) an, so erhält man, da

$$\Delta \frac{\overset{n}{U}_x + \overset{n}{U}_{x-1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\overset{n}{U}_{x+1} - \overset{n}{U}_{x-1}\right) = \frac{\overset{n}{A}_{x-1} + \overset{n}{A}_x}{2}$$

ist,

*) Die Koeffizienten der sechsten und achten Differenzen sind $\frac{191}{60480}$ und $\frac{2497}{3628800}$.

$$\overset{n}{\mu}_x = \frac{\dfrac{\overset{n}{A}_{x-1}+\overset{n}{A}_x}{2} + \sum_{r=1}^{r=r}(-1)^r \dfrac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\ldots r^2}{(2r+1)!}\Delta^{2r}\dfrac{\overset{n}{A}_{x-r-1}+\overset{n}{A}_{x-r}}{2}}{B_x} \tag{I}$$

Aus Formel (I) können die Intensitäten $\overset{n}{\mu}_x$, sobald die Werte $\overset{n}{A}_x$ und B_x bekannt sind, *mit beliebiger Genauigkeit* bestimmt werden. Es ist dazu nur erforderlich, in die Rechnung alle die Glieder der Formel einzubeziehen, die auf das Resultat noch von Einfluss sind.

Sind aber die Intensitäten $\overset{n}{\mu}_x$ genau bestimmt, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten $\overset{n}{\overline{w}}_x$ *gleichfalls genau,* wenn man das Integral in (1) durch Differenzen nach Formel (9) ausdrückt.

Es wird dann

$$\overset{n}{\overline{w}}_x = 1 - e^{-\int_0^1 \overset{n}{\mu}_{x+t}\,dt}$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{\overset{n}{\mu}_x + \overset{n}{\mu}_{x+1}}{2} - \frac{1}{12}\Delta^2\frac{\overset{n}{\mu}_x+\overset{n}{\mu}_{x-1}}{2} + \frac{11}{720}\Delta^4\frac{\overset{n}{\mu}_{x-1}+\overset{n}{\mu}_{x-2}}{2} - \ldots\right)} \tag{II}$$

II. Berechnung der „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten $\overset{n}{w}_x$ aus den „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten $\bar{w}_x$.

Man hat wieder

$$\overset{n}{w}_x = \frac{1}{B_x} \int_0^1 B_{x+t} \; \overset{n}{\mu}_{x+t} \, dt \tag{2}$$

und

$$\overset{n}{\bar{w}}_x = 1 - e^{-\int_0^1 \overset{n}{\mu}_{x+t} dt} = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \overset{n}{\mu}_x d_x}. \tag{1}$$

Aus (1) folgt

$$\left(1 - \overset{n}{\bar{w}}_a\right)\left(1 - \overset{n}{\bar{w}}_{a+1}\right) \ldots \left(1 - \overset{n}{\bar{w}}_{x-1}\right) = e^{-\int_a^x \overset{n}{\mu}_x d_x} \tag{1a}$$

und, wenn

$$\left(1 - \overset{n}{\bar{w}}_a\right)\left(1 - \overset{n}{\bar{w}}_{a+1}\right) \ldots \left(1 - \overset{n}{\bar{w}}_{x-1}\right) = \overset{n}{\Psi}_x$$

gesetzt und alsdann (1a) differentiiert wird,

$$\overset{n}{\mu}_x = - \frac{d \overset{n}{\Psi}_x}{\overset{n}{\Psi}_x d_x} = - \frac{\overset{n}{\Psi}{}'_x}{\overset{n}{\Psi}_x} \tag{10}$$

Sind die „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten $\overset{n}{\bar{w}}_x$ und der Bestand B_x bekannt, so können die „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten $\overset{n}{w}_x$ durch Zurückführung des Differentiales in (10) nach Formel (8) und des Integrales in (2) nach Formel (9) auf Differenzen *genau* bestimmt werden.

Man erhält dann

$$\overset{n}{\mu}_x = \frac{\dfrac{\overset{n}{\Psi}_{x-1} - \overset{n}{\Psi}_{x+1}}{2} + \sum_{r=1}^{r=r} (-1)^r \dfrac{1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots r^2}{(2r+1)!} \Delta^{2r} \dfrac{\overset{n}{\Psi}_{x-r-1} - \overset{n}{\Psi}_{x-r+1}}{2}}{\overset{n}{\Psi}_x} \qquad \text{(III)}$$

und

$$\overset{n}{w}_x = \frac{1}{B_x} \left[\frac{B_x \overset{n}{\mu}_x + B_{x+1} \overset{n}{\mu}_{x+1}}{2} - \frac{1}{12} \Delta^2 \frac{B_x \overset{n}{\mu}_x + B_{x-1} \overset{n}{\mu}_{x-1}}{2} + \frac{11}{720} \Delta^4 \frac{B_{x-1} \overset{n}{\mu}_{x-1} + B_{x-2} \overset{n}{\mu}_{x-2}}{2} - \ldots \right] \qquad \text{(IV)}$$

Während die *genaue* zahlenmässige Bestimmung der „unabhängigen“ und der „abhängigen“ Wahrscheinlichkeiten, falls die gegebenen Werte nicht analytische Funktionen sind, nur durch Anwendung der Differenzenrechnung erfolgen kann, ist ihre *angenäherte* Berechnung auf verschiedenen Wegen möglich.

