Beiträge zur Theorie der sozialen Witwenversicherung.

Von Hofrat **W. Küttner**, Dresden.

I. Einleitung.

Die Sozialversicherung, die sich früher ausschliesslich auf geschlossene Personenkreise, d. h. auf Pensions-, Fabrik- und Knappschaftskassen beschränkte, ist in einer Reihe von Kulturstaaten heute zu einer Zwangsversicherung umgestaltet worden, von der nahezu die ganze Arbeiterbevölkerung dieser Staaten erfasst wird. Damit hat der Versicherungsgedanke eine Anerkennung erfahren, die seine Vertreter mit gerechtem Stolze erfüllen muss. Aber dies nicht allein. Der Staat bringt mit der ins Leben gerufenen Zwangsversicherung auch der Versicherungswissenschaft selbst ein nahezu unbegrenztes Vertrauen entgegen. Er baut nicht nur auf ihre Grundsätze, sondern auch auf ihre Anpassungsfähigkeit und stellt sie sorglos vor neue Probleme.

Die Versicherungswissenschaft wird dieses Vertrauen rechtfertigen, das ist nicht zweifelhaft; aber sie darf nicht ausgeschalten werden, wenn es sich darum handelt, neue Versicherungsgedanken in die Tat umzusetzen, sie praktisch zu verwirklichen. Gesichtspunkte, die für die Geschäftsführung einer Armenkasse oder Wohltätigkeitseinrichtung löblich und zweckmässig erscheinen, sind nicht immer in ihrer Wirkung versicherungstechnisch festzustellen. Der Gesetzgeber sollte nicht vergessen, dass die Personenversicherung die schwierigste Aufgabe ist, deren Lösung der Versicherungswissenschaft obliegt, und eingedenk bleiben, dass es keine ehernen Gesetze für den Verlauf der Eheschliessungen, der Geburtenfolge, der Invalidität, der Sterblichkeit usw. gibt, sondern dass die Häufigkeit dieser Vorgänge beständig im Flusse ist, und dass versicherungstechnisch keine Ereignisse in ihrer finanziellen Tragweite abgeschätzt werden können, *wenn sie nicht vorher statistisch verfolgt worden sind und nicht eine gewisse Konstanz derselben gewährleistet erscheint.*

Soll der stolze, vom Geiste unserer Zeit herrlich Zeugnis ablegende Bau unserer Sozialversicherung allen Stürmen und Angriffen künftig widerstehen, so wird man seine Grundmauern unablässlich befestigen und allen überflüssigen Zierat, alle den Bau über Gebühr belastenden Erkerchen und Türmchen, wenn sie auch als schön empfunden werden, vermeiden müssen. In dieser Richtung ist nicht immer glücklich verfahren worden.

Die Sozialversicherung hat vollständig neue Momente in die Lebens- und Rentenversicherung hineingetragen. Dazu gehört an erster Stelle die Versicherung von Personen, die dem Versicherer völlig unbekannt sind und als Versicherte gar nicht zu existieren brauchen. Während man vorher nur Verbindungs- und Überlebens-Versicherungen und -Renten kannte, die sich auf *gegebene* Personen bezogen, versichert die Sozialversicherung Witwen und Waisen, die ihr *völlig unbekannt* sind; denn die Frau, die heute ein Versicherter besitzt, braucht nicht seine Witwe zu werden.

Das kann eine ganz andere Frau sein. Die Waisen, die ein Versicherter hinterlässt, werden bei seinem Eintritte in die Versicherung vielfach noch nicht geboren sein. Die Frauen und Kinder, für die die unverehelichten Versicherten Beiträge zahlen, bleiben vielfach ungeehelicht und unerzeugt. Diese Unbestimmtheit ist das Charakteristische der Sozialversicherung und die Ursache der heute noch bestehenden Unsicherheit ihrer versicherungstechnischen Behandlung.

Aber noch ein anderes Moment ist es, was die Sozialversicherung von der älteren Lebens- und Rentenversicherung unterscheidet. Die Beiträge werden nicht wie bei der letzteren individuell nach dem Risiko, sondern kollektiv, d. h. für die ganzen gleich hoch versicherten Personen, bestimmt und sodann gleichmässig verteilt und erhoben. Es ist dies ein sozialer Gesichtspunkt, ein Eintreten des einen für den anderen. Auch wird diese Massnahme damit verteidigt, dass der Versicherte die Lasten seiner und seiner Familie Versorgung nicht allein trüge, sondern dass hierbei Arbeitgeber und Staat mitwirkten, und somit eine Vereinfachung in der Einziehung der Beiträge nicht beanstandet werden könne.

Die soziale Witwenversicherung, mit der wir uns hier beschäftigen, steht ganz unter dem Einflusse der soeben entwickelten Gesichtspunkte. Wenn ein Versicherter stirbt, erhält seine hinterlassene Ehefrau eine Leibrente, die mit dem Tode oder mit der Wiederverheiratung in Wegfall kommt. Die Rente ist entweder konstant oder steigt mit der Dauer der Versicherung. Das letztere dürfte bei allen Zwangsversicherungen zutreffen. Die Rentensteigerung findet oft nur eine Reihe von Jahren statt, und der Bezug der Rente selbst ist sehr häufig an die Erfüllung einer

Karenzzeit gebunden, was in der Regel auf eine Anzahl geleisteter Beiträge hinausläuft. Mit dem Eintritte in die Invalidität hört sowohl die Beitragszahlung als auch das Wachstum der Höhe der Witwenrente auf, und die im Zustande der Invalidität geehelichte Frau hat kein Anrecht auf die Witwenrente. Die Auszahlung der Rente erfolgt vorschüssig jährlich in m Raten.

Diese Festsetzungen, die wir unseren Ermittlungen zugrunde legen, erschöpfen zwar die Bestimmungen über die soziale Witwenrente nicht, allein wir gewinnen mit ihnen das Urbild derselben. Die Einrichtungen, die wir hier und da finden, dass die Rente wegfällt, wenn die Ehe auf dem letzten Krankenlager geschlossen worden ist, oder die Differenz der Alter zweier Ehegatten eine mit Rücksicht auf ihr Verehelichungsalter gegebene Grösse überschreitet, werden ihres geringen Einflusses halber selten versicherungstechnisch abgeschätzt. Anders liegen natürlich die Verhältnisse, wenn die Rente nur den *erwerbsunfähigen* Witwen zustehen soll, wie es § 1258 der Deutschen Reichsversicherungsordnung für die Hinterbliebenenversicherung vorschreibt. Hier muss die Wahrscheinlichkeit, dass die hinterlassene Witwe (y) beim Tode ihres Ehemannes bereits erwerbsunfähig ist, noch in die Berechnungen eintreten. Andere Abweichungen von unserem Urbilde zwingen uns zu anderen Massnahmen. Auf sie alle einzugehen, würde den Rahmen der gegenwärtigen Abhandlung, die den Zweck verfolgt, in das schwierige Gebiet der sozialen Witwenversicherung einzuführen und den gegenwärtigen Stand ihrer versicherungstechnischen Behandlung darzulegen, weit überschreiten. Hier musste notwendig eine Beschränkung, wie sie in der obigen Festsetzung enthalten ist, eintreten, wollte man nicht ins Uferlose geraten. Nötig erschien es hingegen, der mathematischen Behandlung unseres Gegenstandes einige Gesichtspunkte vorauszuschicken, von denen die Formelentwicklungen beeinflusst worden sind.

Bei Berücksichtigung der Invalidität ist angenommen worden, dass sie in allen Fällen eine *dauernde* ist, weil die Einführung der Reaktivität den an und für sich schon äusserst verwickelten Rechnungsgang ganz unerträglich kompliziert haben würde. Es konnte dies um so leichter geschehen, als die neuere Auffassung dahin geht, die vorübergehende Invalidität, bei der eine Belastung durch Witwenrente *nicht* eintreten kann, zu einem selbständigen Versicherungszweige — Versicherung einer Krankenrente — auszubilden. Diese Massnahme muss entschieden als zweckmässig erachtet werden und wird insofern günstig wirken, als der Invaliditätsbegriff damit eine etwas schärfere Fassung erhält. Ein Teil der in die Klasse der Invaliden versetzten Aktiven ist nur krank und seine Grösse stellt sich als stark abhängig von der Dauer der Krankenunterstützung dar. Je kürzer diese Dauer ist, desto grösser ist der Zugang zu den Invaliden und der Teil derjenigen, die später zu den Aktiven wieder zurückkehren.

Die Gesamtheiten der Aktiven ${}^{al}l_x$, ${}^{av}l_x$ und ${}^{aw}l_x$, die in unsere Entwicklungen eintreten, enthalten hiernach neben den *Erkrankten* auch die *temporären Invaliden*. Wie aus den *Erkrankten* **dauernd** *invalide Personen* hervorgehen können, so auch *aus den zuletztgenannten Invaliden,* was bei Ermittlung der Invaliditätswahrscheinlichkeit zu berücksichtigen ist. Der Ausfall an Beiträgen, den das Versicherungsunternehmen durch die Kranken und temporären Invaliden

Jahr für Jahr erleidet, ist gesondert festzustellen. Die Wege, die hierfür einzuschlagen sind, ergeben sich leicht und können hier unerörtert bleiben.

Die Wahrscheinlichkeiten, die in die nachfolgenden Berechnungen eingeführt werden, sind als *abhängig* entwickelt gedacht. Wenn somit den Anregungen durch die neueren Arbeiten *Spangenbergs* [1]), *Du Pasquiers* [2]) und *Rosmaniths* [3]) keine Folge gegeben worden ist, so wird man bei dem frühzeitigen Eintreten des Verfassers für die *Karupsche* Theorie hierin keine Ablehnung derselben erblicken können. Das Schöpferische und Wertvolle dieser Theorie liegt in den Intensitäten und in dem Nachweise, dass sie sich bei ihrem Zusammenwirken gegenseitig *nicht* beeinflussen. Wie der Übergang vom Unendlichkleinen zum Endlichen hergestellt wird, ob man zu den *unabhängigen* oder zu den *abhängigen* Wahrscheinlichkeiten übergeht, oder mit den Intensitäten selbst rechnet, ist minder wichtig, aber aus praktischen Gründen so zu wählen, dass der Entwicklungsgang sich möglichst einfach gestaltet. Dieser Forderung entsprachen aber für die nachfolgenden Ableitungen am besten die abhängigen Wahrscheinlichkeiten.

Du Pasquier belegt die nach *Karup* ermittelte unabhängige Wahrscheinlichkeit mit dem Namen

---

[1]) P. Spangenberg, die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft 20.

[2]) Du Pasquier, mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 8, 1913.

[3]) G. Rosmanith, Bedeutung, Anwendung und Berechnung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten und ihr Verhältnis zu den übrigen statistischen Masszahlen. VII. Kongress für Versicherungswissenschaft in Amsterdam 1912.

„*partielle Wahrscheinlichkeit*“ und begründet dies. Der Verfasser kann sich dieser Änderung nur anschliessen, ja er geht noch einen Schritt weiter und behauptet, dass die Bezeichnung „*unabhängige* Wahrscheinlichkeit“ irreführend sein kann und in der Tat auch bereits zu irrigen Auffassungen geführt hat. Man hat gemeint, dass diese Wahrscheinlichkeitswerte sich als *losgelöst* von allen übrigen Einflüssen darstellen und von einer Gesamtheit ohne weiteres auf eine andere übertragen werden können. Das braucht nicht einmal zulässig für Gesamtheiten mit gleichen Lebens- und Arbeitsbedingungen zu sein, wenn nicht auch die Hemmungen für den Eintritt der in Frage stehenden Ereignisse dieselben sind. Man denke nur an die Invalidität. Mit Zunahme der Erschwernisse für die Aufnahme der Aktiven unter die Invaliden wird naturgemäss die Invaliditätswahrscheinlichkeit *ab*- und die Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven *zu*nehmen, gleichviel ob wir sie nach *Karup* oder *abhängig* ermitteln. Die *Abhängigkeit,* wie sie sich hier für die beiden Wahrscheinlichkeiten herausstellt, besteht auch für andere Masszahlen sozialer Vorgänge und kann durch den Kalkul *nicht* aufgehoben werden.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zur sozialen Witwenversicherung zurück und überblicken die Arbeiten, die auf diesem Gebiete bisher veröffentlicht worden sind, so unterscheiden sich scharf zwei Richtungen, die um Anerkennung ringen. Die eine Richtung geht von den *Heiratswahrscheinlichkeiten* aus und erfasst die Versicherten *individuell,* während die andere Richtung ihre Formeln auf der *Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins* aufbaut und damit zu einer *Kollektivversicherung* kommt. Zu den Vertretern der ersteren Richtung gehören J. Karup [1]), Fritz Rohde [2]), Hans Amtmann [3]), während als Vertreter der anderen Richtung G. Behm [4]), Zillmer [5]), Hugo Meyer [6]), G. Schærtlin [7]), R. Leubin [8]) und die englischen Autoren Ralph P. Hardy [9]), Meikle [10]), King [11]), Manly [12]), Allin [13]) und E. C. Thomas [14]) hervorgetreten sind.

Die zuerstgenannte Methode wird in Deutschland die „*direkte*" genannt, weil sie, wie bereits bemerkt, von den *Heiratswahrscheinlichkeiten* ausgeht. Diese Bezeichnung kann nicht als eine glückliche und charakterisierende bezeichnet werden. Ich möchte vorschlagen, sie „*Individualmethode*" zu nennen, weil sie jeden

---

[1]) J. Karup, Gutachten über die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Sozietät usw., Dresden 1893, und die Reform des Beamten-Pensions-Instituts der Mitglieder des Assekuranzvereins von Zuckerfabriken in der österreichisch-ungarischen Monarchie. Prag 1898.

[2]) Fritz Rohde, selbständige und unselbständige Witwen- und Waisenversicherung. 5. internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft 1906.

[3]) Hans Amtmann, neue mathematische Theorien der Witwenversicherung. Jena 1908.

[4]) G. Behm, Denkschrift zur Begründung des Gesetzentwurfs für die Unfallversicherung. Stenographische Berichte des Reichstags 1882/1883.

[5]) Zillmer, Assekuranz-Jahrbuch von A. Ehrenzweig, XII. Jahrgang.

[6]) Hugo Meyer, Beiträge zur Pensionsversicherung. Jena 1903.

[7]) G. Schærtlin, die indirekte Methode zur Berechnung der Anwartschaft auf Witwenrente. Bern 1908.

[8]) R. Leubin, versicherungstechnische Orientierung usw. Bern 1903.

[9]) u. [10]) Journal of the Institute of Actuaries, Bd. XXXVIII, Seite 163.

[11]) Journal of the Institute of Actuaries, Bd. XXX, S. 291.

[12]) Journal of the Institute of Actuaries, Bd. XXXVI, S. 209, Bd. XXXVIII, S. 101 und Bd. XLII, S. 1.

[13]) Journal of the Institute of Actuaries, Bd. XXXIX, S. 337.

[14]) Journal of the Institute of Actuaries, Bd. XL, S. 188.

Versicherten individuell auffasst, d. h. nicht nur nach seinem Alter, sondern auch nach seinem Zivilstande fragt und, wenn er verheiratet ist, das Alter seiner Frau mit in die Berechnungen einbezieht. Der Umstand, dass die Entwicklungen sich ausschliesslich auf den Heiratswahrscheinlichkeiten aufbauen, ist kein Kriterium für die direkte Methode oder, wie wir fortan sagen wollen, für die Individualmethode. Denn dann wäre die *Jahn*sche [1]) Behandlung der sozialen Witwenrente auch eine individuelle, während sie tatsächlich eine kollektive ist.

Die zweite, auf dem Verheiratetsein beruhende Methode nennt man im Gegensatz zur ersteren die „*indirekte*“ Methode. Auch diese Bezeichnung charakterisiert das Verfahren nicht, das nur auf das Alter der Versicherten Rücksicht nimmt und Ledige, Verheiratete und Witwer zusammenfasst. Die englischen Autoren haben dieses Verfahren die Kollektivmethode genannt, und in der Tat ist diese Bezeichnung die zutreffendere, deren wir uns hier ebenfalls bedienen wollen. Eine dritte Methode zur Berechnung des Barwertes der sozialen Witwenrente werden wir im Abschnitte IV dieser Schrift kennen lernen.

Während die Wahrscheinlichkeit, zu einer gewissen Zeit *verheiratet zu sein,* eine leicht zu ermittelnde, zweifelsfreie Masszahl darstellt, auch wenn sie sich, wie *Schærtlin* in seiner schönen Arbeit: „Die indirekte Methode zur Berechnung der Anwartschaft auf Witwenrente, Bern 1908“ es fordert, auf die Zeit des Eintrittes in die Invalidität oder des Todes bezieht, so ist die *Heiratswahrscheinlichkeit,* d. h. die Wahrschein-

---

[1]) G. Jahn, Ermittlung der Beiträge für die Witwenversicherung beim Bergbaue. Inauguraldissertation. Freiberg 1888.

lichkeit, im nächsten Jahre eine Ehe einzugehen, vom Zivilstande des Versicherten stark abhängig und weniger sicher zu ermitteln. Die Beobachtungen haben ergeben, dass die Häufigkeit der Eheschliessungen nicht unabhängig vom wirtschaftlichen Auf- und Niedergange ist, und dass überdies starke Abweichungen hierin unter den verschiedenen Erwerbsständen bestehen.

Die Heiratswahrscheinlichkeit erfordert hiernach eine weitgehende Spezialisierung, und das ist der Grund, dass wir zurzeit noch über keine einwandfreien Werte für sie und die verschiedenen Berufsklassen verfügen, die zwischen Ledigen und Witwern unterscheiden. Zu den vertrauenswürdigsten gehören die Heiratswahrscheinlichkeiten, die J. Karup für die Gothaischen Staatsdiener und die Beamten des Assekuranzvereins von Zuckerfabriken in der österreichisch-ungarischen Monarchie in seinen zwei Gutachten niedergelegt hat. Allein er vernachlässigt noch die Heiratswahrscheinlichkeit der Witwer *als abhängig von der Witwerdauer darzustellen,* eine Forderung, die bereits T. B. Sprague in seiner Abhandlung: „On the Rate of Remarriage among Widowers" gestellt hat, und der in der Zukunft doch wird entsprochen werden müssen. Aus dieser im Jahre 1880 veröffentlichten, höchst interessanten Arbeit heben wir das folgende Täfelchen heraus, das über die Wiederverehelichung der Witwer mit Rücksicht auf die Dauer der Witwerschaft einige Auskunft gibt und sich auf die Pairs in England bezieht (s. Tabelle S. 191):

Ein Blick auf die Spalten 2 und 3 genügt, um sich zu überzeugen, dass die Heiratstabelle für Witwer eine *doppelt* abgestufte sein muss, wenn die tatsächlichen Verhältnisse richtig zur Darstellung kommen

Dauer der Witwerschaft	Unter einjähriger Beobachtung standen	Davon verheirateten sich	Davon starben	Davon schieden aus	Gesamter Abgang	Dauer der Witwerschaft
1	2	3	4	5	6	7
	Es wurden Witwer im Alter von 48—52 Jahren					
1	115	6	4	—	10	1
2	105	13	1	—	14	2
3	91	12	—	—	12	3
4	79	7	—	—	7	4
5	72	5	1	—	6	5
6	66	4	1	—	5	6
7	61	3	2	—	5	7
8	56	2	—	1	3	8
9	53	2	—	2	4	9
10	49	1	2	—	3	10
11	46	1	—	3	4	11
12	42	1	1	1	3	12
13	39	—	2	1	3	13
14	36	—	2	—	2	14
15	34	—	5	—	5	15
16	29	—	1	—	1	16
17	28	—	1	1	2	17
18	26	1	—	—	1	18
19	25	—	1	—	1	19
20	24	—	1	1	2	20
21	22	—	2	—	2	21
22	20	—	1	1	2	22
23	18	—	—	—	—	23
24	18	—	2	1	3	24
25	15	—	1	—	1	25
26 u. mehr	82	—	12	2	14	26 u. mehr

sollen. Diese Tatsache wird noch schärfer aus einem Täfelchen hervortreten, das aus einem allerdings recht kleinen Teile der sächsischen Knappschaftsstatistik abgeleitet worden ist und im Abschnitt IV mitgeteilt werden soll.

Auf die Ableitung der Ausscheideordnungen, die sich in grosser Anzahl nötig machten, ist in den folgenden Entwicklungen nicht eingegangen worden. Hier bleibt es dem Leser überlassen, ob er diese Ordnungen auf partiellen oder abhängigen Wahrscheinlichkeiten aufbauen will. Auch ist auf die Rentenwerte nur dann eingegangen worden, wenn die Möglichkeit eines Missverständnisses nicht ausgeschlossen schien.

II. Die Barwerte der sozialen Witwenrente nach der Individualmethode.

A. Die aktive Gesamtheit.

1. Die unter I. festgelegte Witwenrente setzt der individuellen Behandlung ziemliche Schwierigkeiten entgegen. Die Versicherten werden hierbei nicht nur nach ihrem Lebensalter unterschieden, sondern überdies noch

a) in ledige Aktive,
b) in verheiratete Aktive und
c) in verwitwete Aktive

zerlegt, wobei weiter die Gesamtheit unter *b* in Gesamtheiten mit *gleichalterigen Ehefrauen* und die

Gesamtheit unter c in Gesamtheiten mit *gleicher Dauer der Witwerschaft* aufzulösen sind.

Ganz besonders erschwerend für die individuelle Behandlung erweist sich aber der Umstand, dass sowohl für die vorhandenen Unverehelichten, als auch für die Verehelichten *alle möglichen Ehen* und *Nachehen* in den Kreis der Erörterung einbezogen und die aus den letzteren wahrscheinlich hervorgehenden Belastungen festgestellt werden müssen.

Um allen diesen erschwerenden Bedingungen zu entsprechen, bedürfen wir zunächst dreier *Ausscheideordnungen aktiver männlicher Personen*, nämlich Tafeln, denen wir entnehmen können

${}^{al}l_x$ die Anzahl der aktiven Ledigen vom Alter x, die sich durch Invalidität, Eheschliessung und Tod vermindern,

${}^{av}l_x$ die Anzahl der aktiven Verheirateten vom Alter x, die sich durch Invalidität, selbst beantragte Ehescheidung und Tod vermindern, und

${}^{aw}l_{[x]+x_1}$ die Anzahl der aktiven Witwer, die im Alter von x ihre Ehefrau verloren haben, x_1 Jahre später noch als aktive Witwer leben und sich durch Invalidität, Verehelichung und Tod vermindern.

Alle diese Tafeln bestehen selbständig nebeneinander, und es darf **nicht**

$$ {}^{al}l_x + {}^{av}l_x + {}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1} = {}^{a}l_x $$

gesetzt werden.

Eine vierte, fünfte und sechste *Ausscheideordnung* ist mit Rücksicht auf die versicherten weiblichen Personen und Invaliden nötig. Wir bedürfen nämlich die Anzahl

${}^{v}l_y$ verheirateter Frauen vom Alter y, die sich durch selbstbeantragte Ehescheidung und Tod vermindern, die Anzahl

${}^{w}l_y$ lebender Witwen vom Alter y, die sich durch Verheiratung und Tod vermindern, und die Anzahl

${}^{i}l_{[x]+x_1}$ lebender Invaliden vom Alter $x + x_1$, die bereits x_1 Jahre sich im Zustande der Invalidität befinden und sich ausschliesslich durch Tod vermindern. (Selektionstafel.)

Aber diese sechs Dekremententafeln genügen noch nicht zur restlosen Lösung unserer Aufgabe. Es müssen noch *Wahrscheinlichkeiten für das Eingehen einer Ehe* hinzutreten. Dabei werden wir zwischen Ledigen und Witwern unterscheiden müssen und neben dem Lebensalter auch die Zeit zu berücksichtigen haben, die seit der Möglichkeit, überhaupt eine Ehe einzugehen, verflossen ist. Für die Ledigen einer homogenen Gesamtheit, auf die unsere Untersuchungen sich werden beschränken müssen, wird letztere sich immer auf nahezu ein und dasselbe Altersjahr beziehen und keiner besonderen Hervorkehrung in den einzelnen Fällen bedürfen, so dass wir die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger lediger Aktiver im nächsten Jahre, also innerhalb der Altersgrenzen von x bis $x + 1$, eine Ehe eingeht, mit

$${}^{al}h_x$$

bezeichnen können.

Anders liegen die Verhältnisse bei den Witwern. Hier beginnt die Zeit, in der eine Eheschliessung möglich ist, in verschiedenen Altersjahren, und die Heiratswahrscheinlichkeit wird infolgedessen einen anderen Verlauf als bei den Ledigen haben. Soweit hierüber Aufschlüsse vorliegen, ist diese Wahrscheinlichkeit bei den Witwern wesentlich grösser als bei gleichalterigen Ledigen. Namentlich aber haben wir nach den Ausführungen und Nachweisen Seite 11 vorauszusetzen, dass kurz nach Ablauf der Trauerzeit bei den Witwern eine Häufung der Eheschliessungen stattfindet, da letztere vielfach durch den Hausstand und die Erziehung ihrer Kinder gezwungen werden, alsbald eine neue Ehe einzugehen.

Auf Grund dieser Erwägungen führen wir in unsere Berechnungen für die aktiven Witwer eine Heiratswahrscheinlichkeit ein, die nicht nur vom Alter x, sondern auch von der Dauer x_1 der Witwerschaft abhängig ist, und bezeichnen sie mit

$$^{aw}h_{x,\,x_1}.$$

Endlich ist für unsere Berechnungen noch *das Alter der geehelichten Frau* wichtig, weil davon sehr erheblich der Barwert der Witwenrente abhängt. Ist dieses Alter bekannt, so bezeichnen wir es mit y, während ein *unbekanntes* Alter derselben durch die Differenz $\varDelta$ ausgedrückt werden soll, die zwischen ihrem und ihres Mannes Alter *zur Zeit der Eheschliessung* wahrscheinlich besteht. Die Frau, die der Mann im Alter x geehelicht hat, wird nach m Jahren also $x - \varDelta + m$ Jahre alt und ihre Gesamtheit mit

$$^{v}l_{x-\varDelta+m}$$

zu bezeichnen sein, *wo sich $\varDelta$ immer auf das unmittelbar davor stehende Alter, hier x, bezieht und als eine Funktion desselben zu betrachten ist.*

Ist das *Verehelichungsalter* des Mannes *nicht* bekannt, so wird man die Differenz herbeiziehen müssen, die im Durchschnitt zwischen den Altern der Ehegatten gleichalteriger Ehemänner besteht. Wir bezeichnen diese Differenz mit

$$\Delta',$$

wobei wieder zu beachten ist, dass sie von dem unmittelbar davor stehenden Alter des Ehemannes abhängig ist.

Es ist nicht zu leugnen, dass diese Altersbestimmungen und namentlich die letztere sehr roh erscheinen. Einige Autoren, darunter G. Schærtlin, sind weiter gegangen und haben anstatt der Differenzen Δ und Δ' die Wahrscheinlichkeit aufgesucht und in ihre Berechnungen eingeführt, dass das Alter der in Frage kommenden Ehefrauen innerhalb bestimmter Grenzen liegt, in die die ganze Altersstrecke eingeteilt ist. Die den einzelnen Altersstrecken entsprechenden finanziellen Ergebnisse werden sodann zu *einer* Summe zusammengefasst.

Es bedarf keiner Erwähnung, dass der zuletzt gedachte Weg auf zuverlässigere Ergebnisse führt als der hier vorgeschlagene. Allein, wenn die Altersgrenzen nicht sehr erheblich auseinanderrücken, wächst die Rechenarbeit ins Ungemessene. Mit der Erweiterung dieser Grenzen nimmt aber der Nutzen des fraglichen Verfahrens ab und wird endlich ganz illusorisch. Solange die *indirekte* oder, wie ich vorgeschlagen habe, die *Kollektiv-Methode* für die Ermittlung der Barwerte der sozialen Witwenrenten in Anwendung kommt, wird sich der *Schærtlinsche* Weg noch mit Vorteil durchführen lassen. Die überaus verwickelte *Individual-Methode* artet aber mit noch Nutzen versprechenden

Altersstrecken zu einer ungeheuerlichen Rechenarbeit aus, wie aus den nachstehenden Formeln leicht zu erkennen sein wird.

Die Gesamtheiten ${}^{av}l_x$ und ${}^{v}l_y$, die sich, einzeln betrachtet, auch durch *Verwitwung* vermindern, treten in unseren Entwicklungen *nur verbunden* auf. Dies ist der Grund, dass wir für unsere Zwecke die Verwitwungen ausscheiden, d. h. unberücksichtigt lassen müssen. Wir würden im anderen Falle die Todesfälle *doppelt* zählen. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht, wenn mit Hilfe der Intensitäten die Wahrscheinlichkeit *für das Fortbestehen einer Ehe während* des unendlich kleinen Altersintervalles von x bis $x + dt$ bezw. von y bis $y + dt$ angeschrieben wird. Für diese Wahrscheinlichkeit erhalten wir, wenn wir mit

μ_x die Sterbensintensität des Ehemannes, mit

ν_x die Invaliditätsintensität des Ehemannes, mit

μ_y die Sterbensintensität der Ehefrau, mit

σ_y die Scheidungsintensität der Ehefrau als Klägerin und endlich mit

σ_x die Scheidungsintensität des Ehemannes als Kläger bezeichnen,

$$(1 - \mu_x dt)\,(1 - \nu_x dt)\,(1 - \sigma_x dt)\,(1 - \mu_y dt)\,(1 - \sigma_y dt).$$

Hätten wir bei ${}^{av}l_x$ und ${}^{v}l_y$ die Verwitwungen berücksichtigt, so würden wir für diese Gleichung durch Bildung des Produktes der einzelnen Wahrscheinlichkeiten, wie es in unseren Ableitungen zu geschehen hat, erhalten:

$$(1 - \mu_x dt)\,(1 - \nu_x dt)\,(1 - \sigma_x dt)\,(1 - \mu_y dt)$$
$$\times\,(1 - \mu_y dt)\,(1 - \sigma_y dt)\,(1 - \mu_x dt).$$

Der letztere Ausdruck enthält, wie leicht vorauszusehen war, die Wahrscheinlichkeiten $(1 - \mu_x dt)$ und $(1 - \mu_y dt)$ doppelt und würde uns die für das Fortbestehen der Ehe einzusetzende Wahrscheinlichkeit *zu klein* angegeben haben.

2. Wir beschäftigen uns nunmehr mit dem Falle a, d. h. mit denjenigen Versicherten, die aus

ledigen Aktiven

bestehen, und heben hervor, dass die Anzahl aller in dem Altersjahre von $x + m$ bis $x + m + 1$ bei der Gesamtheit ${}^{al}l_{x+m}$ bzw. der später auftretenden ${}^{aw}l_{x+m}$ geschlossenen Ehen durch die Produkte

$$ {}^{al}l_{x+m} \cdot {}^{al}h_{x+m} \text{ bzw. } {}^{aw}l_{x+m} \cdot {}^{aw}h_{x+m,x_1} $$

dargestellt wird, da — wie bereits in der Einleitung bemerkt — ${}^{al}h_{x+m}$ und ${}^{aw}h_{x+m,x_1}$ *abhängige* Wahrscheinlichkeiten darstellen. Verteilen wir sämtliche Eheschliessungen *gleichmässig* auf die durchlaufene einjährige Altersstrecke, was unbedenklich erscheinen wird, so entfallen auf das unendlich kleine Altersintervall von $x + m + t$ bis $x + m + t + dt$ unter Benützung der Kontinuitätshypothese

$$ {}^{al}l_{x+m} \cdot {}^{al}h_{x+m} dt \text{ bzw. } {}^{aw}l_{x+m} \cdot {}^{aw}h_{x+m,x_1} dt $$

Eheschliessungen, während t alle Werte von 0 bis 1 durchläuft.

Dies vorausgeschickt, stellt es sich als vorteilhaft dar, um alle in Frage kommenden Witwen zu erfassen, die Wahrscheinlichkeiten abzuleiten, dass der ledige Aktive vom Alter x

seine erste Ehe im Alter von $x+n_1$ bis $x+n_1+1$,
„ zweite „ „ „ „ $x+n_2$ „ $x+n_2+1$,
„ dritte „ „ „ „ $x+n_3$ „ $x+n_3+1$,
usw. usw.

eingeht.

Ist ${}^1H_{x+n_1}$ die Anzahl der Ehen, die ${}^{al}l_x$ *ledige Aktive* im Alter $x+n_1$ bis $x+n_1+1$ schliessen, *so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eingehen* **der ersten** *Ehe eines solchen Aktiven zur angegebenen Zeit*

$$\frac{{}^1H_{x+n_1}}{{}^{al}l_x} = \frac{{}^{al}l_{x+n_1}}{{}^{al}l_x} \cdot {}^{al}h_{x+n_1}. \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit für denselben Aktiven, im Alter $x+n_2$ bis $x+n_2+1$ *die* **zweite** *Ehe einzugehen,* führt auf überaus umständliche Berechnungen. Wir nehmen an, dass derselbe die *erste* Ehe innerhalb des Alters von $x+m$ bis $x+m+1$ mit einer um Δ Jahre jüngeren Frau geschlossen und diese Ehe eine Dauer von m' Jahren gehabt hat.

Damit lässt sich die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit wie folgt anschreiben:

$$\frac{{}^2H_{x+n_2}}{{}^{al}l_x} = -\frac{1}{{}^{al}l_x}\sum_{t=0}^{t=1}\int\left({}^1H_{x+m}\frac{{}^{av}l_{x+m+t+m'}}{{}^{av}l_{x+m+t}} \cdot \frac{d\,{}^{v}l_{x+m-\Delta+t+m'}}{{}^{v}l_{x+m-\Delta+t}}\right.$$
$$\left.\times \frac{{}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{aw}l_{[x+m+t+m']}} \cdot {}^{aw}h_{x+n_2,\,m''}\right), \tag{2}$$

wo ${}^2H_{x+n_2}$ die Anzahl der zweiten Eheschliessungen ausdrückt, die die ${}^{al}l_x$ ledigen Aktiven vom Alter x innerhalb des Alters von $x+n_2$ bis $x+n_2+1$ eingegangen sind. Auch haben wir ${}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}$ genommen, wo wir hätten ${}^{aw}l_{[x+m+m'+t]+m''-t}$ einsetzen sollen. Die Abweichung zwischen diesen zwei Ausdrücken darf als ganz belanglos angesehen werden, weshalb bei den künftigen Entwicklungen in gleicher Weise verfahren werden wird.

Das Summenzeichen $\sum$ bezieht sich auf alle in der Klammer ( ) stehenden Ausdrücke, die durch die Variationen der Elemente der drei Reihen

$$\begin{aligned} m &= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ m' &= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ m'' &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \end{aligned}$$

zur Summe n_2 entstehen. Nach bekannten Formeln kommen hierbei

$$\frac{(n_2+1)\,n_2}{2} \text{ Produktglieder}$$

in Frage.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der x-jährige ledige Aktive im Alter von $x+n_3$ *bis* $x+n_3+1$ *die* **dritte** *Ehe eingeht,* lässt sich mit dem Ausdruck unter (2) sofort wie folgt anschreiben:

$$\frac{{}^{3}H_{x+n_3}}{{}^{al}l_x} = \frac{1}{{}^{al}l_x} \sum \int_{t=0}^{t=1} \Big({}^{2}H_{x+m} \frac{{}^{av}l_{x+m+t+m'}}{{}^{av}l_{x+m+t}} \cdot \frac{d^{v}l_{x+m-\Delta+t+m'}}{{}^{v}l_{x+m-\Delta+t}} \times \frac{{}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{aw}l_{[x+m+m'+t]}} \cdot {}^{aw}h_{x+n_3,\, m''} \Big). \qquad (3)$$

Da die dritte Ehe aber nicht früher als zwischen den Altern $x+2$ und $x+3$ geschlossen werden kann, so bezieht sich hier das Summenzeichen Σ auf alle in der Klammer () stehenden Ausdrücke, die durch die Variationen der Elemente der drei Reihen

$$\begin{aligned} m &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots. \\ m' &= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots. \\ m'' &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots. \end{aligned}$$

zur Summe n_3 entstehen. Die Anzahl der hierbei auftretenden Produktglieder beträgt

$$\frac{(n_3 - 1)\, n_3}{2}.$$

Es ist leicht einzusehen, wie auf diesem Wege fortgeschritten werden kann, um die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten für das Eingehen einer vierten, fünften Ehe usw. zu finden.