Zunächst geben hierzu die Formeln (I), (II), (III) und (IV) selbst ein Mittel an die Hand. Diese liefern *nur näherungsweise* gültige Werte, wenn nicht sämtliche, zur genauen Bestimmung der Intensitäten und Wahrscheinlichkeiten erforderlichen Differenzenordnungen bei der Berechnung berücksichtigt werden.

Für die Praxis ergeben sich, selbst wenn an die Genauigkeit der Rechnung *sehr* hohe Anforderungen gestellt werden, bereits völlig ausreichende und mindestens ebenso genaue Werte, wie die auf Grund anderer Näherungsformeln erhaltenen, wenn in den Formeln (I) und (II) bzw. (III) und (IV) nur die 2. Differenzen Berücksichtigung finden.

Eine andere *Näherungsformel* zur Bestimmung der „abhängigen“ Wahrscheinlichkeiten aus den „unabhängigen“ wird erhalten, wenn in Gleichung (2), aus der, wegen

$$\frac{d\,B_{x+t}}{B_{x+t}} = -\overset{1}{\mu}_{x+t}\,dt - \overset{2}{\mu}_{x+t}\,dt \ldots - \overset{n}{\mu}_{x+t}\,dt$$

$$B_{x+t} = B_x\, e^{-\int_0^t \left(\overset{1}{\mu}_{x+t} + \overset{2}{\mu}_{x+t} + \ldots \overset{n}{\mu}_{x+t}\right) dt},$$

$$\overset{n}{w}_x = \int_0^1 e^{-\int_0^t \left(\overset{1}{\mu}_{x+t} + \overset{2}{\mu}_{x+t} + \ldots \overset{n}{\mu}_{x+t}\right) dt} \cdot \overset{n}{\mu}_{x+t}\,dt$$

folgt, der Wert der Integrale

$$e^{-\int_0^t \overset{1}{\mu}_{x+t}\,dt},\quad e^{-\int_0^t \overset{2}{\mu}_{x+t}\,dt} \quad \ldots \quad e^{-\int_0^t \overset{n-1}{\mu}_{x+t}\,dt},$$

der, weil $1 > t > 0$, zwischen

$$e^{-\int_0^1 \overset{1}{\mu}_{x+t}\,dt} = 1 - \overset{1}{w}_x \text{ und } 1,$$

$$e^{-\int_0^1 \overset{2}{\mu}_{x+t}\,dt} = 1 - \overset{2}{w}_x \text{ und } 1,$$

$$\ldots e^{-\int_0^1 \overset{n-1}{\mu}_{x+t}\,dt} = 1 - \overset{n-1}{w_x}$$ und 1 liegen muss,

näherungsweise gleich

$$1 - \frac{\overset{1}{w_x}}{2}, \quad 1 - \frac{\overset{2}{w_x}}{2}, \quad \ldots 1 - \frac{\overset{n-1}{w_x}}{2}$$

gesetzt wird.

Es wird dann

$$\overset{n}{w_x} = \overset{n}{w_x}\left(1 - \frac{\overset{1}{w_x}}{2}\right)\left(1 - \frac{\overset{2}{w_x}}{2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\overset{n-1}{w_x}}{2}\right) \qquad (11)$$

Für die Wahrscheinlichkeiten $\overset{1}{w_x}$, $\overset{2}{w_x}$ ... $\overset{n-1}{w_x}$ ergeben sich $(n - 1)$ analoge Gleichungen.

Dieses System von Gleichungen kann wiederum zur Bestimmung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den „abhängigen" benutzt werden. Eine solche Bestimmung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten muss sich natürlich desto schwieriger gestalten, je grösser die Zahl der Abgangsursachen ist. Praktisch wird sie für den Fall, dass $n > 2$ ist, überhaupt nicht in Betracht kommen.

Für $n = 2$ erhält man, da dann

$$\overset{1}{w_x} = \overset{1}{w_x}\left(1 - \frac{\overset{2}{w_x}}{2}\right), \quad \overset{2}{w_x} = \overset{2}{w_x}\left(1 - \frac{\overset{1}{w_x}}{2}\right) \qquad (12)$$

ist,

$$\left.\begin{aligned}\overset{1}{w}_x &= 1 + \frac{\overset{1}{w}_x - \overset{2}{w}_x}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\overset{1}{w}_x - \overset{2}{w}_x}{2}\right)^2 - 2\overset{1}{w}_x} \\ \overset{2}{w}_x &= 1 - \frac{\overset{1}{w}_x - \overset{2}{w}_x}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\overset{1}{w}_x - \overset{2}{w}_x}{2}\right)^2 - 2\overset{1}{w}_x}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\overline{w}_x$ können aus (12) auch durch Kettenbrüche dargestellt werden.