Leider zeigt die vorstehende Entwicklung, dass die Ermittlung der Anzahl zweiter, dritter usw. Ehen bei einer gegebenen Gesamtheit lediger Aktiven vom Alter x eine *überaus mühsame und zeitraubende* Arbeit ist, dafern n_2, n_3 . . . ., die sämtlich von x abhängen, nur einigermassen gross werden. Ohne diese Anzahl beziehentlich ohne die Wahrscheinlichkeiten ${}^2H_{x+n_2} : {}^{al}l_x$, ${}^3H_{x+n_3} : {}^{al}l_x$ . . . ., zu denen später noch weitere treten werden, ist aber eine Lösung der Witwenversicherung nach der Individual-Methode *nicht* zu erreichen. Das darf indes nicht so verstanden werden, als ob die Rechnung, wie sie hier eingeleitet worden ist und später weitergeführt werden wird, nicht durch eine andere ersetzt werden könne, die neben der Sterblichkeit und Invalidität nur noch der Heiratswahrscheinlichkeiten bedarf. In diesem Falle wird aber die Rechnung, die auf Ermittlung der obigen Wahrscheinlichkeitswerte zu verwenden ist, immer implizite in der Rentenformel enthalten sein. Auf keinen Fall darf man hoffen, für das Endergebnis durch einen anderen Rechnungsgang einfachere und kürzere Formeln zu erhalten, wenn zwischen der Sterblichkeit der Ehemänner und Witwer unterschieden, die Heiratswahrscheinlichkeiten der Witwer von der Dauer der Witwerschaft abhängig gemacht und *alle Möglichkeiten der Eingehung zweiter, dritter usw. Ehen* auf Grund der Statistik **restlos** *erschöpft werden sollen.*

Die Schwierigkeiten, die der Witwenversicherung durch die **Nachehen** entstehen, haben King, den Verfasser des „Text-Book", veranlasst, von der individuellen Behandlung dieser Versicherung abzusehen und im XXX. Jahrgange des „Journal of the Institute of Actuaries" mit der Abhandlung „On family annuities" eine Theorie der **Kollektiv**-*Methode,* die uns später beschäftigen wird, zu veröffentlichen, nachdem er schon früher darauf aufmerksam gemacht hatte, dass bei Berechnungen von Belastungen, die durch Heiraten entstehen, die Wiederverheiratungen **nicht** ausser acht gelassen werden dürfen, da sie oft eine grosse Rolle spielen können.

King erkennt die überaus mühsamen Vorarbeiten, die mit der Ermittlung der Heiratswahrscheinlichkeiten und ähnlichen Funktionen verbunden sind, und betritt infolgedessen den Weg, den bereits in früheren Jahren *Hardy* und *Meikle* beschritten hatten.

Nach dieser Feststellung wenden wir uns wieder den Formeln (2) und (3) zu und benützen zur Ausführung der verlangten Integrationen die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned}
{}^{av}l_{x+m+t} &= {}^{av}l_{x+m}\left(1 - {}^{av}q'_{x+m}\cdot t\right)\\
{}^{av}l_{x+m+m'+t} &= {}^{av}l_{x+m+m'}\left(1 - {}^{av}q'_{x+m+m'}\cdot t\right)\\
{}^{v}l_{x+m-\varDelta+t} &= {}^{v}l_{x+m-\varDelta}\left(1 - {}^{v}q'_{x+m-\varDelta}\cdot t\right)\\
{}^{v}l_{x+m-\varDelta+m'+t} &= {}^{v}l_{x+m-\varDelta+m'}\left(1 - {}^{v}q'_{x+m-\varDelta+m'}\cdot t\right)\\
{}^{aw}l_{[x+m+m'+t]} &= {}^{aw}l_{[x+m+m']}\left(1 - {}^{aw}q'_{[x+m+m']}\cdot t\right)\\
{}^{aw}l_{[x+m+m'+t]+m''} &= {}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}\Big(1 - \\
&\qquad {}^{aw}q'_{[x+m+m']+m''}\cdot t\Big)
\end{aligned}\right\}, \quad (4)$$

wo die Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus den bezüglichen Gesamtheiten durchgängig mit q' bezeichnet worden sind. Wir setzen weiter zur Abkürzung

$$ {}^{av}q'_{x+m} = \alpha \text{ und } {}^{v}q'_{x+m-\varDelta} = \beta, \quad (5)$$

$$ {}^{av}q'_{x+m+m'} = \alpha' \text{ und } {}^{aw}q'_{[x+m+m']} = \gamma.$$

Führen wir die Ausdrücke (4) und (5) in (2) und (3) ein, so geht nach Ausscheidung von ${}^{1}H_{x+m}\,{}^{aw}h_{x+n_2,\,m''}$ bzw. ${}^{2}H_{x+m}\,{}^{aw}h_{x+n_3,\,m''}$ der unter dem Integralzeichen verbleibende Ausdruck über in

$$\frac{{}^{av}l_{x+m+m'}\cdot{}^{v}d'_{x+m-\varDelta+m'}\,{}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{av}l_{x+m}\cdot{}^{v}l_{x+m-\varDelta}\cdot{}^{aw}l_{[x+m+m']}}$$

$$\times\int_0^1\frac{(1-\alpha' t)\,dt}{(1-\alpha t)\,(1-\beta t)\,(1-\gamma t)}, \quad (6)$$

wenn wir der Kürze halber schreiben ${}^{v}l_y q'_y = {}^{v}l_y - {}^{v}l_{y+1} = {}^{v}d'_y$.

Da nun aber

$$\int_0^1 \frac{(1-\alpha' t)\,dt}{(1-\alpha t)\,(1-\beta t)\,(1-\gamma t)} = \frac{(\alpha-\alpha')}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)} \int_0^1 \frac{\alpha\,dt}{1-\alpha t}$$

$$+ \frac{(\beta-\alpha')}{(\beta-\alpha)\,(\beta-\gamma)} \int_0^1 \frac{\beta\,dt}{1-\beta t} + \frac{(\gamma-\alpha')}{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)} \int_0^1 \frac{\gamma\,dt}{1-\gamma t},$$

so folgt

$$\int_0^1 \frac{(1-\alpha' t)\,dt}{(1-\alpha t)(1-\beta t)(1-\gamma t)} = \frac{\alpha^2(\beta-\gamma)-\beta^2(\alpha-\gamma)+\gamma^2(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)} - \frac{\beta^2}{(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^2}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}$$

$$= \varphi\,(q'), \tag{7}$$

wenn bei den *kleinen* Werten, die α, β und γ nur annehmen können, von den Näherungswerten

$$\operatorname{lognat}\,(1-\alpha) = -\alpha$$
$$\operatorname{lognat}\,(1-\beta) = -\beta \text{ und}$$
$$\operatorname{lognat}\,(1-\gamma) = -\gamma$$

Gebrauch gemacht wird.

Der Wert des Integrals $\varphi\,(q')$ wird nur sehr wenig von 1 abweichen und für praktische Zwecke gleich der Einheit gesetzt werden können. Man erkennt dies, wenn in die obigen Entwicklungen $\alpha' = \gamma$, also ${}^{aw}q'_{x+m+m'} = {}^{aw}q'_{[x+m+m']}$ gesetzt wird, was der Wahrheit *sehr nahe* kommen dürfte.

Mit den Ausdrücken unter (6) und (7) gewinnen wir die folgenden Grundformeln für die Schliessung der *zweiten* und *dritten* Ehen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{{}^2H_{x+n_2}}{{}^{al}l_x} \\ = \dfrac{1}{{}^{al}l_x} \sum \left({}^1H_{x+m} \dfrac{{}^{av}l_{x+m+m'} \cdot {}^{v}d'_{x+m-1+m'} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{av}l_{x+m} \cdot {}^{v}l_{x+m-1} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']}} \right. \\ \left. \times \varphi(q')^{aw}h_{x+n_2,\, m''} \right) \\ \underline{n_2 = m + m' + m''}, \quad \begin{array}{l} m \;\; = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ m' \;= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ m'' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \end{array} \end{array}\right\} (8)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{{}^3H_{x+n_3}}{{}^{al}l_x} \\ = \dfrac{1}{{}^{al}l_x} \sum \left({}^2H_{x+m} \dfrac{{}^{av}l_{x+m+m'} \cdot {}^{v}d'_{x+m-1+m'} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{av}l_{x+m} \cdot {}^{v}l_{x+m-1} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']}} \right. \\ \left. \times \varphi(q')^{aw}h_{x+n_3,\, m''} \right) \\ \underline{n_3 = m + m' + m''}, \quad \begin{array}{l} m \;\; = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \\ m' \;= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ m'' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \end{array} \end{array}\right\} (9)$$

3. Die Ausdrücke (1), (8) und (9) ermöglichen es, die Barwerte der Witwenrente für den aktiven Ledigen vom Alter x zu ermitteln. Ehe wir indes näher auf diesen speziellen Fall eingehen, wird es sich empfehlen, vorher noch einige allgemeine Sätze abzuleiten.

Ist der Aktive zur Zeit der Eheschliessung z Jahre und seine Ehefrau y Jahre alt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erstere in dem unendlich kleinen Altersintervall von $z + n' + t$ bis $z + n' + t + dt$

stirbt und die Frau den Tod ihres Ehemannes überlebt, gleich

$$\frac{{}^{av}l_{z+n'+t}}{{}^{av}l_z}\,{}^{av}\mu_{z+n'+t}\,\frac{{}^{v}l_{y+n'+t}}{{}^{v}l_y}\,dt,$$

wo mit ${}^{av}\mu_z$ die Sterblichkeitsintensität des z-jährigen verheirateten Aktiven bezeichnet worden ist. Damit folgt aber sogleich, dass der Barwert einer in diesem unendlich kleinen Zeitabschnitte fällig werdenden und vorschüssig jährlich in m Raten zu zahlenden Witwenrente 1, zurückdiskontiert auf den Anfang des Jahres,

$$=\frac{{}^{av}l_{z+n'+t}\,{}^{v}l_{y+n'+t}}{{}^{av}l_z\,{}^{v}l_y}\cdot{}^{av}\mu_{z+n'+t}\cdot{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+t}\cdot v^t dt \qquad (10)$$

ist, soweit sie auf den *Tod* des in Rede stehenden Aktiven zurückzuführen ist. Der Leibrente ${}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+t}$ ist die Gesamtheit ${}^{w}l_y$ zugrunde zu legen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass derselbe Aktive innerhalb desselben unendlich kleinen Altersintervalles von $z + n' + t$ und $z + n' + t + dt$ *invalid* wird und die Frau zu dieser Zeit noch mit ihm zusammen lebt, ist, wenn wir die Invaliditäts-Intensität des z-jährigen verheirateten Aktiven mit ${}^{av}\nu_z$ bezeichnen,

$$\frac{{}^{av}l_{z+n'+t}}{{}^{av}l_z}\,{}^{av}\nu_{z+n'+t}\,\frac{{}^{v}l_{y+n'+t}}{{}^{v}l_y}\,dt.$$

Da nun bei der Sozialversicherung die Witwenrente, wie wir vorausgesetzt haben, nur so lange wächst, als Beiträge von dem Ehemanne gezahlt werden, diese aber beim Eintritte in die Invalidität wegfallen, so steht zur fraglichen Zeit die Höhe der Witwenrente bereits fest; sie ist der obigen in ihrer

Höhe gleich und kann daher ebenfalls gleich 1 gesetzt werden. Ihr Barwert beträgt, wenn auf den Anfang des Jahres, in dem der Invaliditätsfall eintritt, zurückdiskontiert wird,

$$ {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+t]|y+n'+t} v^t, $$

so dass der diskontierte Barwert der vorschüssigen, jährlich in m Raten zu zahlenden Witwenrente 1, die in dem unendlich kleinen Altersintervall von $z+n'+t$ bis $z+n'+t+dt$ durch Invalidisierung des obigen Aktiven zu reservieren ist, sich auf

$$ \frac{{}^{av}l_{z+n'+t} \cdot {}^{v}l_{y+n'+t}}{{}^{av}l_z \, {}^{v}l_y} \cdot {}^{av}\nu_{z+n'+t} \cdot {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+t]|y+n'+t} \cdot v^t dt \quad (11) $$

berechnet.

Um den Barwert der Gesamtwitwenrente 1, der auf das Altersintervall von $z+n'$ bis $z+n'+1$ für den in Rede stehenden Aktiven und zurückdiskontiert auf das Alter z entfällt, zu finden, haben wir die Ausdrücke (10) und (11) zu vereinigen und innerhalb der Grenzen von 0 und 1 zu integrieren.

Wir erhalten

$$ \frac{v^{n'}}{{}^{av}l_z \, {}^{v}l_y} \int_0^1 {}^{av}l_{z+n'+t} \cdot {}^{v}l_{y+n'+t} \Big({}^{av}\mu_{z+n'+t} \, {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+t} \quad (12) $$

$$ + \, {}^{av}\nu_{z+n'+t} \cdot {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+t]|y+n'+t} \Big) v^t dt. $$

Die Ausführung der angedeuteten Integration bietet keine Schwierigkeit, wenn wir, wie oben geschehen ist, zu linearen Substitutionen unsere Zuflucht nehmen. Allein der Grad der Genauigkeit, der hierdurch erhalten wird, kann nicht viel höher eingeschätzt werden, als wenn wir annehmen, dass die Ereignisse, die innerhalb eines Jahres eintreten, sämtlich — wie dies bei ähnlichen Untersuchungen vorherrschend geschieht — in Jahresmitte erfolgen.

In diesem Falle haben wir $v^{\frac{1}{2}}$ für v^t, ${}^{v}l_{y+n'+\frac{1}{2}}$ für ${}^{v}l_{y+n'+t}$, ${}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+\frac{1}{2}}$ für ${}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+t}$ und ${}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+\frac{1}{2}]|y+n'+\frac{1}{2}}$ für ${}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+t]|y+n'+t}$ zu setzen und zu beachten, dass

$$\frac{1}{{}^{av}l_{z+n'}}\int_0^1 {}^{av}l_{z+n'+t}\,{}^{av}\mu_{z+n'+t}\,dt = {}^{av}q_{z+n'} \text{ und}$$

$$\frac{1}{{}^{av}l_{z+n'}}\int_0^1 {}^{av}l_{z+n'+t}\,{}^{av}\nu_{z+n'+t}\,dt = {}^{av}i_{z+n'}$$

ist, wenn wir mit ${}^{av}i_z$ die *abhängige* Invaliditätswahrscheinlichkeit des z-jährigen verheirateten Aktiven bezeichnen. Damit geht unser Ausdruck (12) in

$$w'_{z+n',y+n'} = \frac{v^{n'+\frac{1}{2}}\,{}^{av}l_{z+n'}\,{}^{v}l_{y+n'+\frac{1}{2}}}{{}^{av}l_z\,{}^{v}l_y}\Big[{}^{av}q_{z+n'}\cdot{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+\frac{1}{2}} + {}^{av}i_{z+n'}\cdot{}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+\frac{1}{2}]|y+n'+\frac{1}{2}}\Big] \tag{13}$$

über, wo

$${}^{v}l_{y+n'+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left({}^{v}l_{y+n'} + {}^{v}l_{y+n'+1}\right),$$

$${}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left({}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'} + {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+1}\right),$$

$${}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+\frac{1}{2}]|y+n'+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left({}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n']|y+n'} + {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z+n'+1]|y+n'+1}\right)$$

genommen werden kann.

Auf eins ist indes noch aufmerksam zu machen. Die Überlebensrente ${}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z]\|y}$, die in den hier entwickelten Ausdrücken auftritt, kann nicht aus

$$ {}^{iw}\mathfrak{a}_{[z]\|y} = {}^{w}\mathfrak{a}_{y} - {}^{iw}\mathfrak{a}_{[z]|y} $$

abgeleitet werden, weil die Gesamtheit ${}^{w}l_{y}$ erst von dem Augenblicke ab Anwendung finden darf, wo der *Tod des Invaliden* eintritt. Bis dahin ist mit der Gesamtheit ${}^{v}l_{y}$ zu rechnen. Für die Ehemänner, die mit z Jahren dauernd invalid werden, kommt die letzte Selektionstafel zur Anwendung, der wir für ein konstantes z die Werte ${}^{i}l_{[z]+n'}$ entnehmen.

Beachten wir, dass

$$ \frac{{}^{i}l_{[z]+n'+t}}{{}^{i}l_{[z]}\,{}^{v}l_{y}}\,{}^{i}\mu_{[z]+n'+t}\,{}^{v}l_{y+n'+t}\,dt $$

die Wahrscheinlichkeit ist, dass der z-jährige Ehemann, der soeben invalid geworden und mit einer y-jährigen Frau verheiratet ist, innerhalb des unendlich kleinen Altersintervalles von $z + n' + t$ bis $z + n' + t + dt$ stirbt und seine Ehefrau zu dieser Zeit noch besitzt, so hat die Witwenrente 1, die dieser Ehefrau jährlich in m Raten vorschüssig zu zahlen ist, einen Barwert von zurzeit

$$ {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z]\|y} $$

$$ = \frac{1}{{}^{i}l_{[z]}\,{}^{v}l_{y}} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \int_{0}^{1} {}^{i}l_{[z]+n'+t}\,{}^{i}\mu_{[z]+n'+t}\,{}^{v}l_{y+n'+t}\,{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+t}\,v^{n'+t}\,dt. $$

Nun ist aber

$$ \int_{0}^{1} {}^{i}l_{[z]+n'+t}\,{}^{i}\mu_{[z]+n'+t}\,dt = {}^{i}d_{[z]+n'}, $$

und, wenn wir wieder die Sterbefälle in die Mitte des Jahres legen, folgt

$$^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[z]|y} = \frac{1}{{}^{i}l_{[z]}\,{}^{v}D_{y}} \sum_{0}^{\infty} {}^{i}_{n'}d_{[z]+n'}\;{}^{v}D_{y+n'+\frac{1}{2}}\;{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Eine etwas andere Formel habe ich für den vorliegenden Fall in meinem Buche: „Die Witwen- und Waisenversicherung usw." Seite 53 bis 56 abgeleitet.

Wir kehren jetzt zu unserer, Seite 205 gestellten Aufgabe zurück und gehen von der konstanten Rente $= 1$ aus, die, wie vorausgesetzt, vorschüssig jährlich in m gleichen Raten zu zahlen ist. Wir nehmen an, dass der in Rede stehende x-jährige ledige Aktive im Alter von $x + n_1$ bis $x + n_1 + 1$ die erste Ehe schliesst, wofür die Wahrscheinlichkeit nach (1) $=$

$$\frac{{}^{1}H_{x+n_1}}{{}^{al}l_{x}}$$

ist, so dass er zu dieser Zeit im Mittel $x + n_1 + \frac{1}{2}$ und seine Ehefrau $x + n_1 - \varDelta + \frac{1}{2}$ Jahre alt ist. Er soll n' bis $n' + 1$ Jahre später invalid werden oder sterben. Die mathematische Erwartung für diese Witwenrente ist das diskontierte Produkt aus (1) und (13), mithin, da $z = x + n_1 + \frac{1}{2}$ und $y = x + n_1 - \varDelta + \frac{1}{2}$ zu setzen ist,

$$\frac{{}^{1}H_{x+n_1}}{{}^{al}l_{x}} \cdot w'_{x+n_1+n'+\frac{1}{2}|x+n_1-\varDelta+n'+\frac{1}{2}} \cdot v^{n_1+\frac{1}{2}},$$

so dass wir endlich den *Barwert der Witwenrente 1 für die erste Ehe des x-jährigen ledigen Aktiven* durch

$$
{}^{al}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|.} = \sum_{0}^{\infty}{}_{n'} \sum_{0}^{\infty}{}_{n_1} \Bigg[v^{n_1+n'+1}\, {}^{1}H_{x+n_1} \frac{{}^{av}l_{x+n_1+n'+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x+n_1-\Delta+n'+1}}{{}^{al}l_x \cdot {}^{av}l_{x+n_1+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x+n_1-\Delta+\frac{1}{2}}}
$$

$$
\times \Big({}^{av}q_{x+n_1+n'+\frac{1}{2}} \cdot {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n_1-\Delta+n'+1}
$$

$$
+ {}^{av}i_{x+n_1+n'+\frac{1}{2}} \cdot {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n_1+n'+1]|x+n_1-\Delta+n'+1} \Big) \Bigg] \qquad (15)
$$

dargestellt erhalten.

Dieser Ausdruck ist einer Umformung fähig. Wir setzen

$$
\frac{{}^{1}H_x}{{}^{av}l_{x+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x-\Delta'+\frac{1}{2}}} = {}^{l}Q_x, \qquad (16)
$$

$$
v^{\frac{1}{2}}\, {}^{av}D_{x+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x-\Delta'+1} \Big({}^{av}q_{x+\frac{1}{2}}\, {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x-\Delta'+1}
$$

$$
+ {}^{av}i_{x+\frac{1}{2}}\, {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+1]|x-\Delta'+1} \Big) = R_x, \qquad (17)
$$

$$
\sum_{x}^{\infty} R_x = \Phi_x, \qquad (18)
$$

wenn wir an Stelle der Altersdifferenz Δ zur Zeit der Eheschliessung die Altersdifferenz Δ' bei den Ehepaaren einführen. Mit diesen Werten geht (15) über in

$$
{}^{al}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x} \sum_{x}^{\infty}{}_{z}\, {}^{l}Q_z\, \Phi_z. \qquad (I)
$$

Hat der Versicherte noch c Karenzjahre zu erfüllen, so stellt sich der Barwert der Witwenrente 1 *für die erste Ehe des x-jährigen ledigen Versicherten* wie folgt dar:

$$
{}_{c|}^{al}\overset{1\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|.}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{1}{{}^{al}D_x}\Big[& {}^{l}Q_x(R_{x+c}+R_{x+c+1}+R_{x+c+2}+R_{x+c+3}+\cdots) \\
& + {}^{l}Q_{x+1}(R_{x+c}+R_{x+c+1}+R_{x+c+2}+R_{x+c+3}+\cdots) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + {}^{l}Q_{x+c}(R_{x+c}+R_{x+c+1}+R_{x+c+2}+R_{x+c+3}+\cdots) \\
& + {}^{l}Q_{x+c+1}(R_{x+c+1}+R_{x+c+2}+R_{x+c+3}+\cdots) \\
& + {}^{l}Q_{x+c+2}(R_{x+c+2}+R_{x+c+3}+R_{x+c+4}+\cdots) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Big]
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir aber

$$
{}_{c|}^{al}\overset{1\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x+c}^{\infty}{}^{z}\,{}^{l}Q_z\Phi_z + \Phi_{x+c}\sum_{x}^{x+c-1}{}^{z}\,{}^{l}Q_z\right]
$$

$$
= \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x+c}^{\infty}{}^{z}\,{}^{l}Q_z\Phi_z + \Phi_{x+c}\left(\sum_{x}^{\infty}{}^{z}\,{}^{l}Q_z - \sum_{x+c}^{\infty}{}^{z}\,{}^{l}Q_z\right)\right] \quad \text{(Ia)}
$$

Ist die Witwenrente *nicht konstant, sondern steigend,* und zwar so, *dass sie im ersten Versicherungsjahr 1, im zweiten Versicherungsjahr 2, im dritten Versicherungsjahr 3 u. s. f. beträgt,* so hat sie für den gedachten Ledigen nachstehenden Barwert *für die erste Ehe:*

$$\overset{<}{{}^{al}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|.}} = \frac{1}{{}^{al}D_x} \sum_x^{\infty} {}^z \left[{}^lQ_z \cdot \sum_z^{\infty} {}^z (z - x + 1) R_z \right]$$

$$= \frac{1}{{}^{al}D_x} \left[\sum_x^{\infty} {}^z\, {}^lQ_z \Psi_z - (x-1) \sum_x^{\infty} {}^z\, {}^lQ_z \Phi_z \right], \qquad \text{(Ib)}$$

wenn

$$\sum_z^{\infty} {}^z\, z R_z = \Psi_z$$

gesetzt wird.

Steigt endlich die soeben behandelte Witwenrente *nur bis zum Betrage k* an, so kommen von den Gliedern unter (1b) bis zu $z = x + k - 1$ in Wegfall

$$\begin{aligned} & {}^lQ_x \,(R_{x+k} + 2\,R_{x+k+1} + 3\,R_{x+k+2} + \ldots) \\ + & {}^lQ_{x+1} \,(R_{x+k} + 2\,R_{x+k+1} + 3\,R_{x+k+2} + \ldots) \\ + & {}^lQ_{x+2} \,(R_{x+k} + 2\,R_{x+k+1} + 3\,R_{x+k+2} + \ldots) \\ + & {}^lQ_{x+3} \,(R_{x+k} + 2\,R_{x+k+1} + 3\,R_{x+k+2} + \ldots) \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = & \sum_x^{x+k-1} {}^lQ_x \times \sum_{x+k}^{\infty} {}^z\, \Phi_z. \qquad (20) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aber endlich *den Barwert der Witwenrente für den x-jährigen aktiven Ledigen, die im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 u. s. f. beträgt, aber nicht höher als bis zu k anwachsen kann*, dargestellt *für die erste Ehe* durch

$$
{}^{al}\overset{<k}{\mathfrak{a}}{}^{1\,(m)}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x}^{x+k-1} {}^{z}\,{}^{l}Q_z \Psi_z - (x-1)\sum_{x}^{x+k-1} {}^{z}\,{}^{l}Q_z \Phi_z \right.
$$

$$
\left. - \sum_{x}^{x+k-1} {}^{z}\,{}^{l}Q_z \times \sum_{x+k}^{\infty} {}^{z}\,\Phi_z + k \sum_{x+k}^{\infty} {}^{z}\,{}^{l}Q_z \Phi_z \right]. \qquad \text{(Ic)}
$$

3. *J. Karup* hat in seiner Schrift: „Die Reform des Beamten-Pensions-Instituts der Mitglieder des Assekuranzvereins von Zuckerfabriken in der österreichisch-ungarischen Monarchie zu Prag, 1898“ für unsere Formeln (I) bis (Ic) etwas andere Ausdrücke angegeben, die, wenn sie auch einfacher erscheinen, nicht rascher zum Ziele führen. Eine direkte Vergleichung der *Karupschen* Formeln mit den hier entwickelten ist nicht möglich, da *Karup* von einer *gemischten* Gesamtheit aktiver und invalider Versicherter ausgeht, was hier absichtlich vermieden worden ist. Endlich tritt in *Karups* Formel für die steigende Witwenrente der Vermehrungsfaktor implizite auf, wodurch sie auf einen speziellen Fall beschränkt bleibt.

4. Wir wenden uns nunmehr der *zweiten* Ehe des x-jährigen ledigen Aktiven zu und suchen den Barwert der aus dieser Ehe hervorgehenden Witwenrente zu ermitteln. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns, dass wir unter (2) die Wahrscheinlichkeit gefunden haben, dass der genannte Aktive innerhalb des Alters von $x + n_2$ bis $x + n_2 + 1$ eine zweite Ehe eingeht. Mit diesem Werte lässt sich aber analog der Schlüsse, die für die erste Ehe zur Anwendung kamen, der Barwert der gesuchten Witwenrente, *wenn sie jährlich 1 beträgt und vorschüssig jährlich in m Raten zu zahlen ist,* sofort wie folgt anschreiben:

$$ {}^{al}\overset{2\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|.} = \sum_{1}^{\infty}{}_{n_2} \sum_{0}^{\infty}{}_{n'} v^{n_2+n'+1} \cdot {}^{2}H_{x+n_2} \tag{21} $$

$$ \times \frac{{}^{av}l_{x+n_2+n'+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x+n_2-\Delta+n'+1}}{{}^{al}l_x \cdot {}^{av}l_{x+n_2+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x+n_2-\Delta+\frac{1}{2}}} \Big({}^{av}q_{x+n_2+n'+\frac{1}{2}} $$

$$ \times {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n_2-\Delta+n'+1} + {}^{av}i_{x+n_2+n'+\frac{1}{2}} \, {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n_2+n'+1]|x+n_2-\Delta+n'+1} \Big). $$

Setzen wir jetzt

$$ \frac{{}^{2}H_x}{{}^{av}l_{x+\frac{1}{2}} \, {}^{v}l_{x-\Delta'+\frac{1}{2}}} = {}^{l}Q'_x, $$

so geht unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen und Schlüsse der Ausdruck (21) über in

$$ {}^{al}\overset{2\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x} \sum_{x+1}^{\infty}{}_{z} \, {}^{l}Q'_z \, \Phi_z. \tag{II} $$

Ebenso folgt aus den bisherigen Ergebnissen leicht, dass der Barwert der Witwenrente für die Ehefrau, die der x-jährige ledige Aktive in *zweiter Ehe* ehelicht, bei vorschüssiger Zahlung jährlich in m Raten beträgt:

a) wenn die Rente $= 1$ und noch c Karenzjahre zu erfüllen sind ($c \geqq 1$):

$$ {}_{c|}{}^{al}\overset{2\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x} \left[\sum_{x+c}^{\infty}{}_{z} \, {}^{l}Q'_z \, \Phi_z + \Phi_{x+c} \left(\sum_{x+1}^{\infty}{}_{z} \, {}^{l}Q'_z - \sum_{x+c}^{\infty}{}_{z} \, {}^{l}Q'_z \right) \right], \tag{IIa} $$

b) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$\overset{<}{{}^{al}\mathfrak{a}^{2(m)}_{x|.}} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x+1}^{\infty}{}_z{}^{l}Q'_z\Psi_z - (x-1)\sum_{x+1}^{\infty}{}_z{}^{l}Q'_z\Phi_z\right], \qquad \text{(IIb)}$$

c) wenn die unter b genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$\overset{<k}{{}^{al}\mathfrak{a}^{2(m)}_{x|.}} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x+1}^{x+k-1}{}_z{}^{l}Q'_z\Psi_z - (x-1)\sum_{x+1}^{x+k-1}{}_z{}^{l}Q'_z\Phi_z\right.$$

$$\left. - \sum_{x+1}^{x+k-1}{}_z{}^{l}Q'_z \times \sum_{x+k}^{\infty}{}_z\Phi_z + k\sum_{x+k}^{\infty}{}_z{}^{l}Q'_z\Phi_z\right]. \qquad \text{(IIc)}$$

5. Es ist leicht einzusehen, wie auf dem hier eingeschlagenen Wege fortgeschritten werden kann, um die Barwerte der Witwenrente zu erhalten, die sich auf die 3., 4. . . . Ehefrau des x-jährigen ledigen Aktiven beziehen. Setzen wir

$$\frac{{}^{3}H_x}{{}^{\dot{a}v}l_{x+\frac{1}{2}}\,{}^{v}l_{x-\Delta'+\frac{1}{2}}} = {}^{l}Q''_x,$$

so ist dieser Barwert in Ansehung der *dritten Ehe* bei vorschüssiger Zahlung jährlich in m Raten

a) wenn die Rente = 1:

$${}^{al}\mathfrak{a}^{3(m)}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\sum_{x+2}^{\infty}{}_z{}^{l}Q''_z\Phi_z, \qquad \text{(III)}$$

b) wenn die Rente = 1 und noch c Karenzjahre zu erfüllen sind ($c \geqq 2$):

$${}^{al}_{c|}\mathfrak{a}^{3(m)}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x+c}^{\infty}{}_z{}^{l}Q''_z\Phi_z + \Phi_{x+c}\left(\sum_{x+2}^{\infty}{}_z{}^{l}Q''_z - \sum_{x+c}^{\infty}{}_z{}^{l}Q''_z\right)\right], \qquad \text{(IIIa)}$$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$\overset{<}{{}^{al}\mathfrak{a}}{}^{3(m)}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x+2}^{\infty}{}_z\,{}^{l}Q''_z\Psi_z - (x-1)\sum_{x+2}^{\infty}{}_z\,{}^{l}Q''_z\Phi_z\right], \quad \text{(III b)}$$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$\overset{<k}{{}^{al}\mathfrak{a}}{}^{3(m)}_{x|.} = \frac{1}{{}^{al}D_x}\left[\sum_{x+2}^{x+k-1}{}_z\,{}^{l}Q''_z\Psi_z - (x-1)\sum_{x+2}^{x+k-1}{}_z\,{}^{l}Q''_z\Phi_z\right.$$

$$\left. - \sum_{x+2}^{x+k-1}{}_z\,{}^{l}Q''_z \times \sum_{x+k}^{\infty}{}_z\Phi_z + k\sum_{x+k}^{\infty}{}_z\,{}^{l}Q''_z\Phi_z\right]. \quad \text{(III c)}$$

Wir unterlassen es, eine Zusammenziehung der Formeln (I), (II), (III) . . . bzw. (Ia), (IIa), (IIIa) . . . usw. — wie dies bei der Anwendung geschehen muss — vorzunehmen, da hierbei neue Gesichtspunkte nicht gewonnen werden, und die wenigen Reduktionen leicht zu erkennen sind, so dass wir unsere Untersuchungen nunmehr auf

die verheirateten Aktiven

erstrecken können.

6. Ist der Aktive x Jahre und seine Ehefrau y Jahre alt, so ist der Barwert der der letzteren zustehenden Witwenrente leicht zu ermitteln, wie später gezeigt werden wird. Hierbei ist es gleichgültig, ob die gedachte Ehefrau Vorgängerinnen gehabt hat, d. h. ob der Aktive mit anderen Frauen vorher verheiratet gewesen ist. Uns

interessieren hier nur die *Nachehen,* die der gedachte Aktive, bevor er invalid wird oder stirbt, noch eingehen kann.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die y-jährige Ehefrau innerhalb des unendlich kleinen Altersintervalles von $y + m + t$ bis $y + m + t + dt$ stirbt oder geschieden wird, ist $d\,{}^{v}l_{y+m+t} : {}^{v}l_{y}$, und dass zu dieser Zeit der x-jährige Aktive noch aktiv und verheiratet ist $= {}^{av}l_{x+m+t} : {}^{av}l_{x}$. Ist weiter ${}^{2}H_{x+n_2,\,y}$ die Anzahl der *ersten Nachehen* der mit y-jährigen Frauen verheirateten ${}^{av}l_{x}$ Aktiven, die im Alter von $x + n_2$ bis $x + n_2 + 1$ geschlossen werden, *so lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass diese Aktiven im Alter von $x + n_2$ bis $x + n_2 + 1$ eine erste Nachehe eingehen*, wie folgt anschreiben:

$$\frac{{}^{2}H_{x+n_2,\,y}}{{}^{av}l_{x}}$$

$$= -\sum_{0}^{n_2-1}{}_{m}\int_{t=0}^{t=1}\frac{{}^{av}l_{x+m+t}\cdot d\,{}^{v}l_{y+m+t}\cdot {}^{aw}l_{[x+m]+n_2-m}}{{}^{av}l_{x}\cdot {}^{v}l_{y}\cdot {}^{aw}l_{[x+m+t]}}$$

$$\times\, {}^{aw}h_{x+n_2,\,n_2-m}\,, \tag{23}$$

wo, wie man leicht bemerkt, n_2 nicht kleiner als 1 genommen werden darf.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der mit einer y-jährigen Ehefrau verheiratete x-jährige Aktive im Alter von $x + n_3$ bis $x + n_3 + 1$ die zweite Nachehe eingeht, lässt sich mit Hilfe der Ausdrücke (3) und (23) wie folgt anschreiben:

$$\frac{{}^{3}H_{x+n_3,\,y}}{{}^{av}l_x} = -\sum\Bigg(\int\limits_{t=0}^{t=1} {}^{2}H_{x+m,\,y}$$

$$\times \frac{{}^{av}l_{x+m+t+m'} \cdot d^{v}l_{x+m-1+t+m'} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{av}l_x \cdot {}^{av}l_{x+m+t}\,{}^{v}l_{x+m-1+t}\;{}^{aw}l_{[x+m+t+m']}}$$

$$\times\, {}^{aw}h_{x+n_3,\,m''}\Bigg). \qquad (24)$$

Hier bezieht sich das Summenzeichen $\sum$, wie in Erinnerung gebracht wird, auf alle in der Klammer () stehenden Ausdrücke, die durch die Variationen der Elemente der drei Reihen

$$\begin{aligned} m &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \\ m' &= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ m'' &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \end{aligned}$$

zur Summe n_3 erhalten werden.

Das Verfahren zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für das Eingehen einer 3., 4. usw. *Nachehe* eines x-jährigen Verheirateten ergibt sich hieraus leicht und bedarf einer weiteren Erörterung nicht.