So würde z. B. $\overset{1}{w}_x$ aus

$$\overset{1}{w}_x = \cfrac{\overset{1}{w}_x}{1 - \cfrac{\overset{2}{w}_x}{2 - \cfrac{\overset{1}{w}_x}{1 - \cfrac{\overset{2}{w}_x}{\cdots}}}}$$

zu berechnen sein.

Einer derartigen Berechnungsweise ist jedoch für systematisch auszuführende Rechnungen die Bestimmung der $\overline{w}_x$ aus den Gleichungen (13) zweifellos vorzuziehen.

Weitere *Näherungsformeln* zur Berechnung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den „abhängigen" und umgekehrt ergeben sich, wenn zum Zwecke der *direkten* Ausführung der Differentiation in (3) und der Integration in (1) *hypothetische Annahmen* über den Verlauf der Grössen U_x und B_x zwischen den einzelnen Altern gemacht werden.

Wird angenommen, dass die in der Gesamtheit B_x zwischen x und $x + 1$ eintretenden Abgänge A_x der Zeit proportional erfolgen, so ist

$$B_{x+t} = B_x - t(B_x - B_{x+1})$$

und

$$\overset{n}{U}_{x+t} - \overset{n}{U}_x = t\overset{n}{A}_x.$$

Man erhält dann

$$\overset{n}{\mu}_{x+t} = \frac{\overset{n}{U}{}'_{x+t}}{B_{x+t}} = \frac{\overset{n}{A}_x\,dt}{B_x - t(B_x - B_{x+1})}$$

und

$$1 - \overset{n}{\overline{w}}_x = e^{-\int_0^1 \overset{n}{\mu}_{x+t}dt} = e^{-\int_0^1 \frac{\overset{n}{A}_x dt}{B_x - t(B_x - B_{x+1})}},$$

woraus durch einfache Integration folgt:

$$\overset{n}{\overline{w}}_x = 1 - \left(\frac{B_{x+1}}{B_x}\right)^{\frac{\overset{n}{A}_x}{B_x - B_{x+1}}} \qquad (14\,\text{a})$$

oder, durch die Wahrscheinlichkeiten w_x ausgedrückt,

$$\overset{n}{\overline{w}}_x = 1 - \left(1 - \overset{1}{w}_x - \overset{2}{w}_x - \ldots \overset{n}{w}_x\right)^{\frac{\overset{n}{w}_x}{\overset{1}{w}_x + \overset{2}{w}_x + \ldots \overset{n}{w}_x}} \qquad (14\,\text{b})$$

und durch Umkehrung aus (14b), da

$$1 - \overset{1}{w}_x - \overset{2}{w}_x - \ldots \overset{n}{w}_x = \left(1 - \overset{1}{\overline{w}}_x\right)\left(1 - \overset{2}{\overline{w}}_x\right) \ldots \left(1 - \overset{n}{\overline{w}}_x\right)$$

ist,

$$\overset{n}{w}_x = \left(1 - \left(1 - \overset{1}{w}_x\right)\left(1 - \overset{2}{w}_x\right) \dots \left(1 - \overset{n}{w}_x\right)\right) \times$$

$$\frac{\log\left(1 - \overset{n}{w}_x\right)}{\log\left(\left(1 - \overset{1}{w}_x\right)\left(1 - \overset{2}{w}_x\right) \dots \left(1 - \overset{n}{w}_x\right)\right)}$$

Entwickelt man in Formel (14a), der man auch die Form

$$\overset{n}{w}_x = 1 - \left(1 - \frac{B_x - B_{x+1}}{B_{x+1} + (B_x - B_{x+1})}\right)^{\frac{\overset{n}{A}_x}{B_x - B_{x+1}}}$$

geben kann, die Klammergrösse nach Potenzen von

$$\frac{B_x - B_{x+1}}{B_{x+1} + (B_x - B_{x+1})},$$

so bekommt man, wenn man gleichzeitig zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise $B_x - B_{x+1}$ durch D, B_{x+1} durch B und $\overset{n}{A}_x$ durch A ersetzt,

$$\overset{n}{w}_x = \frac{A}{B+D} - \frac{A(A-D)}{2(B+D)^2} + \frac{A(A-D)(A-2D)}{2 \cdot 3(B+D)^3} - \dots$$

Es ist aber auch

$$\frac{A}{B + \frac{D+A}{2}} = \frac{A}{B + D + \frac{A-D}{2}} = \frac{A}{B+D}$$

$$- \frac{A(A-D)}{2(B+D)^2} + \frac{A(A-D)^2}{4(B+D)^3} - \dots,$$

so dass man auch schreiben kann

$$\overset{n}{w}_x = \frac{A}{B + \frac{D + A}{2}} + \frac{1}{12}\,\frac{A \cdot D^2}{B^3} - \frac{1}{12}\,\frac{A^3}{B^3} + \dots$$

oder angenähert

$$\overset{n}{w}_x = \frac{A}{B + \frac{D + A}{2}} = \frac{\overset{n}{A}_x}{B_x - \frac{\overset{1}{A}_x + \overset{2}{A}_x + \dots \overset{n-1}{A}_x}{2}} \tag{15a}$$

$$\overset{n}{w}_x = \frac{\overset{n}{w}_x}{1 - \frac{1}{2}\left(\overset{1}{w}_x + \overset{2}{w}_x + \dots \overset{n-1}{w}_x\right)} \tag{15b}$$

Für die Wahrscheinlichkeiten $\overset{1}{w}_x$, $\overset{2}{w}_x$, $\dots$ $\overset{n-1}{w}_x$ ergeben sich $(n - 1)$ analoge Gleichungen.

Hinsichtlich der Behandlung dieses Systems von Gleichungen zur Bestimmung der „abhängigen“ Wahrscheinlichkeiten aus den „unabhängigen“ gilt das weiter vorn bei gleicher Gelegenheit Gesagte entsprechend.

Für $n = 2$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{w}_x &= \frac{\overset{1}{w}_x\left(1 - \frac{1}{2}\overset{2}{w}_x\right)}{1 - \frac{1}{4}\overset{1}{w}_x\,\overset{2}{w}_x} \\ \overset{2}{w}_x &= \frac{\overset{2}{w}_x\left(1 - \frac{1}{2}\overset{1}{w}_x\right)}{1 - \frac{1}{4}\overset{1}{w}_x\,\overset{2}{w}_x} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Bei der Art der zur Ableitung der Formeln (11) bis (16) gemachten Annahmen sollte ein Zweifel darüber, dass diese Formeln ohne Ausnahme nur eine *angenäherte* Berechnung der „unabhängigen" Wahscheinlichkeiten aus den „abhängigen" und umgekehrt gestatten und daher die auf der Grundlage der Differenzenrechnung gewonnenen Formeln (I), (II), (III) und (IV) an Genauigkeit *nicht* erreichen können, als schlechterdings ausgeschlossen gelten.

Gegenteilige Anschauungen über die Genauigkeit der unter der Annahme des geradlinigen Verlaufes der Grössen B_x und U_x zwischen den einzelnen Altern erhaltenen Näherungsformeln (14) werden trotzdem in den von Regierungsrat *Dr. Böhmer* in *Berlin* und Professor *Dr. Rosmanith* in *Prag* dem Amsterdamer Kongress für Versicherungswissenschaft zu dem Thema „Bedeutung, Anwendung und Berechnung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten und ihr Verhältnis zu den übrigen statistischen Masszahlen" eingereichten Arbeiten (Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des VII. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Band II, Seite 327 ff. und Seite 347 ff.) vertreten.

Beide Autoren gelangen dort bei der Ableitung der Formeln zur Berechnung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den „abhängigen" auf Formeln von der Struktur der Formeln (14), wie sie übrigens nicht von *Rosmanith* und *Böhmer* erstmalig dargestellt, sondern von *Karup* bereits vor mehreren Jahrzehnten (vergleiche Masius, „Rundschau der Versicherungen", 1876, Seite 25, „Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Sozietät, Seite 48) zur Darstellung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungsdaten benutzt worden sind.

Rosmanith und *Böhmer* glauben damit Formeln zur Berechnung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten erhalten zu haben, die genauer (Rosmanith,

a. a. O., Seite 365) oder doch mindestens ebenso genau (Böhmer, a. a. O., Seite 343) wie die unter Anwendung der Differenzenrechnung aufgestellten Formeln sind.

Die Unrichtigkeit der *Rosmanith-Böhmerschen* Anschauungen, die offenbar auf einer Verkennung entweder des Wesens und der Bedeutung der Differenzenrechnung oder des Näherungscharakters der von Rosmanith und Böhmer abgeleiteten Formeln beruhen, bedarf nach den vorangegangenen Darlegungen keines weiteren Nachweises.

Bei *Böhmer* muss die Äusserung einer solchen Anschauung insbesondere noch deshalb befremden, weil *Böhmer*, wie mir von anderer Seite mitgeteilt worden ist, in den von ihm, gelegentlich der in den Jahren 1912 und 1913 in Berlin veranstalteten versicherungswissenschaftlichen Fortbildungskurse, gehaltenen Vorträgen wiederholt die Berücksichtigung des „parabolischen“ Verlaufes der Kurven der Ausscheidungsfälle selbst für Näherungsformeln, wie sie von mir unter ausdrücklicher Bezeichnung als solche für die Praxis aufgestellt worden sind, (vergleiche „Veröffentlichungen usw.“, Heft XX, Seite 137) — allerdings sehr zu Unrecht — gefordert hat.

Zwei *Zahlenbeispiele* zur Veranschaulichung des Genauigkeitsgrades der vorstehend abgeleiteten Formeln mögen meine Darlegungen beschliessen.

Erstes Beispiel. Den Ausgangspunkt bilde eine Gesamtheit von Personen, die ausser durch Tod noch beliebige andere Abgänge erleidet.

Die Lebenden dieser Gesamtheit beim Alter x sollen mit L_x, die Todesfälle bzw. die sonstigen Abgänge zwischen x und $x + 1$ mit T_x bzw. A_x bezeichnet werden. Die Ausscheidungen mögen in der Weise erfolgen, dass die Intensitäten des sonstigen Abganges α_x konstant sind und die Sterbensintensitäten μ_x der Gompertz-Makehamschen Formel genügen.