Wenden wir auf die Formeln (23) und (24) die unter (4) bis (6) angegebenen Substitutionen an, so geht (23) über in

$$\frac{{}^{2}H_{x+n_2,\,y}}{{}^{av}l_x}$$

$$= \sum_{0}^{n_2-1}{}_{m} \frac{{}^{av}l_{x+m} \cdot {}^{v}d'_{y+m} \cdot {}^{aw}l_{[x+m]+n_2-m}}{{}^{av}l_x \cdot {}^{v}l_y\,{}^{aw}l_{[x+m]}}$$

$$\times\, \varphi(q')\,{}^{aw}h_{x+n_2,\,n_2-m}, \qquad (25)$$

während (24) die folgende Gestalt annimmt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{{}^{3}H_{x+n_3,\,y}}{{}^{av}l_x} = \sum {}^{2}H_{x+m,\,y} \cdot \frac{{}^{av}l_{x+m+m'} \cdot {}^{v}d'_{x+m-1+m'}}{{}^{av}l_x \cdot {}^{av}l_{x+m} \cdot {}^{v}l_{x+m-1}} \\
&\qquad \times \frac{{}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{aw}l_{[x+m+m']}}\,\varphi(q')\,{}^{aw}h_{x+n_3,\,m''} \\
&\underline{n_3 = m + m' + m'',} \quad m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad m' = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad m'' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

7. Mit den soeben gefundenen Wahrscheinlichkeitswerten und den unter Ziffer 3 abgeleiteten Formeln (10) bis (14) gelingt es nun, *die Barwerte der Witwenrente für den x-jährigen Aktiven anzuschreiben, der mit einer y-jährigen Frau verheiratet ist.*

Dieser Barwert beträgt für Leistungen *an die gegenwärtige Ehefrau* bei vorschüssiger Zahlung jährlich in m Raten,

a) wenn die Rente konstant = 1 ist:

$$\begin{aligned}
{}^{av}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|y} &= \sum_{0}^{\infty}{}_{n'} \frac{v^{n'+\frac{1}{2}} \cdot {}^{av}l_{x+n'} \cdot {}^{v}l_{y+n'+\frac{1}{2}}}{{}^{av}l_x \cdot {}^{v}l_y} \Big[{}^{av}q_{x+n'} \cdot {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n'+\frac{1}{2}} \\
&\qquad + {}^{av}i_{x+n'} \cdot {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n'+\frac{1}{2}]|y+n'+\frac{1}{2}} \Big] \\
&= \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y} \sum_{x,y}^{\infty} {}^{av}D_x\,{}^{v}l_{y+\frac{1}{2}} \Big[{}^{av}q_x\,{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+\frac{1}{2}} + {}^{av}i_x\,{}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+\frac{1}{2}]|y+\frac{1}{2}} \Big],
\end{aligned}$$

wo die Differenz $x - y$ konstant bleibt. Setzt man der Abkürzung halber

$$v^{\frac{1}{2}}\sum_{x,y}^{\infty}{}^{av}D_x\,{}^{v}l_{y+\frac{1}{2}}\left[{}^{av}q_x\,{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+\frac{1}{2}}+{}^{av}i_x\,{}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+\frac{1}{2}]|y+\frac{1}{2}}\right]=\Phi_{x,y}, \tag{27}$$

so ist endlich

$$^{av}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|y}=\frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\,\Phi_{x,y}, \tag{IV}$$

b) wenn die Rente ebenfalls = 1, aber noch c Karenzjahre zu erfüllen sind:

$$_{c|}^{av}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|y}=\frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\,\Phi_{x+c,\,y+c}, \tag{IVa}$$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$^{av}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{1\,(m)}_{x|y}=\frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\sum_{x,y}^{\infty}\Phi_{x,y}, \tag{IVb}$$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$^{av}\overset{<k}{\mathfrak{a}}{}^{1\,(m)}_{x|y}=\frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\left(\sum_{x,y}^{\infty}\Phi_{x,y}-\sum_{x,y}^{\infty}\Phi_{x+k,\,y+k}\right). \tag{IVc}$$

8. Die Witwenrente 1 *für die erste Nachehe eines x-jährigen Aktiven, der mit einer y-jährigen Frau verheiratet ist,* ergibt sich, wenn wir in Formel (21) anstatt

$$\frac{{}^{2}H_{x+n_2}}{{}^{al}l_x}\quad\text{den Ausdruck}\quad\frac{{}^{2}H_{x+n_2,\,y}}{{}^{av}l_x}$$

aus (25) einführen. Damit erhalten wir, wiederum vorschüssige Zahlung jährlich in m Raten vorausgesetzt,

$$
{}^{av}\overset{2\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|y} = \sum_{1}^{\infty}{}_{n_2} \sum_{0}^{\infty}{}_{n'} v^{n_2+n'+1} \cdot {}^{2}H_{x+n_2,\,y}
$$

$$
\times \frac{{}^{av}l_{x+n_2+n'+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x+n_2-\Delta+n'+1}}{{}^{av}l_{x} \cdot {}^{av}l_{x+n_2+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{x+n_2-\Delta+\frac{1}{2}}}
$$

$$
\times \Big({}^{av}q_{x+n_2+n'+\frac{1}{2}} \cdot {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n_2-\Delta+n'+1}
$$

$$
+ {}^{av}i_{x+n_2+n'+\frac{1}{2}} \; {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n_2+n'+1]|x+n_2-\Delta+n'+1} \Big).
$$

Setzen wir

$$
\frac{{}^{2}H_{x,\,y}}{{}^{av}l_{x+\frac{1}{2}}\,{}^{v}l_{x-\Delta'+\frac{1}{2}}} = {}^{v}Q_{x},
$$

so geht obiger Ausdruck unter Beibehaltung der Bezeichnung unter (17) und (18) über in

$$
{}^{av}\overset{2\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_{x}} \sum_{x+1}^{\infty}{}_{z}\, {}^{v}Q_{z}\, \Phi_{z}. \tag{V}
$$

Aus dieser Formel leiten wir in Verfolgung des bisher eingeschlagenen Weges weiter die Barwerte derselben Witwenrente ab, die sich *für die erste Nachehe* ergeben,

a) wenn die Rente $=1$ und der Versicherte noch c Karenzjahre zu erfüllen hat ($c \geq 1$):

$$
{}^{av}_{c|}\overset{2\,(m)}{\mathfrak{a}}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_{x}} \left[\sum_{x+c}^{\infty}{}_{z}\, {}^{v}Q_{z}\, \Phi_{z} + \Phi_{x+c} \Big(\sum_{x+1}^{\infty}{}_{z}\, {}^{v}Q_{z} - \sum_{x+c}^{\infty}{}_{z}\, {}^{v}Q_{z} \Big) \right], \tag{Va}
$$

b) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$ {}^{av}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{2\,(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x}\left[\sum_{x+1}^{\infty}{}_z\,{}^{v}Q_z\,\Psi_z - (x-1)\sum_{x+1}^{\infty}{}_z\,{}^{v}Q_z\,\Phi_z\right], \quad (\mathrm{V\,b}) $$

c) wenn die unter b genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$ {}^{av}\overset{<k}{\mathfrak{a}}{}^{2\,(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x}\left[\sum_{x+1}^{x+k-1}{}_z\,{}^{v}Q_z\,\Psi_z - (x-1)\sum_{x+1}^{x+k-1}{}_z\,{}^{v}Q_z\,\Phi_z\right. $$

$$ \left. - \sum_{x+1}^{x+k-1}{}_z\,{}^{v}Q_z \times \sum_{x+k}^{\infty}{}_z\,\Phi_z + k\sum_{x+k}^{\infty}{}_z\,{}^{v}Q_z\,\Phi_z\right]. \quad (\mathrm{V\,c}) $$

9. Es bedarf nach dem Vorausgegangenen kaum eines Beweises, dass die unter (V) bis (Vc) abgeleiteten Formeln auch für den Fall gelten, dass es sich um die *zweite Nachehe* des in Frage stehenden Verheirateten handelt, wenn an Stelle von ${}^{v}Q_x$

$$ \frac{{}^{3}H_{x,\,y}}{{}^{av}l_{x+\frac{1}{2}}\;{}^{v}l_{x-1'+\frac{1}{2}}} = {}^{v}Q'_x $$

gesetzt und durchgängig für die untere Grenze $x+1$ der Wert $x+2$ genommen wird.

Wir erhalten also als *Barwert der jährlich vorschüssig in m Raten zu zahlenden Witwenrente, die sich aus der* **zweiten Nachehe** *eines x-jährigen Aktiven herleitet, der mit einer y-jährigen Frau verheiratet ist,*

a) wenn die Rente = 1:

$$ {}^{av}\mathfrak{a}^{3\,(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x} \sum_{x+2}^{\infty} {}^{v}Q'_z \Phi_z, \qquad \text{(VI)} $$

b) wenn die Rente ebenfalls = 1, aber noch c Karenzjahre zu erfüllen sind ($c \geqq 2$):

$$ {}_{c|}{}^{av}\mathfrak{a}^{3\,(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x} \left[\sum_{x+c}^{\infty} {}^{v}Q'_z \Phi_z + \Phi_{x+c} \left(\sum_{x+2}^{\infty} {}^{v}Q'_z - \sum_{x+c}^{\infty} {}^{v}Q'_z \right) \right], \qquad \text{(VIa)} $$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$ {}^{av}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{3\,(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x} \left[\sum_{x+2}^{\infty} {}^{v}Q'_z \Psi_z - (x-1) \sum_{x+2}^{\infty} {}^{v}Q'_z \Phi_z \right], \qquad \text{(VIb)} $$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zu dem Betrage k anwachsen kann:

$$ {}^{av}\overset{<k}{\mathfrak{a}}{}^{3\,(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x} \left[\sum_{x+2}^{x+k-1} {}^{v}Q'_z \Psi_z - (x-1) \sum_{x+2}^{x+k-1} {}^{v}Q'_z \Phi_z \right. \qquad \text{(VIc)} $$

$$ \left. - \sum_{x+2}^{x+k-1} {}^{v}Q'_z \times \sum_{x+k}^{\infty} \Phi_z + k \sum_{x+k}^{\infty} {}^{v}Q'_z \Phi_z \right]. $$

Wie zu verfahren ist, die Barwerte der Witwenrente für die 3., 4. usw. *Nachehe* des hier betrachteten verheirateten Aktiven zu ermitteln, ergibt sich aus dem Vorstehenden leicht, so dass ein Eingehen hierauf überflüssig erscheint.

10. Als letzte Gesamtheit der Aktiven, für die wir die Barwerte der Witwenrente zu ermitteln haben, verbleiben

die Witwer.

Es ist unschwer zu erkennen, dass die hierfür aufzustellenden Formeln nur in einem einzigen Faktor von denen der ledigen Aktiven abweichen werden. Dieser Faktor ist die Wahrscheinlichkeit, dass der x-jährige Witwer aus der Gesamtheit der Aktiven im Alter von $x + n_1$ bis $x + n_1 + 1$ die *erste Nachehe,* im Alter von $x + n_2$ bis $x + n_2 + 1$ die *zweite Nachehe* usf. eingeht. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber, *wenn der Versicherte bereits x_1 Jahre Witwer* ist, und sogleich die Formeln (8) und (9) herangezogen werden,

im *ersteren* Falle

$$\frac{{}^{1}H'_{x+n_1}}{{}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1}} = \frac{{}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1+n_1}}{{}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1}} \cdot {}^{aw}h_{x+n_1,\, x_1+n_1}, \quad (28)$$

im *zweiten* Falle

$$\left.\begin{aligned} &\frac{{}^{2}H'_{x+n_2}}{{}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1}} \\ &= \sum {}^{1}H'_{x+m} \frac{{}^{av}l_{x+m+m'} \cdot {}^{v}d'_{x+m-1+m'} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1} \cdot {}^{av}l_{x+m} \cdot {}^{v}l_{x+m-1} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']}} \\ &\times \varphi(q')\, {}^{aw}h_{x+n_2,\, m''} \\ &\underline{n_2 = m + m' + m'',} \\ &m\ \ = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ &m'\ = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ &m'' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

im *dritten* Falle, d. h. für die dritte Nachehe,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{{}^3H'_{x+n_3}}{{}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1}} \\ = \sum {}^2H'_{x+m} \dfrac{{}^{av}l_{x+m+m'} \cdot {}^{v}d'_{x+m-\varDelta+m'} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']+m''}}{{}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1} \cdot {}^{av}l_{x+m} \cdot {}^{v}l_{x+m-\varDelta} \cdot {}^{aw}l_{[x+m+m']}} \\ \times \varphi(q') \, {}^{aw}h_{x+n_3, m''} \\ \underline{n_3 = m + m' + m'',} \\ m \;\; = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \\ m' \;= 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \\ m'' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \end{array}\right\} \quad (30)$$

usw.

Setzen wir jetzt

und

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{{}^1H'_x}{{}^{av}l_{x+\frac{1}{2}} \, {}^{v}l_{x-\varDelta'+\frac{1}{2}}} = {}^{w}Q_x, \\ \dfrac{{}^2H'_x}{{}^{av}l_{x+\frac{1}{2}} \, {}^{v}l_{x-\varDelta'+\frac{1}{2}}} = {}^{w}Q'_x \\ \dfrac{{}^3H'_x}{{}^{av}l_{x+\frac{1}{2}} \, {}^{v}l_{x-\varDelta'+\frac{1}{2}}} = {}^{w}Q''_x \end{array}\right\} \quad (31)$$

und führen diese Werte für ${}^{l}Q_x$, ${}^{l}Q'_x$, ${}^{l}Q''_x \ldots$ in die Formeln (I), (Ia) ... (II), (IIa) ... (III), (IIIa) ... ein, wobei wir uns zu erinnern haben, dass sie sämtlich von der Dauer der Witwerschaft x_1 abhängig sind, so erhalten wir als *Barwert der Rente, die der Witwe* *eines x-jährigen aktiven Witwers, der x_1 Jahre bereits im Witwerstande lebt, zusteht und jährlich vorschüssig in m Raten bezahlt wird,* folgende Ausdrücke:

α. **wegen der ersten Nachehe:**

a) wenn die Rente = 1:

$$ {}^{aw}\overset{1}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x|.\\x_1|}} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \sum_{x}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}Q_z\,\Phi_z, \qquad \text{(VII)} $$

b) wenn die Rente ebenfalls = 1, aber noch c Karenzjahre zu erfüllen sind:

$$ {}^{aw}_{c|}\overset{1}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x|.\\x_1|}} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x+c}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}Q_z\,\Phi_z + \Phi_{x+c}\left(\sum_{x}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}Q_z - \sum_{x+c}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}Q_z \right) \right] \qquad \text{(VIIa)} $$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$ {}^{aw}\overset{<}{\overset{1}{\mathfrak{a}}}{}^{(m)}_{\substack{x|.\\x_1|}} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}Q_z\,\Psi_z - (x-1) \sum_{x}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}Q_z\,\Phi_z \right], \qquad \text{(VIIb)} $$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$ {}^{aw}\overset{<k}{\overset{1}{\mathfrak{a}}}{}^{(m)}_{\substack{x|.\\x_1|}} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x}^{x+k-1}{}_{z}\,{}^{w}Q_z\,\Psi_z - (x-1) \sum_{x}^{x+k-1}{}_{z}\,{}^{w}Q_z\,\Phi_z \right. $$

$$ \left. - \sum_{x}^{x+k-1}{}_{z}\,{}^{w}Q_z \times \sum_{x+k}^{\infty}{}_{z}\,\Phi_z + k \sum_{x+k}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}Q_z\,\Phi_z \right]; \qquad \text{(VIIc)} $$

β. wegen der zweiten Nachehe:

a) wenn die Rente = 1:

$$ {}^{aw}\overset{2}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\ x_1}\Big|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \sum_{x+1}^{\infty} {}^{w}Q'_z \, \Phi_z , \qquad \text{(VIII)} $$

b) wenn die Rente ebenfalls = 1, aber noch c Karenzjahre zu erfüllen sind ($c \geqq 1$):

(VIIIa)

$$ {}^{aw}_{c|}\overset{2}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\ x_1}\Big|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x+c}^{\infty} {}^{w}Q'_z \, \Phi_z + \Phi_{x+c} \left(\sum_{x+1}^{\infty} {}^{w}Q'_z - \sum_{x+c}^{\infty} {}^{w}Q'_z \right) \right] $$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

(VIIIb)

$$ {}^{aw}\overset{\overset{<}{2}}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\ x_1}\Big|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x+1}^{\infty} {}^{w}Q'_z \, \Psi_z - (x-1) \sum_{x+1}^{\infty} {}^{w}Q'_z \, \Phi_z \right], $$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

(VIIIc)

$$ {}^{aw}\overset{\overset{<k}{2}}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\ x_1}\Big|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x+1}^{x+k-1} {}^{w}Q'_z \, \Psi_z - (x-1) \sum_{x+1}^{x+k-1} {}^{w}Q'_z \, \Phi_z \right. $$

$$ \left. - \sum_{x+1}^{x+k-1} {}^{w}Q'_z \times \sum_{x+k}^{\infty} \Phi_z + k \sum_{x+k}^{\infty} {}^{w}Q'_z \, \Phi_z \right]; $$

γ. wegen der dritten Nachehe:

a) wenn die Rente = 1:

$$ {}^{aw}\overset{3}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\ x_1}\Big|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \sum_{x+2}^{\infty} {}^{w}Q''_z \, \Phi_z \qquad \text{(IX)} $$

b) wenn die Rente = 1 und noch c Karenzjahre zu erfüllen sind ($c \geqq 2$):

(IXa)

$$ {}^{aw}_{c|}\overset{3}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\x_1}|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x+c}^{\infty}{}^{w}Q''_z\,\Phi_z + \Phi_{x+c}\left(\sum_{x+2}^{\infty}{}^{w}Q''_z - \sum_{x+c}^{\infty}{}^{w}Q''_z \right) \right] $$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

(IXb)

$$ {}^{aw}\overset{\overset{<}{3}}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\x_1}|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x+2}^{\infty}{}^{w}Q''_z\,\Psi_z - (x-1)\sum_{x+2}^{\infty}{}^{w}Q''_z\,\Phi_z \right] $$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

(IXc)

$$ {}^{aw}\overset{\overset{<\,k}{3}}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\x_1}|} = \frac{1}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \left[\sum_{x+2}^{x+k-1}{}^{w}Q''_z\,\Psi_z - (x-1)\sum_{x+2}^{x+k-1}{}^{w}Q''_z\,\Phi_z \right. $$

$$ \left. - \sum_{x+2}^{x+k-1}{}^{w}Q''_z \times \sum_{x+k}^{\infty}\Phi_z + k\sum_{x+k}^{\infty}{}^{w}Q''_z\,\Phi_z \right]. $$

10. Überblicken wir die Formeln, die wir hier nach der Individualmethode für die soziale Witwenversicherung einer aktiven Gesamtheit abgeleitet haben, und vergegenwärtigen wir uns die ungeheure Summe von Arbeit, die nur allein nötig zur Bestimmung der Werte ${}^{l}Q_z$ .. ${}^{v}Q_z$ .. ${}^{w}Q_z$ .. ${}^{w}Q''_z$ ist, die **sämtlich Funktionen vom Lebensalter x sind,** so werden wohl nur wenige Versicherungsmathematiker den Mut haben, diese Methode in der hier erstmalig durchgeführten Strenge zur Anwendung zu bringen. Selbst wenn von *Lubbocks* Summenformel (Siehe Text-Book, Chap. XXIV, Art. 24) in weitgehendster Weise Gebrauch

gemacht wird, überschreitet die verbleibende Rechenarbeit doch noch das für die Praxis erträgliche Mass.

So grosse Vorzüge die Individualmethode gegenüber der später zu behandelnden Kollektivmethode hat, so ist sie doch der letzteren insofern unterlegen, als sie bei der Anwendung in Ansehung der Nachehen nicht mehr zwingend objektiv verbleibt, sondern die Anzahl der zu berücksichtigenden Nachehen dem Mathematiker überlassen ist. *J. Karup* begnügt sich mit einer einzigen Nachehe, und doch sind die Fälle nicht selten, wo ein Aktiver mit der *dritten* oder *vierten* Ehefrau zusammenlebt. In vielen, wenn nicht in den meisten Fällen, wo bisher die Individualmethode zur Anwendung gekommen ist, wie bei *Kaan* [1], *Grossmann* [2] u. a., ist aber von Berücksichtigung der Nachehen überhaupt *abgesehen* worden. Dass in diesen Fällen eine *Unterschätzung* der Lasten der sozialen Witwenversicherung stattfindet, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden, diese Erkenntnis drängt sich ohne weiteres auf. Unbekannt bleibt nur die Grösse des Fehlers, die Höhe der *Unterschätzung*. Hierüber Untersuchungen anzustellen, ist bei der heutigen Ausbreitung der sozialen Witwenversicherung ein dringendes Bedürfnis, dem möglichst weitgehend zu entsprechen, der Versicherungswissenschaft obliegt. Die vorstehenden Entwicklungen sollen den Weg vorzeichnen, der zu diesem Zwecke eingeschlagen werden kann.

B. Die invalide Gesamtheit und die Witwen.

1. Die Renten, die bei der Sozialversicherung die Witwen der *Invaliden* zu beanspruchen haben, sind

[1]) Anleitung zur Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien, Wien 1888.