Wird dann $\alpha_x = c$, $\mu_x = a + br^x$ gesetzt, so ist die Ausscheidungsintensität

$$-\frac{dL_x}{L_x\,dx} = \alpha_x + \mu_x = c + a + br^x$$

Durch Integration folgt hieraus

$$L_x = k\,e^{-(c+a)x} \cdot e^{-\frac{b}{\ln r} r^x}$$

und, wenn $e^{-(c+a)} = \sigma$, $e^{-\frac{b}{\ln r}} = g$ gesetzt wird,

$$L_x = k\,\sigma^x g^{r^x},$$

worin k eine Konstante bedeutet, die von der Anfangszahl der Lebenden in der Ausscheideordnung abhängt.

Ebenso erhält man die gewöhnliche Absterbeordnung l_x aus $\mu_x = a + br^x$, wenn $e^{-a} = s$ gesetzt wird,

$$l_x = k\,s^x g^{r^x}$$

Endlich hat man noch, wenn mit $\overline{w}_x$ die „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten des sonstigen Abganges bezeichnet werden,

$$1 - \overline{w}_x = e^{-\int_0^1 \alpha_{x+t}\,dt} = e^{-c}$$

Es sei nun gegeben:

$$\bar{w}_x, \quad k, \quad \log s, \quad \log(-\log g), \quad \log r,$$

und zwar:

$\bar{w}_x = 0.03, \quad k = 10\,000\,000, \quad \log s = 0.0015\,7230$ *)

$\log(-\log g) = \bar{6}.8716\,4640$ *), $\log r = 0.0379\,0010$ *),

woraus weiter folgt**):

$$a = 0.0036\,2035.45 \qquad c = 0.0304\,5920.75$$

$$a + c = 0.0340\,7956.20$$

$$\log \sigma = -0.0148\,0056\,5733$$

$$ln\, \sigma = -0.0340\,7956\,2025$$

$$ln\, r = 0.0872\,6820\,5283$$

$$\log g = -0.0007\,4412\,5864$$

$$ln\, g = -0.0017\,1341\,3122$$

$$\log(-ln\, g) = \bar{7}.2338\,6208\,8578,$$

$$\log b = \bar{6}.1747\,1813\,3260$$

und die Aufgabe gestellt, die Ordnung der L_x sowie die Grössen A_x und T_x mit einer solchen Stellenzahl zu bestimmen, dass die „unabhängigen" Sterbenswahr-

---

*) Diese Konstanten habe ich *Karups* „Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Sozietät" (Seite 38), die mir bei Aufstellung der Rechnung gerade zur Hand war, entnommen. Sie beziehen sich auf die dort abgeleitete Sterbetafel für Männer.

**) Die logarithmischen Rechnungen sind hier, wie auch für die späteren Berechnungen, mittels der genial konstruierten Logarithmentafel von Guillemin („Tables de Logarithmes à 3 Quatrades", Paris, Gauthier-Villars, 1912) ausgeführt worden.

scheinlichkeiten q_x hieraus auf 8 Dezimalen genau erhalten werden können, und alsdann diese Wahrscheinlichkeiten aus der Ordnung der l_x, die sie unzweifelhaft genau liefern muss, sowie nach den verschiedenen Näherungsmethoden zu berechnen, die oben besprochen worden sind.

Ausführung der Rechnung.

I. Berechnung der Grössen L_x, A_x und T_x.

Zunächst wurde die Ordnung der L_x aus den Konstanten k, r, σ und g bestimmt (Tabelle I, Spalte 1).

Darauf wurden die Grössen A_x aus der Beziehung

$$A_x = \int_0^1 a_{x+t} L_{x+t} \, dt = c \int_0^1 L_{x+t} \, dt \tag{17}$$

unter Anwendung der Formel (9) berechnet (Tabelle I, Spalte 2).

Die Integration von (17) lässt sich, da die L_x analytisch gegeben sind, auch direkt ausführen. Wird in (17) L_x durch $k \cdot \sigma^x g^{r^x}$ ersetzt, so erhält man

$$A_x = ck \int_x^{x+1} \sigma^x g^{r^x} \, dx$$

Dieses Integral kann durch Reihenentwicklung gelöst werden.

Es ist

$$g^{r^x} = 1 + r^x \, lng + \frac{r^{2x}}{1 \cdot 2} (lng)^2 + \frac{r^{3x}}{1 \cdot 2 \cdot 3} (lng)^3 + \ldots$$

und infolgedessen

$$A_x = ck\left(\int_x^{x+1} \sigma^x dx + lng \int_x^{x+1} \sigma^x r^x dx + \frac{(lng)^2}{2} \int_x^{x+1} \sigma^x r^{2x} dx\right.$$

$$\left. + \frac{(lng)^3}{6} \int_x^{x+1} \sigma^x r^{3x} dx + \ldots\right)$$

und, da $\int_z^{z+1} v^z dz = \frac{1}{ln\, v} v^z (v - 1)$ ist,

$$A_x = ck\,\sigma^x \left(\frac{\sigma - 1}{ln\,\sigma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(lng)^n r^{nx} (\sigma r^n - 1)}{n!\, ln\,(\sigma r^n)}\right)$$

Trotz der erheblichen Schwierigkeiten, die bei Anwendung dieser Methode mit der Berechnung jedes einzelnen Wertes A_x verbunden sind, habe ich letztere für einige Alter ausgeführt, um die Genauigkeit der durch die Differenzenformel (9) bestimmten Werte A_x ausserhalb jedes Zweifels zu stellen.

Es ergibt sich:

$$A_{60} = 27\,683.8764 \qquad A_{75} = 6692.51335$$
$$A_{65} = 19\,423.4798 \qquad A_{80} = 2857.46137$$
$$A_{70} = 12\,323.6389 \qquad A_{85} = 841.23127$$

und somit vollständige Übereinstimmung mit den entsprechenden Werten in Tabelle I, Spalte 2.

Nachdem die Grössen A_x bekannt waren, konnten die Grössen T_x ohne weiteres aus der Beziehung $L_x - L_{x+1} = A_x + T_x$ erhalten werden.

II. Berechnung der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten q_x.

Die Berechnung der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten q_x wurde auf 5 verschiedene Arten ausgeführt, und zwar

a) genau

1. nach den Formeln (I) und (II),
2. aus der aus den Konstanten k, s, g, r abgeleiteten Ordnung der l_x (Tabelle II, Spalte 3) direkt.

b) angenähert

1. nach den Formeln (I) und (II) unter Berücksichtigung nur der 2. Differenzen,
2. nach Formel (14) (*Rosmanith-Böhmer*),
3. nach Formel (15)*).

Die Bestimmung der q_x nach den Formeln (I) und (II) erfordert die vorherige Bestimmung der Intensitäten μ_x. Diese ist für die genaue Rechnung doppelt ausgeführt worden, und zwar ausser nach Formel (I) noch direkt aus $\mu_x = a + br^x$.

Wie es sein muss, ergeben beide Methoden — abgesehen von ganz bedeutungslosen, durch Abrundung entstandenen Differenzen in der 9. Dezimale — völlig übereinstimmende Werte (Tabelle II, Spalte 1 und 2).

Die Werte der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten q_x sind in Tabelle III enthalten. Die Spalten 1 und 2 dieser Tabelle bringen die totale Überein-

---

*) Von einer Anwendung der Formel (13) wurde hier wie auch im zweiten Beispiel abgesehen, um das Tabellenmaterial nicht zu unübersichtlich zu gestalten. Diese Formel wird im allgemeinen Werte von ähnlicher Genauigkeit wie Formel (14) liefern.

stimmung zwischen den aus l_x direkt und den nach den Formeln (I) und (II) genau berechneten q_x zum Ausdruck.

Von diesen genauen Werten weichen die Werte q_x der Spalten 3 bis 5 mehr oder weniger ab, die nach Formel (15) erhaltenen, entsprechend dem bei Ableitung dieser Formel angewandten doppelten Näherungsverfahren, am meisten.

Die besten Näherungswerte liefern die mit den 2. Differenzen abgebrochenen Formeln (I) und (II), deren Resultate die der Formel (14) (*Rosmanith-Böhmer*) sichtlich an Genauigkeit übertreffen.

Zweites Beispiel. Den vorigen analoge Rechnungen habe ich in Anlehnung an die von mir in meiner früheren Arbeit über die „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten (a. a. O., Seite 166 bis Seite 173) angestellten numerischen Berechnungen für einige Alter ausgeführt.

Die Ergebnisse, die denen des ersten Beispieles durchaus gleichen, sind in den Tabellen IVa und IVb enthalten*).

---

*) Eine bei der Durchsicht der, mir gegen Ende des vergangenen Jahres anlässlich meiner Aufnahme in die „Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker" von dieser übermittelten, Hefte der „Mitteilungen" zufällig gemachte Wahrnehmung veranlasst mich noch zu folgender Erklärung:

Am Schlusse des § 36 seiner im 8. Hefte der „Mitteilungen", Seite 1 bis Seite 153, veröffentlichten Abhandlung „Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung" schreibt Herr Professor Dr. Du Pasquier auf Seite 109 wörtlich: „Die vorliegende historische Notiz hatte ich für einen am 29. Oktober 1910 abzuhaltenden Vortrag über die mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung zusammengestellt, den ich für die 6. ordentliche Mitgliederversammlung der „Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker", die an jenem Tage in Lausanne tagte, vorbereitet hatte. Diese historische Notiz war bereits verfasst, als ich von der Arbeit des Herrn P. Spangenberg: „Die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten" (erschienen im Heft 20 der „Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft", p. 91—179, ausgegeben im Januar 1911) Kenntnis erhielt."

Zu dieser Erklärung muss Herr Professor Dr. Du Pasquier durch einen Irrtum veranlasst worden sein.

Zwischen meinen historisch-kritischen Bemerkungen über die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten („Veröffentlichungen", Heft 20, Seite 91 bis Seite 130) und denjenigen des Herrn Professor Dr. Du Pasquier besteht in vielen Punkten eine offenkundige Übereinstimmung.