[2]) Versicherungsmathematik, 1902 (Sammlung Schubert).

einfache Überlebensrenten, deren Berechnungsweise aus jedem Lehrbuche der Lebensversicherungswissenschaft, das auf doppelt abgestufte Sterbetafeln Rücksicht nimmt, entnommen werden könnte, wenn nicht die Wiederverheiratung der Witwen eine Abänderung dieser Formeln bedingte. Wir haben uns bereits Seite 29 mit diesen Überlebensrenten beschäftigt; allein dabei nur den Fall ins Auge gefasst, wo ein Ehepaar in Frage kommt, dessen Ehemann soeben in die Invalidität eingetreten ist. Wir müssen hier den Kreis weiter fassen und allgemein ein Ehepaar betrachten, wo der Mann $(x + x_1)$ Jahre alt ist, davon die letzteren x_1 Jahre im Zustande der Invalidität verbracht hat und gegenwärtig mit einer y-jährigen Frau verheiratet ist, die Anspruch auf Witwenrente besitzt.

Der Barwert der Rente 1, die dieser Ehefrau jährlich in m Raten vorschüssig vom Tode ihres Ehemannes ab zu zahlen ist, lässt sich nach (14) leicht anschreiben. Wir haben für $[z]$ zu setzen $[x] + x_1$ und finden damit

$$^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x]+x_1|y}$$

$$= \frac{1}{{}^{i}l_{[x]+x_1}\;{}^{v}D_y} \sum_0^\infty {}_n^i d_{[x]+x_1+n}\;{}^{v}D_{y+n+\frac{1}{2}}\;{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y+n+\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

2. Die Barwerte der Renten 1, die den *bereits vorhandenen y-jährigen Witwen* bis zu ihrem Tode oder bis zu ihrer Wiederverheiratung jährlich in m Raten zustehen und vorschüssig zu zahlen sind, werden durch

$$^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{y}$$

dargestellt. Auf diesem Ausdrucke bauen sich alle anderen Barwerte der Witwenversicherung auf, wie unsere bisherigen Entwicklungen dargetan haben.

Zur Berechnung dieses Wertes führen verschiedene Wege. Wir wollen folgenden einschlagen. Bekanntlich ist

$$^{w}\mathfrak{a}_{y} = \frac{\Sigma\, {}^{w}l_{y}\, v^{y}}{{}^{w}l_{y}\, v^{y}} = \frac{\Sigma\, {}^{w}D_{y}}{{}^{w}D_{y}} = \frac{{}^{w}N_{y-1}}{{}^{w}D_{y}}.$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir die bekannte *Eulersche* Summenformel an, nach der wir (Text-Book, Part. II, Seite 171) anschreiben können:

$$^{w}\mathfrak{a}_{y}^{(m)} = {}^{w}\mathfrak{a}_{y} - \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{12m^2} \cdot \frac{1}{{}^{w}D_{y}} \cdot \frac{d\,{}^{w}D_{y}}{dy} - \ldots$$

Nun ist aber in unserem Falle

$$\frac{1}{{}^{w}D_{y}} \cdot \frac{d\,{}^{w}D_{y}}{dy} = \frac{d \log n\, {}^{w}D_{y}}{dy} = \frac{d \log n \cdot {}^{w}l_{y}}{dy} + \frac{d \log n \cdot v^{y}}{dy}$$

$$= \frac{1}{{}^{w}l_{y}} \cdot \frac{d\,{}^{w}l_{y}}{dy} + \frac{1}{v^{y}} \cdot \frac{d\,v^{y}}{dy}$$

$$= -\left({}^{w}\mu_{y} + \delta\right),$$

so dass wir erhalten

$$^{w}\mathfrak{a}_{y}^{(m)} = {}^{w}\mathfrak{a}_{y} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left({}^{w}\mu_{y} + \delta\right), \qquad (33)$$

was der Vollständigkeit halber hier noch angegeben wird.

III. Die Barwerte der sozialen Witwenrente nach der Kollektivmethode.

A. Die aktive Gesamtheit.

1. Im Vergleich zu der vorstehend behandelten Individual-Methode stellt sich die Kollektiv-Methode als ein sehr einfacher und bequemer Weg zur Ermittlung des Barwertes der von uns unter I festgelegten Witwenrente dar. Der Versicherte wird nur nach seinem Lebensalter bewertet. Ob er ledig, verheiratet oder verwitwet ist, bleibt unerörtert. Es finden nur Erhebungen statt, ob er *beim Eintritt in die Invalidität* oder *bei seinem Tode* als *Aktiver* eine Ehefrau besitzt und von welchem Alter sie ist. Beantwortet wird dies durch die Wahrscheinlichkeiten,

a) dass der Aktive, der im Alter von x Jahren invalid wird oder stirbt, zu dieser Zeit eine Ehefrau besitzt $= h'_x$, (Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins) und

b) dass diese Ehefrau $\varDelta$ Jahre jünger als ihr Ehemann ist $= \lambda_{x,\varDelta}$ mit der Massgabe, dass $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{\varDelta}\lambda_{x,\varDelta} = 1.$

Das Material zur Berechnung beider Wahrscheinlichkeiten lässt sich aus der in Frage kommenden Gesamtheit, d. h., wenn sie umfänglich genug ist, durch Ermittlung der vorhandenen Ehepaare bei Angabe des Alters von Mann und Frau leicht gewinnen, aber auch aus der Vergangenheit derselben Gesamtheit herleiten, wenn Aufzeichnungen mit Altersangaben vorliegen über Jahresbestände, über Zu- und Abgänge und über die Anzahl der Ehefrauen, die beim Eintritte von Invaliditäts- und Todesfällen vorhanden gewesen sind. Wir kommen auf diesen Gegenstand später noch einmal zurück.

Von den und an Stelle der unter II aufgestellten *sechs* Ausscheidetafeln bedarf die Kollektiv-Methode nur der drei folgenden, nämlich

$$^{a}l_{x},\ ^{w}l_{y} \text{ und } ^{i}l_{[x]+x_1}.$$

Ist schon hierin eine ausserordentliche Erleichterung zu erblicken, so fällt besonders schwer ins Gewicht, dass keinerlei Erörterungen über Nachehen vorzunehmen sind, die die Individual-Methode mit einer erdrückenden Arbeitslast beschweren und ihre restlose Anwendung in den meisten Fällen undurchführbar erscheinen lassen.

2. Um nach der Kollektivmethode den Barwert der uns vorgelegten Witwenrente für den x-jährigen Aktiven zu bestimmen, greifen wir auf Gleichung (12) zurück. Diese Gleichung, die den gesuchten Barwert für die Rente $= 1$ darstellt und sich auf das Altersintervall eines Jahres bezieht, geht in unserem Falle über in

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\Delta}\frac{v^n}{^{a}l_x}\int_0^1 {}^{a}l_{x+n+t}\cdot h'_{x+n+t}\cdot\lambda_{x+n+t,\,\Delta}\Big({}^{a}\mu_{x+n+t}\,{}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+t-\Delta}$$
$$+\,{}^{a}\nu_{x+n+t}\,{}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n+t]\,|x+n+t-\Delta}\Big)v^t dt.$$

Lassen wir für diesen Ausdruck dieselben Gesichtspunkte gelten, die uns zu Gleichung (13) führten, *so beträgt der Barwert der Witwenrente 1, die jährlich vorschüssig in m Raten zu zahlen ist, für den x-jährigen Aktiven*

$$\mathfrak{a}_x^{(m)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\Delta} \frac{1}{{}^{a}l_x} \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, {}^{a}l_{x+n}\, h'_{x+n+\frac{1}{2}}\, \lambda_{x+n+\frac{1}{2},\, \Delta}$$

$$\times \left({}^{a}q_{x+n}\; {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+\frac{1}{2}-\Delta} + {}^{a}i_{x+n}\; {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n+\frac{1}{2}]|x+n+\frac{1}{2}-\Delta}\right) v^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{a}D_x} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\Delta} \sum_{x}^{\infty}{}^{x}\, {}^{a}D_x\, h'_{x+\frac{1}{2}}\, \lambda_{x+\frac{1}{2},\, \Delta} \left({}^{a}q_x\; {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{2}-\Delta}\right.$$

$$\left. + {}^{a}i_x\; {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+\frac{1}{2}]|x+\frac{1}{2}-\Delta}\right). \qquad (34)$$

Wird der Einfachheit halber

$$v^{\frac{1}{2}} \sum_{x}^{\infty}{}^{x}\, {}^{a}D_x\, h'_{x+\frac{1}{2}}\, \lambda_{x+\frac{1}{2},\, \Delta} \left({}^{a}q_x\; {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{2}-\Delta}\right.$$

$$\left. + {}^{a}i_x\; {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+\frac{1}{2}]|x+\frac{1}{2}-\Delta}\right) = \Pi_{x,\, \Delta}$$

gesetzt, so erhalten wir

$$\mathfrak{a}_x^{(m)} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\Delta}\, \Pi_{x,\, \Delta}\,. \qquad (X)$$

Hieraus folgen nun leicht die Barwerte derselben Witwenrente,

a) wenn die Rente dieselbe Höhe = 1 besitzt, aber von der Erfüllung von noch c Karenzjahren abhängt:

$${}_{c|}\mathfrak{a}_x^{(m)} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\Delta}\, \Pi_{x+c,\, \Delta}\,, \qquad (Xa)$$

b) wenn die Rente *im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjare 3 usf. beträgt:*

$$\overset{<(m)}{\mathfrak{a}_x} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\varDelta} \sum_{x}^{\infty} {}^{x} \Pi_{x,\varDelta}, \qquad \text{(Xb)}$$

c) wenn die unter b genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$\overset{<k}{\mathfrak{a}_x^{(m)}} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\varDelta} \left(\sum_{x}^{\infty} {}^{x} \Pi_{x,\varDelta} - \sum_{x+k}^{\infty} {}^{x} \Pi_{x,\varDelta} \right). \qquad \text{(Xc)}$$

3. Selten wird man die Rechnung für alle Werte von $\varDelta$ durchführen können, da hinreichendes Material zur Berechnung *aller* $\lambda_{x,\varDelta}$ noch fehlt. *R. Leubin* hat sich die grosse Mühe gegeben, in seiner „Versicherungstechnischen Orientierung", Bern, 1903, das fragliche Material für die schweizerischen Bundesbahnen zu ermitteln. Es ist in Tabelle II der genannten Schrift enthalten und umfasst 11 707 Beobachtungen, die leider noch nicht genügen, alle Werte von $\lambda_{x,\varDelta}$ so einwandfrei zu bestimmen, um den grossen Rechenapparat, der durch $\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\varDelta}$ bedingt wird, zur Anwendung zu bringen. Wohl aber sind die daselbst angegebenen Beobachtungen sehr wertvoll, um $\varDelta'$, d. h. die mittlere Altersdifferenz zwischen Mann und Frau vorhandener Ehepaare zu bestimmen.

Mit dieser *mittleren Altersdifferenz als abhängig vom Alter x des Ehemannes* rechnen auch fast alle Versicherungsmathematiker, die sich mit der sozialen Witwenversicherung beschäftigt haben. Wir finden sie erstmalig bei *Behm* in dem Gutachten, das er zu dem Entwurfe eines Gesetzes, betreffend die Unfallversicherung der Arbeiter im Deutschen Reiche, im

Jahre 1883 bearbeitet hat. Bis dahin hatte man sich, wie *Behm* bemerkt, immer mit einer *konstanten* mittleren Altersdifferenz begnügt. Einzelne Autoren haben dies auch noch später getan wie z. B. *Rohde* in seiner Kongressschrift: „Selbständige und unselbständige Witwen- und Waisenversicherung" im II. Bande der Berichte, Denkschriften und Verhandlungen des 5. Internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft zu Berlin, 1906, Seite 17. Dass dies angesichts der von *Behm* in dem fraglichen Gutachten und der von *R. Leubin* in der gedachten Orientierung veröffentlichten Beobachtungen, sowie der von mir für die Bevölkerung des Königreichs Sachsen ermittelten Altersdifferenzen der Eheschliessenden [1]) *unzulässig* ist, bedarf keiner weiteren Ausführung.

4. Benützen wir ebenfalls bei Anwendung der Kollektivmethode die *mittlere Altersdifferenz,* so vereinfachen sich unsere Formeln (X) bis (Xc) ganz wesentlich, und wir finden als *Barwert der vorschüssigen, jährlich in m Raten zu zahlenden Witwenrente für den x-jährigen Aktiven*

a) wenn die Rente = 1:

$$\mathfrak{a}_x^{(m)} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \Pi'_x, \qquad \text{(XI)}$$

b) wenn die Rente ebenfalls = 1, aber noch c Karenzjahre zu erfüllen sind:

$$_{c|}\mathfrak{a}_x^{(m)} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \Pi'_{x+c}, \qquad \text{(XIa)}$$

---

[1]) Die Eheschliessungen im Königreiche Sachsen. Zeitschrift des Königl. Sächs. Statistischen Bureaus, 1885.

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$\overset{<}{\mathfrak{a}}{}_x^{(m)} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \sum_x^{\infty} {}^{x}\Pi'_x \,, \tag{XIb}$$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$\overset{<}{\mathfrak{a}}{}_x^{k(m)} = \frac{1}{{}^{a}D_x} \Big(\sum_x^{\infty} {}^{x}\Pi'_x - \sum_{x+k}^{\infty} {}^{x}\Pi'_x \Big), \tag{XIc}$$

wo

$$\Pi'_x = v^{\frac{1}{2}} \sum_x^{\infty} {}^{x\,a}D_x \, h'_{x+\frac{1}{2}} \Big({}^{a}q_x \, {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+\frac{1}{2}-\Delta'} + {}^{a}i_x \, {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+\frac{1}{2}]|x+\frac{1}{2}-\Delta'} \Big)$$

zu nehmen ist, und die frühere Abhängigkeit Δ' von x besteht.

5. Vergleicht man die Formeln (X) bis (Xc) mit den Ausdrücken, die *Schærtlin* [1]) und *R. Leubin* [2]) angegeben haben, so bemerkt man, wenn von der abweichenden Darstellung und Zeichensprache abgesehen wird, vollständige Übereinstimmung mit denen des letzteren, während die entsprechenden Ausdrücke *Schærtlins* insofern abweichen, als ihnen die Annahme zugrunde liegt, dass die vorschüssige Rente erst *nach* Ablauf des Todesjahres zu laufen beginnt.

---

[1]) Die indirekte Methode zur Berechnung der Anwartschaft auf Witwenrente von Dr. G. Schærtlin. Zeitschrift für die schweizerische Statistik, 14. Jahrgang.

[2]) Versicherungstechnische Orientierung von R. Leubin, Bern, 1903.

Auf gleichen oder ähnlichen Annahmen über die Zahlungen im Todesjahre sowie auf anders gearteten Voraussetzungen beruhen die Abweichungen, die die Formeln von *Behm* [1]), *Meyer* [2]) u. a. gegenüber (XI) bis (XIc) zeigen, auf die hier näher einzugehen zu weit führen würde.

Wichtiger ist, sich Rechenschaft zu geben, ob die Anhänger und Verfechter der Individual-Methode recht haben, wenn sie die Kollektivmethode als unwissenschaftlich oder doch mindestens als gegen eine der elementarsten Anforderungen der Versicherungswissenschaft verstossend verwerfen. Der Versicherer hat bei Aufstellung der Bilanz die Pflicht, das Risiko, das mit den Versicherungsobjekten verbunden ist, nach *Möglichkeit* erschöpfend festzustellen und zu bewerten. Das geschieht allerdings bei Anwendung der Kollektivmethode *nicht,* und deshalb sind die Einwendungen gegen diese Methode nicht kurzerhand als unberechtigt zurück zu weisen, wie dies hie und da geschieht.

Es ist — vom Standpunkte der Theorie aus beurteilt — eine Vernachlässigung, dass bei der Kollektivmethode der Versicherte *nur* nach seinem Alter gefragt wird, und nicht noch, ob er ledig, verheiratet oder verwitwet ist, da er selbstverständlich über alle diese Fragen, von deren Beantwortung der Barwert seiner Witwenrente sehr wesentlich mit abhängt, Auskunft geben kann. Namentlich ist ferner bei Verheirateten zu beanstanden, dass das Alter der Frau, das doch ebenso leicht wie der Zivilstand des Versicherten zu ermitteln ist, ausser Berücksichtigung bleibt.

---

1) Behm, Gutachten zum Entwurfe des Unfallversicherungsgesetzes, 1883.

2) Dr. Hugo Meyer, Beiträge zur Pensionsversicherung, Jena, 1903.

6. Wie einschneidend alle diese Verhältnisse auf den Barwert der versicherten Witwenrente sind, ergibt sich aus Untersuchungen, die der Verfasser in seinem Buche: „Die Witwen- und Waisenversicherung usw.“, Berlin, 1910 für die Bergleute Sachsens durchgeführt hat. Nach der *Kollektivmethode* ist z. B. der Barwert der Witwenrente 1 für einen 60-jährigen sächsischen aktiven Bergmann

3,904;

er kann aber nach der dort angewandten *Kombinations-Methode,* auf die wir im Abschnitt IV zu sprechen kommen werden, betragen:

7,444,	wenn	die	Ehefrau	40	Jahre	alt	ist,
5,850,	„	„	„	50	„	„	„,
4,031,	„	„	„	60	„	„	„,
2,346,	„	„	„	70	„	„	„ und
0,074,	„	der Aktive unverheiratet ist.					

Diese Zahlen illustrieren das Bedenkliche, bei Aufstellung der Bilanz sich der Kollektivmethode zu bedienen, recht augenfällig und geben denen recht, die diese Methode bekämpfen und die Unsicherheit ihrer Ergebnisse für genau so gross halten, wie sie eintreten würde, wenn man die Barwerte aller einer gemischtalterigen Gesamtheit zustehenden Leibrenten unter Zugrundelegung eines einzigen Durchschnittsalters berechnen wollte.

7. Wenn die Kollektivmethode, abgesehen von ganz wenig Ausnahmen, trotzdem allgemein zur Anwendung gekommen ist, so beruht dies nicht allein auf den verhältnismässig einfachen Rechenoperationen, die mit ihr verbunden sind und der leicht festzustellenden Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins, sondern auch auf dem Umstande, dass sie bei Er-

mittlung der **Prämie** *für die soziale Witwenrente* durch keine andere Methode ersetzt oder doch in der Zuverlässigkeit ihrer Ergebnisse übertroffen werden kann. Die Prämie für die in Rede stehende Rente bleibt bekanntlich dieselbe, gleichviel, ob der in die Versicherung Eintretende ledig, verheiratet oder verwitwet ist. Nur hie und da ist das zulässige Alter für den Eintritt in die Versicherung in Grenzen geschlossen, die aber in den meisten Fällen weit auseinander liegen. Immer muss daher bei Ermittlung der Prämie für die soziale Witwenrente mit einem *mittleren Beitrittsalter* gerechnet werden, auf das die Formeln der Kollektivmethode unmittelbar angewandt werden können. Die Individualmethode, die nach den obigen Ausführungen für die *Bilanz* zu erstreben ist, versagt, wenn es sich um die *Prämienfestsetzung* handelt.