Es kann daher keinem Zweifel unterliegen, dass der eine Autor bei Abfassung seiner Arbeit die Arbeit des andern gekannt und von ihr beeinflusst worden ist. Als dieser Autor kann aber nur Herr Professor Dr. Du Pasquier in Betracht kommen.

Den Protokollen über die 6. und 7. ordentliche Mitgliederversammlung der „Vereinigung" zufolge (vgl. „Mitteilungen", Heft 6, Seite XXI, und Heft 7, Seite XV) ist der von Herrn Professor Dr. Du Pasquier am 29. Oktober 1910 abzuhaltende Vortrag tatsächlich nicht an diesem Tage, sondern erst am 7. Oktober 1911 — also 9 Monate nach dem Erscheinen meiner Arbeit — gehalten, die Geschichte der Karupschen Theorie überdies in diesem Vortrage, wie nebenbei bemerkt sei, nicht behandelt worden, so dass die erste öffentliche Darstellung der Geschichte der Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten durch Herrn Professor Dr. Du Pasquier überhaupt erst in seiner oben genannten, im Jahre 1913 veröffentlichten Abhandlung zu verzeichnen ist.

Meine historisch-kritischen Bemerkungen können bei dieser Sachlage naturgemäss von denen des Herrn Professor Dr. Du Pasquier nicht berührt worden sein.

Berlin-Friedenau, den 4. März 1915.

P. Spangenberg.

Der Vorstand der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker hat sich mit der Herrn Spangenberg und Prof. Dr. Du Pasquier berührenden Angelegenheit befasst und festgestellt:

1. Herr Prof. Dr. Du Pasquier hat zur Zeit, da er seine historische Notiz für den Druck redigierte, die Arbeit von Herrn Spangenberg gekannt.
2. Herr Prof. Dr. Du Pasquier hat die Arbeit von Herrn Spangenberg für seine historische Notiz benützt.

Tabelle I.

Alter x	1 L_x	2 A_x	3 T_x
58	1 057 103.25		
59	996 796.904		
60	937 819.587	27 683.876	29 966.434
61	880 169.277	25 948.191	30 367.158
62	823 853.928	24 253.421	30 708.598
63	768 891.909	22 600.288	30 979.287
64	715 312.334	20 989.845	31 167.227
65	663 155.262	19 423.480	31 260.077
66	612 471.705	17 902.910	31 245.384
67	563 323.411	16 430.174	31 110.884
68	515 782.353	15 007.610	30 844.873
69	469 929.870	13 637.823	30 436.625
70	425 855.422	12 323.639	29 876.911
71	383 654.872	11 068.049	29 158.527
72	343 428.296	9 874.132	28 276.902
73	305 277.262	8 744.963	27 230.705
74	269 301.594	7 683.511	26 022.425
75	235 595.658	6 692.513	24 658.922
76	204 244.223	5 774.351	23 151.835
77	175 318.037	4 930.907	21 517.843
78	148 869.287	4 163.433	19 778.693
79	124 927.161	3 472.414	17 960.936
80	103 493.811	2 857.4614	16 095.3264
81	84 541.0232	2 317.2225	14 215.8671
82	68 007.9336	1 849.3328	12 358.4862
83	53 800.1146	1 450.4118	10 559.3961
84	41 790.3067	1 116.1133	8 853.2241
85	31 820.9693	841.2313	7 271.0488
86	23 708.6892	619.8608	5 838.5222
87	17 250.3062	445.6070	4 574.2755
88	12 230.4237	311.8284	3 488.8152
89	8 429.78010	211.89659	2 584.07415
90	5 633.80936		
91	3 640.64462		
92	2 267.84003		
93	1 357.22167		
94	777.51199		

Tabelle II.

Alter x	1 μ_x (nach Formel (I))	2 μ_x (aus $\mu_x = a + br^x$)	3 l_x
64	0.0434 6083.2	0.0434 6083.2	
65	0.0470 9385.7	0.0470 9385.7	
66	0.0510 5817.6	0.0510 5817.6	4 572 477.408
67	0.0553 8399.7	0.0553 8399.8	4 335 623.931
68	0.0601 0428.9	0.0601 0428.8	4 092 498.686
69	0.0652 5501.9	0.0652 5501.9	3 844 000.069
70	0.0708 7543.9	0.0708 7544.1	3 591 209.838
71	0.0770 0838.7	0.0770 0838.5	3 335 397.392
72	0.0837 0058.7	0.0837 0058.8	3 078 018.375
73	0.0910 0305.0	0.0910 0304.9	2 820 706.219
74	0.0989 7141.8	0.0989 7141.6	2 565 255.271
75	0.1076 6641.2	0.1076 6641.3	2 313 594.336
76	0.1171 5430.4	0.1171 5430.1	2 067 749.749
77	0.1275 0738.4	0.1275 0738.2	1 829 797.634
78	0.1388 0455.0	0.1388 0455.4	1 601 805.703
79	0.1511 3190.4	0.1511 3190.7	1 385 765.873
80	0.1645 8338.6	0.1645 8338.3	1 183 520.097
81	0.1792 6149.3	0.1792 6148.9	996 682.9395
82	0.1952 7808.1	0.1952 7808.2	826 565.6811
83	0.2127 5521.6	0.2127 5521.6	674 107.6512
84	0.2318 2608.0	0.2318 2607.8	
85	0.2526 3600.1	0.2526 3599.9	

Tabelle III.