B. Die Gesamtheiten der Invaliden und Witwen.

8. Die Anwendung der Kollektivmethode auf die soziale Witwenversicherung beschränkt sich auf die *aktive* Gesamtheit. Die Barwerte der den Ehefrauen der Invaliden später zustehenden Witwenrenten werden individuell berechnet, d. h. als Überlebensrenten behandelt, während die *laufenden* Witwenrenten genau so als eingeschränkte Leibrenten in Rechnung gestellt werden, wie dies bei Erörterung der Individualmethode geschehen ist. Es gelten also hier ebenfalls die Formeln (32) und (33).

IV. Die Barwerte der sozialen Witwenrente nach der Kombinationsmethode.

A. Die aktive Gesamtheit.

1. Die kaum zu bewältigende Rechenarbeit, die mit der Anwendung der Individualmethode auf die aktive Gesamtheit verbunden ist, und die Schwierigkeit, zuverlässige Heiratswahrscheinlichkeiten für die Witwer zu ermitteln, hat den Verfasser auf den Gedanken gebracht, für die Berechnung der Barwerte der sozialen Witwenrente eine Kombination der *Individualmethode* mit der *Kollektivmethode* zu versuchen, um einen für die Praxis brauchbaren Rechnungsgang herzustellen und der zuletzt genannten Methode eine einwandfreiere Basis zu geben.

Das Ergebnis dieses Versuchs ist in dem Seite 240 bereits genannten Buche niedergelegt worden, und die Formeln und Gedankengänge sollen hier, wenn auch in etwas abgeänderter Form, wiederholt werden.

Die *Kombinationsmethode* erfüllt die Forderung, das mit den einzelnen Versicherungen verbundene Risiko nach *Möglichkeit* festzustellen und zu bewerten und unterscheidet infolgedessen zwischen gleichaltrigen

ledigen, verheirateten und verwitweten

Versicherten. Bei den Verheirateten tritt eine weitere Unterscheidung nach dem Alter der Ehefrau ein, das wieder in dem Zeitmomente, wo der aktive Ehemann das Alter x erfüllt, y betragen soll. Von diesem Ehepaare gehen wir bei unseren Ermittlungen zunächst aus.

a. Die verheirateten Aktiven.

2. Der Barwert der Witwenrente 1, die aus der zurzeit bestehenden Ehe wahrscheinlich hervorgeht

und vorschüssig jährlich in m Raten zu zahlen ist, ist nach Formel (IV) Seite 221

$$ {}^{av}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\,\Phi_{x,\,y} $$

zu berechnen. Zu diesem Werte treten nun die Barwerte der *Nachehen,* zu deren Ermittlung die Kollektivmethode dienstbar gemacht wird. Es geschieht dies in folgender Weise.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der x-jährige Aktive, der mit einer y-jährigen Frau verheiratet ist, nach $n+t$ Jahren noch aktiv ist, aber seine Ehefrau verloren hat, ist

$$ \frac{{}^{av}l_{x+n+t}\left({}^{v}l_y - {}^{v}l_{y+n+t}\right)}{{}^{av}l_x\,{}^{v}l_y}. \tag{37} $$

Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser im Alter von x bis $x+n+t$ Witwer gewordene Aktive zur Zeit, wo er das Alter $x+n+t$ erfüllt, wieder verheiratet ist, setzen wir *angenähert*

$$ \frac{{}^{av}l_{x+n+t}\left({}^{v}l_y - {}^{v}l_{y+n+t}\right)}{{}^{av}l_x\,{}^{v}l_y}\,h'_{x+n+t}. \tag{38} $$

Dass wir hierbei die Ausscheidetafel der Verheirateten durchgängig zur Anwendung bringen, liegt in der Unbestimmtheit des Überganges zu den Witwern und von letzteren wieder zu den Verheirateten. Eine Bedeutung ist diesem Umstande nicht beizulegen.

Nun kann ein solcher verheirateter Aktiver innerhalb des unendlich kleinen Altersintervalles von $x+n+t$ bis $x+n+t+dt$ sterben oder auch invalid werden. Der Barwert der in diesem Altersintervall sodann fällig werdenden Witwenrenten beträgt daher, wenn er auf das Alter x zurückdiskontiert wird

$$\left({}^{av}\mu_{x+n+t}\ {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+t-\Delta'}\right. \tag{39}$$

$$\left.+\ {}^{av}\nu_{x+n+t}\ {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n+t]\,|\,x+n+t-\Delta'}\right) v^{n+t}\,dt.$$

Mit den Ausdrücken (38) und (39) lässt sich nun sofort der Barwert für sämtliche *Nachehen* des in Rede stehenden Aktiven anschreiben. Er beträgt

$$ {}^{av+}\mathfrak{a}^{(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}l_x\ {}^{v}l_y} \sum_{0}^{\infty}{}_n \int_0^1 {}^{av}l_{x+n+t}\left({}^{v}l_y\right.$$

$$\left.-\ {}^{v}l_{y+n+t}\right) h'_{x+n+t}\left({}^{av}\mu_{x+n+t}\ {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+t-\Delta'}\right.$$

$$\left.+\ {}^{av}\nu_{x+n+t}\ {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n+t]|x+n+t-\Delta'}\right) v^{n+t}\,dt\,.$$

Behalten wir für die Auflösung des in diesem Ausdrucke auftretenden Integrals die Annahmen bei, wie sie Seite 208 zur Anwendung gekommen sind, so folgt

$$ {}^{av+}\mathfrak{a}^{(m)}_{x|y} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{av}D_x\ {}^{v}l_y} \sum_{0}^{\infty}{}_n\, {}^{av}D_{x+n}\left({}^{v}l_y - {}^{v}l_{y+n+\frac{1}{2}}\right) h'_{x+n+\frac{1}{2}}$$

$$\times\left({}^{av}q_{x+n}\ {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+\frac{1}{2}-\Delta'} + {}^{av}i_{x+n}\ {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n+\frac{1}{2}]|x+n+\frac{1}{2}-\Delta'}\right). \tag{40}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$v^{\frac{1}{2}}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, {}^{av}D_{x+n}\left({}^{v}l_y - {}^{v}l_{y+n+\frac{1}{2}}\right) h'_{x+n+\frac{1}{2}}\left({}^{av}q_{x+n}\ {}^{w}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+\frac{1}{2}-\Delta'}\right.$$

$$\left.+\ {}^{av}i_{x+n}\ {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n+\frac{1}{2}]|x+n+\frac{1}{2}-\Delta'}\right) = \Pi''_{x,\,y}, \tag{41}$$

so können wir nach der Kombinations-Methode den *Barwert der Witwenrente für den x-jährigen Aktiven,* *der mit einer y-jährigen Frau verheiratet ist,* wie folgt anschreiben,

a) wenn die Rente = 1 jährlich vorschussweise in m gleichen Raten zu zahlen ist:

$$ {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{x|y} = {}^{av}\mathfrak{a}^{1\,(m)}_{x|y} + {}^{av}\mathfrak{a}^{+\,(m)}_{x|y} $$

$$ = \frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\left(\Phi_{x,\,y} + \Pi''_{x,\,y}\right). \qquad \text{(XII)} $$

b) wenn für die Rente = 1 noch c Karenzjahre zu erfüllen sind:

$$ {}^{av}_{c|}\mathfrak{a}^{(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\left(\Phi_{x+c,\,y+c} + \Pi''_{x+c,\,y+c}\right). \qquad \text{(XIIa)} $$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$ {}^{av}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\left(\sum_{x,y}^{\infty}\Phi_{x,\,y} + \sum_{x,\,y}^{\infty}\Pi''_{x,\,y}\right), \qquad \text{(XIIb)} $$

d) wenn die unter c. genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$ {}^{av}\overset{<k}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{x|y} = \frac{1}{{}^{av}D_x\,{}^{v}l_y}\left[\sum_{x,y}^{\infty}\Phi_{x,\,y} + \sum_{x,y}^{\infty}\Pi''_{x,\,y} - \left(\sum_{x,\,y}^{\infty}\Phi_{x+k,\,y+k}\right.\right. $$

$$ \left.\left. + \sum_{x,\,y}^{\infty}\Pi''_{x+k,\,y+k}\right)\right]. \qquad \text{(XIIc)} $$

3. Die vom Verfasser vorgeschlagene und hier in ihren Grundzügen dargelegte *Kombinations-Methode*

hat u. a. Zustimmung durch *Riethmann*[1]) und Ablehnung durch *Schönwiese*[2]) erfahren. Der letztere beanstandet die Anwendung der allgemeinen Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins auf die im Alter von x bis $x + n$ entstandenen Witwer. Gewiss ist diese Annahme das Anfechtbare an der ganzen Methode, und sie kann in der Tat als bedenklich für kleine Werte von n wie überhaupt für diejenigen Fälle, wo der Tod der Ehefrau sehr nahe mit dem Tode oder dem Invaliditätseintritte des Ehemannes zusammenfällt, erscheinen. Allein wir haben bereits Seite 195 ausgesprochen, dass für kleine Werte von x_1 die Heiratswahrscheinlichkeit ${}^{aw}h_{x, x_1}$ bei den aktiven Witwern wesentlich grösser als bei gleichalterigen Ledigen ist, und dass sie *kurz nach dem Tode der Ehefrau* **ihre höchsten Werte** *annimmt.*

Der Beweis hierfür lässt sich für die *Steinkohlenbergleute Sachsens* erbringen. Aus einer dem Verfasser vorliegenden Zusammenstellung ergibt sich bei unbedeutenden Ausgleichungen, die sich nur auf die *höheren* Werte von x_1 beziehen,

die Wahrscheinlichkeit ${}^{aw}h_{x, x_1}$,

dass sich ein x-jähriger aktiver Witwer, der x_1 *Jahre* im Witwerstande gelebt hat, im nächsten Jahre wieder verheiratet, wie folgt: (siehe Tabelle auf Seite 247).

Weiter ist zu berücksichtigen, dass für kleine n der Faktor

$$\frac{{}^{v}l_{y} - {}^{v}l_{y+n+\frac{1}{2}}}{{}^{v}l_{y}}$$

1) Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 6. Heft, Seite XXI.

2) Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, XI. Band, Seite 382.

Dauer des Witwerstandes in Jahren x_1	${}^{aw}h_{x,x_1}$ = beim Lebensalter x des Witwers in Jahren					
	20—29	30—39	40—49	50—59	60—69	70 u. mehr
0	0. 16	0. 19	0. 21	0. 00	0. 00	—
1	53	47	35	18	38	—
2	23	17	18	11	—	—
3	07	02	02	03	—	—
4	—	02	02	03	—	—
5	—	0. 02	0. 02	0. 03	—	—
6	—	01	02	03	—	—
7	—	01	01	03	—	—
8	—	01	01	03	—	—
9	—	01	01	03	—	—
10	—	—	0. 01	0. 02	—	—
11	—	—	01	01	—	—
12	—	—	01	01	—	—
13	—	—	01	01	—	—
14	—	—	01	01	—	—
15	—	—	0. 01	—	—	—
16	—	—	01	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—

ebenfalls nur einen sehr kleinen Wert besitzt, und dass somit die ersten Glieder unter dem Summenzeichen einen erheblichen Einfluss auf den Barwert der Witwenrente *nicht* ausüben können. Zu alledem kommt noch, dass es sich hierbei um *Nachehen* handelt, denen bisher eine grosse Bedeutung für die Barwerte der Witwenrenten nicht beigelegt worden ist, und sie infolgedessen in den meisten Fällen vernachlässigt worden sind.

4. Ist hiernach auch anzunehmen, dass die durch unsere Formeln (XII) bis (XII d) angegebenen Barwerte einen für die Praxis genügenden Grad von Zuverlässigkeit besitzen werden, so erscheint es doch wünschenswert, die Kombinationsmethode so zu verbessern, dass jedwedes Bedenken über ihre Zuverlässigkeit hinfällig wird. Das wird erreicht, *wenn wir die Wahrscheinlichkeit* ${}^{aw}h'_{x,x_1}$ *ermitteln, dass ein Aktiver (x), der vor* x_1 *Jahren Witwer geworden ist, bei seinem im Alter* $x + n$ *erfolgenden Tode oder Invaliditätseintritte wieder verheiratet ist* und diese Wahrscheinlichkeit in unsere Berechnungen einführen.

Der *veränderte* Wert, den in diesem Falle $H'_{x,y}$ annimmt, lässt sich im abgekürzten Rechnungsgange wie folgt festsetzen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die y-jährige Ehefrau des x-jährigen Aktiven im Alter von $y + n$ bis $y + n + 1$ verstirbt oder geschieden wird, ist

$$\frac{{}^{v}l_{y+n} - {}^{v}l_{y+n+1}}{{}^{v}l_{y}} = \frac{{}^{v}d'_{y+n}}{{}^{v}l_{y}},$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass der Ehemann x_1 Jahre später stirbt oder invalid wird, ist

$$\frac{{}^{av}l_{x+n} \cdot {}^{a}l_{x+n+x_1}}{{}^{av}l_{x} \cdot {}^{a}l_{x+n}}\, {}^{v}q_{x+n+x_1}$$

bez.

$$\frac{{}^{av}l_{x+n} \cdot {}^{a}l_{x+n+x_1}}{{}^{av}l_{x} \cdot {}^{a}l_{x+n}}\, {}^{v}i_{x+n+x_1}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass derselbe innerhalb der vom Tode seiner Frau ab verflossenen x_1 Jahre wieder oder wiederholt geheiratet hat und die *zuletzt* geehelichte Frau noch lebt, ist

$$^{aw}h'_{x+n+x_1,\, x_1}.$$

Legen wir wieder alle Todes- und Invaliditätsfälle eines Jahres auf die Mitte desselben, so geht (41) über in

$$H''_{x,y} = v^{\frac{1}{2}} \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_{x_1} {}^{av}l_{x+n} \frac{{}^aD_{x+n+x_1}}{{}^al_{x+n}} {}^vd'_{y+n}$$

$$\times \left({}^aq_{x+n+x_1} {}^w\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+x_1+\frac{1}{2}-\varDelta'} \right.$$

$$\left. + {}^ai_{x+n+x_1} {}^{iw}\mathfrak{a}^{(m)}_{[x+n+x_1+\frac{1}{2}]\,|\,x+n+x_1+\frac{1}{2}-\varDelta'} \right)$$

$$\times {}^{aw}h'_{x+n+x_1+\frac{1}{2},\, x_1+\frac{1}{2}}. \tag{42}$$

5. Die *neu eingeführte* Wahrscheinlichkeit $^{aw}h'_{z,x_1}$, welche aus den Zählkarten der verstorbenen und invalid gewordenen Aktiven, die im Laufe der Jahre ihre Ehefrau verloren haben, leicht abzuleiten ist, bedarf zu ihrer Ermittlung ein recht umfängliches Beobachtungsmaterial, das zu beschaffen leider dem Verfasser zurzeit noch nicht gelungen ist. Dass aber dieses Material bei einigermassen gutem Willen von den grossen Versicherungs-Unternehmungen ohne erhebliche Mehrarbeit künftig ermittelt werden kann, steht ausser allem Zweifel. Es handelt sich hierbei um Ausfüllung des folgenden Formulars:

Seit dem Verlust der *ersten* Frau sind verflossen Jahre	Es wurden invalid oder starben im Alter von								
	20-21 Jahren als		21-22 Jahren als		22-23 Jahren als		23-24 Jahren als		usw.
	Ehemänner	Witwer	Ehemänner	Witwer	Ehemänner	Witwer	Ehemänner	Witwer	
0—1									
1—2									
2—3									
usw.									

Die *Kombinations-Methode* ist, nachdem die *Individual-Methode* sich als kaum durchführbar für die Praxis herausgestellt hat, zu wichtig geworden, um nicht ernstlich Vorkehrungen zu treffen, h'_z durch ${}^{aw}h'_{z,x_1}$ ersetzen zu können.

b. Die ledigen Aktiven.

6. Der Barwert der sozialen Witwenrente für den x-jährigen *ledigen Aktiven* nach der Kombinations-Methode ergibt sich mit den oben unter a. gefundenen Barwerten eines gleichhoch versicherten verheirateten Aktiven leicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass der erstere innerhalb des Alters von $x + n$ bis $x + n + 1$ heiratet, ist

$$\frac{{}^{al}l_{x+n}}{{}^{al}l_x}\,{}^{al}h_{x+n}. \tag{42a}$$

Verlegen wir wieder diese Eheschliessung in die Mitte des Jahres, so wird seine Ehefrau zu dieser Zeit $x + n + \frac{1}{2} - \Delta$ Jahre alt sein, und die durch diese

Eheschliessung entstehende Witwenrente im Betrage 1, die vorschüssig jährlich in m Raten zu zahlen ist, hat einen diskontierten Barwert einschliesslich aller Nachehen von insgesamt

$$ {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{x+n+\frac{1}{2}|x+n+\frac{1}{2}-\Delta}\; v^{n+\frac{1}{2}}. \tag{43}$$

Mit diesen beiden Werten (42 a) und (43) lässt sich nun sofort der gesuchte *Barwert der Witwenrente für den x-jährigen ledigen Aktiven* bei genannter Zahlungsweise wie folgt anschreiben:

a) wenn die Rente = 1 beträgt:

$$ {}^{al}\mathfrak{a}^{(m)}_{x|.} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{al}D_x} \sum_{x}^{\infty}{}_{z}\; {}^{al}D_z\, {}^{al}h_z\, {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-\Delta}, \tag{XIII}$$

b) wenn die Rente = 1, aber noch c Karenzjahre zu erfüllen sind:

$$ {}^{al}_{c|}\mathfrak{a}^{(m)}_{x|.} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{al}D_x} \Bigg(\sum_{x}^{x+c-1}{}_{z}\; {}^{al}D_z\, {}^{al}h_z \cdot {}_{x+c-z|}{}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-\Delta} $$

$$ + \sum_{x+c}^{\infty}{}_{z}\; {}^{al}D_z\, {}^{al}h_z\, {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-\Delta} \Bigg), \tag{XIIIa}$$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$ {}^{al}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{x|.} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{al}D_x} \sum_{x}^{\infty}{}_{z}\; {}^{al}D_z\, {}^{al}h_z \Big[{}^{av}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-\Delta} $$

$$ + (z-x)\, {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-\Delta} \Big], \tag{XIIIb}$$

d) wenn die unter c genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$\overset{<k}{{}^{al}\mathfrak{a}^{(m)}_{x|.}} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{al}D_x}\left[\sum_x^{z\,x+k-1} {}^{al}D_z\,{}^{al}h_z\left({}^{av}\overset{<s}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1}\right.\right. \qquad \text{(XIIIc)}$$

$$\left.\left. + (z-x)\,{}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1}\right) + k\sum_{x+k}^{z\,\infty} {}^{al}D_z\,{}^{al}h_z\,{}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1}\right],$$

wo die Werte für ${}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1}$, ${}^{av}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1}$ und ${}^{av}\overset{<s}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1}$ usw. den Ausdrücken (XII) bis (XIIc) — deren Berechnung möglichst mit (42) zu erfolgen hat — zu entnehmen sind. Die Steigerung der auf der rechten Seite von (XIII c) auftretenden Rente ist von z abhängig. Sie berechnet sich auf

$$s = k + x - z.$$

c. Die verwitweten Aktiven.

7. Es bedarf keiner besonderen Begründung, dass die Barwerte der Witwenrente für die *verwitweten Aktiven* erhalten werden, wenn in den Formeln (XIII) bis (XIII c) die Wahrscheinlichkeit ${}^{al}h_z$ mit ${}^{aw}h_{z,x_1+z-x}$ und ${}^{al}l_x$ mit ${}^{aw}l_{[x-x_1]+x_1}$ bez. ${}^{al}D_x$ mit ${}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}$ vertauscht werden, wie dies in ähnlicher Weise bei der Individualmethode der Fall war. Der Vollständigkeit wegen erscheint es angebracht, fragliche Formeln hier noch anzuschreiben.

Der Barwert der Witwenrente eines x-jährigen Witwers, der vor x_1 Jahren seine Ehefrau verloren hat, beträgt bei vorschüssiger Zahlung jährlich in m Raten, *a) wenn die Rente = 1 ist:*

$$^{aw}\mathfrak{a}^{(m)}_{\substack{x\\x_1}|}. \qquad \text{(XIV)}$$

$$= \frac{v^{\frac{1}{2}}}{^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \sum_{x}^{\infty}{}_{z}\, {}^{aw}D_{[z-x_1]+x_1}\, {}^{aw}h_{z,\, z+x_1-x}\, {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1}$$

b) wenn die Rente ebenfalls = 1, aber noch c Karenzjahre zu erfüllen sind:

$$_{c|}{}^{aw}\mathfrak{a}^{(m)}_{\substack{x\\x_1}|}. = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \Bigg(\sum_{x}^{x+c-1}{}_{z}\, {}^{aw}D_{[z-x_1]+x_1}$$

$$\times\, {}^{aw}h_{z,\, z+x_1-x} \cdot {}_{x+c-z|}{}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1} \qquad \text{(XIVa)}$$

$$+ \sum_{x+c}^{\infty}{}_{z}\, {}^{aw}D_{[z-x_1]+x_1}\, {}^{aw}h_{z,\, z+x_1-x}\, {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1} \Bigg),$$

c) wenn die Rente im ersten Versicherungsjahre 1, im zweiten Versicherungsjahre 2, im dritten Versicherungsjahre 3 usf. beträgt:

$$^{aw}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{\substack{x\\x_1}|}. = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \sum_{x}^{\infty}{}_{z}\, {}^{aw}D_{[z-x_1]+x_1}\, {}^{aw}h_{z,\, z+x_1-x} \qquad \text{(XIVb)}$$

$$\times \left({}^{av}\overset{<}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1} + (z-x)\, {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}|z+\frac{1}{2}-1} \right).$$

d) wenn die unter c. genannte Rente nur bis zum Betrage k anwachsen kann:

$$
{}^{aw}\overset{<k}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{x\,|\,x_1} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{{}^{aw}D_{[x-x_1]+x_1}} \Bigg(\sum_{x}^{x+k-1}{}^{z}\; {}^{aw}D_{[z-x_1]+x_1}\; {}^{aw}h_{z,\,z+x_1-x}
$$

$$
\times \left[{}^{av}\overset{<s}{\mathfrak{a}}{}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}\,|\,z+\frac{1}{2}-\varDelta} + (z-x)\, {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}\,|\,z+\frac{1}{2}-\varDelta} \right] \qquad \text{(XIVc)}
$$

$$
+ k \sum_{x+k}^{\infty}{}^{z}\; {}^{aw}D_{[z-x_1]+x_1}\; {}^{aw}h_{z,\,z+x_1-x}\; {}^{av}\mathfrak{a}^{(m)}_{z+\frac{1}{2}\,|\,z+\frac{1}{2}-\varDelta} \Bigg).
$$

Die Schlussbemerkung des Abschnittes IV, 7 ist auch hier zu beachten.

B. Die Gesamtheiten der Invaliden und Witwen.

8. Die Kombinations-Methode wird ebensowenig wie die Kollektivmethode auf die Gesamtheiten der Invaliden und Witwen angewandt. Was Seite 241 hierüber gesagt worden ist, gilt auch hier. Für diese Gesamtheiten kommt nur die Individual-Methode zur Anwendung.

V. Die mit der sozialen Witwenrente verbundene Aussteuerversicherung.

1. Wenn die Witwenrente durch Verheiratung in Wegfall kommt, wird bei der sozialen Versicherung häufig noch ein Geldbetrag gewährt, der zur Aussteuer dienen oder als Ersatz für die in Wegfall kommende Rente betrachtet werden soll. Diese Einrichtung stammt aus alter Zeit und ist besonders durch die Knappschaftskassen der Neuzeit überliefert worden. Ursprünglich wird man wohl damit bezweckt haben, die Witwe

als Heiratsobjekt begehrenswerter zu machen, um an Pensionen zu sparen.

Die Bestimmungen über die Höhe dieser Aussteuer und die Bedingungen, an die sie geknüpft wird, sind ebenso mannigfach wie die der Witwenrente. Die Höhe variiert von einem *Bruchteile* der Jahresrente bis zu einem *Vielfachen* derselben, die, wie wir wissen, zumeist von dem Dienstalter des verstorbenen Ehemannes abhängt, das wiederum durch Tod oder Invalidität beeinflusst wird.

Dass man die Aussteuersumme nicht auch vom Lebensalter der Witwe abhängig gemacht hat, was mit Rücksicht auf die zu ersparenden Pensionsbeträge recht nahe lag, mag seinen Grund darin haben, dass dies auf Aussteuerbeträge führen würde, die mit dem Alter *abnehmen*. Die jüngeren Witwen, die so wie so sich leichter wieder verheiraten, würden dadurch noch begehrenswerter werden, während die älteren Witwen an Aussichten verlören. Und gerade das Umgekehrte möchte man erreichen.

Das *Witwengeld*, das die Deutsche Reichsversicherungsordnung in § 1296 zusichert, gehört nicht unter die Aussteuer. Es stellt eine eingeschränkte Todesfallversicherung dar, die nicht Gegenstand unserer Betrachtung ist. Die Beschränkung besteht darin, dass die Witwe selbst eine bestimmte Zeit versichert gewesen sein muss (§ 1252). Dagegen ist die in § 589 der genannten Ordnung vorgesehene Abfindung der Witwen durch Unfall Verstorbener eine Aussteuer.

2. Bei Ermittlung des Barwertes der Witwenaussteuer 1 gehen wir von der Annahme aus, dass die letztere beim Tode oder beim Eintritte der Invalidität des Ehemannes zu reservieren und am Tage der neuen Eheschliessung zu zahlen ist. Die Heiratswahrschein-

lichkeit der Witwen wird im Gegensatz zu der der Witwer kaum abhängig von der Dauer der Witwenschaft sein und soll von uns durch ${}^{w}h_{y}$ dargestellt werden, wenn die Witwe y Jahre alt ist und seit dem Tode ihres Ehemannes mehr als ein Jahr vergangen ist.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich der Barwert der Aussteuer 1, die eine y-jährige Witwe mit einer Witwendauer von über ein Jahr zu erwarten hat =

$$
{}^{w}\mathfrak{A}_{y} = \frac{1}{{}^{w}D_{y}} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \int_{0}^{1} {}^{w}D_{y+n}\, {}^{w}h_{y+n}\, v^{t}\, dt
$$

$$
= \frac{1-v}{\delta\, {}^{w}D_{y}} \sum_{y}^{\infty}{}_{z}\, {}^{w}D_{z}\, {}^{w}h_{z}, \tag{44}
$$

wo $\delta = \operatorname{lognat}(1+i)$, d. h. die Verzinsungsintensität, ist und angenommen wird, dass eine gleichmässige Verteilung der Heiratsfälle auf dem Integrationswege stattfindet.

Der Barwert der Aussteuer 1 für eine y-jährige Frau hingegen, die mit einem x-jährigen Manne verheiratet ist, *der soeben invalid wurde,* ist bei Berücksichtigung des Trauerjahres

$$
{}^{i}\mathfrak{A}_{[x]|y} = \frac{1}{{}^{i}l_{[x]}\, {}^{w}D_{y}} \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, {}^{i}d_{[x]+n}\, {}^{w}D_{y+n+\frac{3}{2}}\, {}^{w}\mathfrak{A}_{y+n+\frac{3}{2}}, \tag{45}
$$

wenn die Todesfälle wiederum alle auf die Mitte des Jahres gelegt werden. Ist aber der Ehemann *schon* x_1 *Jahre invalid,* so beträgt der Barwert dieser Witwenaussteuer

$$ {}^{i}\mathfrak{A}_{[x-x_1]+x_1|y} \tag{46} $$

$$ = \frac{1}{{}^{i}l_{[x-x_1]+x_1}\,{}^{w}D_y} \sum_{0}^{\infty}{}_{n}{}^{i}d_{[x-x_1]+x_1+n}\,{}^{w}D_{y+n+\frac{3}{2}}\,{}^{w}\mathfrak{A}_{y+n+\frac{3}{2}}. $$

Der Barwert endlich der Aussteuer 1 für eine y-jährige Frau, die *soeben ihren aktiven Ehemann durch den Tod* verloren hat, stellt sich mit dem Werte unter (44) und der in diesem Falle gültigen Festsetzung für die untere Summengrenze auf

$$ {}^{q}\mathfrak{A}_{y|.} = \frac{1-v}{\delta\,{}^{w}D_y} \sum_{y+1}^{\infty}{}_{z}\,{}^{w}D_z\,{}^{w}h_z. \tag{47} $$

Während wir unmittelbar mit (44) bis (47) die Barwerte der Aussteuern feststellen können, die für vorhandene Invaliden- und Witwenbestände zurückzustellen sind, müssen wir für die Aktiven von den Formeln ausgehen, die wir für die Witwenrente in den Abschnitten II bis IV unter A abgeleitet haben, um diese Barwerte zu finden. *Wie leicht einzusehen ist, gelten nämlich alle die Schlüsse, die wir für die Witwenrente gezogen haben, auch für die Aussteuer* **und deshalb können die genannten Formeln auch für die letztere benützt werden, wenn wir darin**

$$ {}^{w}\mathfrak{a}_z^{(m)} \text{ mit } {}^{q}\mathfrak{A}_{z|.} \qquad \text{und} $$

$$ {}^{iw}\mathfrak{a}_{[z_1]|z_2} \text{ mit } {}^{i}\mathfrak{A}_{[z_1]|z_2} $$

vertauschen.

Diese Vertauschung läuft für die Formeln in den Abschnitten II A, III A und IV A auf eine anderweite Festsetzung der Werte Φ_z, Ψ_z, $\Phi_{z,u}$ und $\Pi_{z,\Delta}$, Π'_z, $\Pi''_{z,u}$ hinaus, die wir zur Benützung feststellen.

Für die Witwen-Aussteuer wird

$$\Phi_z = v^{\frac{1}{2}} \sum_z^{\infty} {}^{av}D_{z+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{z-\Delta'+1} \Big({}^{av}q_{z+\frac{1}{2}} \cdot {}^{q}\mathfrak{A}_{z-\Delta'+1|}.$$

$$+ {}^{av}i_{z+\frac{1}{2}} \cdot {}^{i}\mathfrak{A}_{[z+1]|z-\Delta'+1} \Big),$$

$$\Psi_z = v^{\frac{1}{2}} \sum_z^{\infty} z \cdot {}^{av}D_{z+\frac{1}{2}} \cdot {}^{v}l_{z-\Delta'+1} \Big({}^{av}q_{z+\frac{1}{2}} \cdot {}^{q}\mathfrak{A}_{z-\Delta'+1|}.$$

$$+ {}^{av}i_{z+\frac{1}{2}} \cdot {}^{i}\mathfrak{A}_{[z+1]|z-\Delta'+1} \Big),$$

$$\Phi_{z,u} = v^{\frac{1}{2}} \sum_{z,u}^{\infty} {}^{av}D_z \cdot {}^{v}l_{u+\frac{1}{2}} \Big({}^{av}q_z \cdot {}^{q}\mathfrak{A}_{u+\frac{1}{2}|}.$$

$$+ {}^{av}i_z \cdot {}^{i}\mathfrak{A}_{[z+\frac{1}{2}]|u+\frac{1}{2}} \Big), \; (z-u) = \text{konstant},$$

$$\Pi_{z,\Delta} = v^{\frac{1}{2}} \sum_z^{\infty} {}^{a}D_z \cdot h'_{z+\frac{1}{2}} \lambda_{z+\frac{1}{2},\Delta} \Big({}^{a}q_z \cdot {}^{q}\mathfrak{A}_{z+\frac{1}{2}-\Delta|}.$$

$$+ {}^{a}i_z \cdot {}^{i}\mathfrak{A}_{[z+\frac{1}{2}]|z+\frac{1}{2}-\Delta} \Big),$$

$$\Pi'_z = v^{\frac{1}{2}} \sum_z^{\infty} {}^{a}D_z h'_{z+\frac{1}{2}} \Big({}^{a}q_z \, {}^{q}\mathfrak{A}_{z+\frac{1}{2}-\Delta'|}.$$

$$+ {}^{a}i_z \, {}^{i}\mathfrak{A}_{[z+\frac{1}{2}]|z+\frac{1}{2}-\Delta'} \Big) \quad \text{und nach (42)}$$

$$\Pi''_{z,u} = v^{\frac{1}{2}} \sum_{z,u}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} {}_{x_1} \frac{{}^{av}l_z}{{}^{a}lz} \cdot {}^{a}D_{z+x_1} \, {}^{v}d'_u \Big({}^{a}q_{z+x_1} \, {}^{q}\mathfrak{A}_{z+x_1+\frac{1}{2}-\Delta'|}.$$

$$+ {}^{a}i_{z+x_1} \, {}^{i}\mathfrak{A}_{[z+x_1+\frac{1}{2}]|z+x_1+\frac{1}{2}-\Delta'} \Big) \, {}^{aw}h'_{z+x_1+\frac{1}{2},\, x_1+\frac{1}{2}}$$

$$(z-u) = \text{konstant}.$$

Werden diese Werte in die Formeln für die Aktiven eingeführt, so ergeben sie nicht die Barwerte der Witwenrente, sondern die der entsprechenden **Witwenaussteuer.**

VI. Schlussbemerkung.

Fassen wir am Schlusse noch kurz die Ergebnisse unserer Untersuchungen, wie sie in den vorstehenden Abschnitten niedergelegt worden sind, zusammen, so erscheint es unbestreitbar, dass die bisher zur Anwendung gekommenen Methoden zur Berechnung der Barwerte der sozialen Witwenrente einer weiteren Durchbildung und Verfeinerung bedürfen. Bei der Individualmethode war es auf der einen Seite die Vernachlässigung sämtlicher *Nachehen* oder wenigstens eines Teiles derselben und auf der anderen Seite die Anwendung der Heiratswahrscheinlichkeit der Witwer, die auf die Dauer der Witwerschaft *keine* Rücksicht nimmt, was zu beanstanden war und einer Verbesserung bedurfte. Aber wir haben auch gesehen, dass, wenn diese Verbesserungen durchgeführt werden, die rechnerische Arbeit einen kaum zu bewältigenden Umfang annimmt, der sie für die praktische Verwendung wenig geeignet macht.

Die Kollektivmethode, wie sie heute zur Anwendung kommt, stellte sich zur Berechnung der Barwerte der sozialen Witwenrente als eine *etwas zu rohe* Näherungsmethode dar; wir mussten aber anerkennen, dass sie für die Praxis insofern recht wertvoll ist, als sich mit ihr die Durchschnittsprämie, auf der die soziale Witwenrente beruht, leicht und korrekt ermitteln lässt. Die leichte Erfassung sämtlicher *Nachehen* mit ihr führte den Verfasser auf den Gedanken, sie mit der Individualmethode zu verbinden, und so entstand die Kombinationsmethode.

Aber auch diese erwies sich als verbesserungsbedürftig, wenn sie gegen alle Einwendungen gewappnet sein sollte. An die Stelle der Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins musste die Wahrscheinlichkeit treten, dass ein Aktiver, *der vor* x_1 *Jahren Witwer wurde,* bei seinem Tode oder beim Eintritt in die Invalidität, *verheiratet* ist.

Weder diese, noch die oben genannte, von der Dauer der Witwerschaft abhängige Heiratswahrscheinlichkeit der Witwer ist mit Ausnahme des *Sprague'schen* Versuchs bisher Gegenstand der Ermittlung gewesen. Dass beide Wahrscheinlichkeiten überaus wichtig, ja für den Versicherungstechniker geradezu unentbehrlich sind, wenn er aus der zurzeit bestehenden Schwierigkeit herauskommen will, ist vielleicht das Wertvollste, das durch die vorliegenden Untersuchungen festgestellt worden ist.

Auf die Fälle, wo die Höhe der Witwenrente von der jeweiligen Höhe des Gehaltes oder Lohnes des Versicherten beim Tode oder beim Invaliditätseintritte abhängt, ist der Verfasser nicht eingegangen, weil diese Versicherungsart sich nur auf *sehr gewagten* Hypothesen aufbauen lässt. Damit würde aber der Boden verlassen worden sein, auf dem die moderne Versicherungswissenschaft steht.

Manly hat sich bei seinen a. a. O. angegebenen Untersuchungen eingehend mit der Besoldungsordnung beschäftigt und mit Recht darauf hingewiesen, dass es für das unregelmässige Wachstum des Gehaltes und Lohnes innerhalb der nächsten 40 bis 50 Jahre nur *sehr unzuverlässige* Anhaltspunkte gibt. Er ist sich vollkommen klar, dass es für das einzelne Individuum überhaupt *ausgeschlossen* ist, seine zukünftige oder mittlere Besoldung vorauszusagen, hält aber für möglich, für eine Zwangsgenossenschaft hierfür *passende Durchschnittswerte* zu finden.

Auch diese Möglichkeit muss nach den Erfahrungen der Neuzeit bezweifelt werden, und deshalb haben Versicherungen, die auf der veränderlichen Lohnhöhe sich aufbauen, *keine Existenzberechtigung mehr*. Wäre die Lohnhöhe als Funktion des Alters x darstellbar, so könnte man sie durch s_x ausdrücken, und in unseren Formeln wären in den in Rede stehenden Fällen sodann durchgängig die Werte ${}^{av}q_{x+n}$ bez. ${}^{a}q_{x+n}$ und ${}^{av}i_{x+n}$ bez. ${}^{a}i_{x+n}$ mit $\frac{s_{x+n}}{s_x}$ zu multiplizieren. Ähnlich ist auch *Manly* mit seinen Durchschnittswerten verfahren.

Inhalt.