Alter x	1	2	3	4	5
	„unabhängige" Sterbenswahrscheinlichkeit q_x				
	genau (aus l_x direkt)	**genau** (nach den Formeln (I) und (II))	**angenähert** (nach Formel (14), *Rosmanith-Böhmer*)	**angenähert** (nach den mit 2. Diff. abgebroch. Form. (I) u. (II))	**angenähert** (nach Formel (15))
66	0.0517 9981.4	0.0517 9981.3	0.0517 8940	0.0517 9974	0.0517 7189
67	0.0560 7618.4	0.0560 7618.4	0.0560 6488	0.0560 7608	0.0560 4471
68	0.0607 2051.2	0.0607 2051.3	0.0607 0824	0.0607 2037	0.0606 8498
69	0.0657 6228.6	0.0657 6228.5	0.0657 4896	0.0657 6209	0.0657 2211
70	0.0712 3294.3	0.0712 3294.3	0.0712 1849	0.0712 3269	0.0711 8744
71	0.0771 6592.3	0.0771 6592.3	0.0771 5025	0.0771 6559	0.0771 1431
72	0.0835 9669.3	0.0835 9669.2	0.0835 7971	0.0835 9626	0.0835 3806
73	0.0905 6276.3	0.0905 6276.4	0.0905 4437	0.0905 6223	0.0904 9609
74	0.0981 0366.2	0.0981 0366.2	0.0980 8376	0.0981 0301	0.0980 2773
75	0.1062 6088.7	0.1062 6088.8	0.1062 3937	0.1062 6011	0.1061 7432
76	0.1150 7781.1	0.1150 7781.4	0.1150 5456	0.1150 7693	0.1149 7902
77	0.1245 9953.3	0.1245 9953.3	0.1245 7444	0.1245 9856	0.1244 8667
78	0.1348 7268.1	0.1348 7267.7	0.1348 4562	0.1348 7168	0.1347 4365
79	0.1459 4512.7	0.1459 4512.7	0.1459 1598	0.1459 4420	0.1457 9752
80	0.1578 6564.0	0.1578 6564.4	0.1578 3428	0.1578 6494	0.1576 9670
81	0.1706 8342.6	0.1706 8342.7	0.1706 4973	0.1706 8320	0.1704 9000
82	0.1844 4756.8	0.1844 4756.8	0.1844 1141	0.1844 4815	0.1842 2606

Tabelle IVa („unabhängige“ Invaliditätswahrscheinlichkeit i'_x).

Alter x	1: i'_x genau (vgl. a. a O., Tab. IV, 2)	2: i'_x angenähert (nach Formel (14), *Rosmanith-Böhmer*)	3: i'_x angenähert (nach den mit 2. Diff. abgebrochenen Formeln (I) u. (II))	4: i'_x angenähert (nach Formel (15))
40	0.003 415.3	0.003 415	0.003 415	0.003 415
45	0.004 733.9	0.004 734	0.004 734	0.004 734
50	0.009 321.0	0.009 320	0.009 322	0.009 319
55	0.018 157.5	0.018 155	0.018 156	0.018 153
60	0.036 840.2	0.036 828	0.036 848	0.036 819
65	0.079 973.7	0.079 964	0.079 958	0.079 908
70	0.136 852.4	0.136 791	0.136 860	0.136 601
75	0.259 234.2	0.259 118	0.259 188	0.258 401
80	0.587 321.7	0.587 098	0.587 751	0.580 597

Tabelle IVb („unabhängige“ Sterbenswahrscheinlichkeit $q_x^{\overline{aa}'}$).

Alter x	1: $q_x^{\overline{aa}}$ genau (vgl. a. a. O., Tab. IV, 5)	2: $q_x^{\overline{aa}'}$ angenähert (nach Formel (14), *Rosmanith-Böhmer*)	3: $q_x^{\overline{aa}'}$ angenähert (nach den mit 2. Diff. abgebrochenen Formeln (I) u. (II))	4: $q_x^{\overline{aa}'}$ angenähert (nach Formel (15))
40	0.010 672.2	0.010 672	0.010 671	0.010 672
45	0.012 104.4	0.012 105	0.012 105	0.012 104
50	0.016 473.6	0.016 475	0.016 474	0.016 474
55	0.023 926.0	0.023 928	0.023 922	0.023 926
60	0.028 278.4	0.028 291	0.028 282	0.028 282
65	0.040 880.7	0.040 891	0.040 869	0.040 845
70	0.050 494.0	0.050 561	0.050 506	0.050 410
75	0.056 827.0	0.056 976	0.056 819	0.056 406
80	0.104 452.5	0.104 938	0.104 512	0.097 533