Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 9 (1914)

Artikel: Die Berechnung der Risikoprämie und des Sterblichkeitsgewinnes

Autor: Kihm, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967442

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Berechnung der Risikoprämie und des Sterblichkeitsgewinnes.

Von **C. Kihm**, Mathematiker.

Die vorliegende Arbeit gibt eine ausführliche Ausarbeitung meines am 31. Oktober 1908 in der Versammlung der schweizerischen Versicherungsmathematiker in Neuenburg gehaltenen Vortrages. Sie behandelt dieselbe Aufgabe, welche vor einigen Jahren von den Herren Dr. G. Bohlmann, Dr. P. Radke, Dr. P. Böhmer und W. Gramberg eingehend erörtert wurde, nämlich die Berechnung der Risikoprämie und des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität bei einer Lebensversicherungsgesellschaft. Die gestellte Aufgabe soll allerdings in etwas abweichender Form behandelt werden. Die abweichende Behandlung bezieht sich auf die folgenden Punkte: 1. Während die angeführten Autoren die Formeln zur direkten Berechnung der Risikoprämieneinnahme ableiten, soll in der vorliegenden Arbeit eine Methode zur Berechnung der Risikoprämieneinnahme auf indirektem Wege entwickelt werden. 2. Die sämtlichen bis jetzt veröffentlichten Arbeiten über die Berechnung der Risikoprämieneinnahme gehen der Einfachheit wegen von der Annahme aus, dass der anormale Abgang bei Lebzeiten durch Rückkauf, Verzicht, Umwandlung, Reduktion etc. durchgehends am Ende des Versicherungsjahres stattfinde, während bei der folgenden Methode der anormale Abgang auf den Zeitpunkt der Auflösung der Versicherung verlegt wird. 3. Die Berechnung der Risikoprämieneinnahme wurde in der Regel für jährliche Zahlung der Prämien und Renten durchgeführt, nur die Herren Böhmer und Gramberg haben eine Methode zur Ermittlung der Risikoprämieneinnahme für die Rentenversicherung mit ratenweiser Zahlung der Renten entwickelt. Bei den folgenden Ableitungen werden in erster Linie die Versicherungen mit ratenweiser Prämien- und Rentenzahlung berücksichtigt, wobei die einzelnen Raten einer Prämie oder Rente als nicht gestundete Teile zu betrachten sind. Die Versicherungen mit jährlicher Zahlung der Prämien oder Renten, resp. die Versicherungen mit ratenweiser Zahlung der Prämien, bei denen die einzelnen Raten als gestundete Teile betrachtet werden, sowie die prämienfreien Versicherungen, sind als Spezialfälle zu behandeln.

Es mag hier noch besonders hervorgehoben werden, dass sich die Berechnung der Risikoprämieneinnahme bei den Versicherungen auf zwei und mehr Leben nach der hier zu entwickelnden indirekten Methode sehr einfach gestaltet, während die direkte Berechnung der Risikoprämieneinnahme bei diesen Versicherungen auf Schwierigkeiten stösst.

Bei den folgenden Ableitungen wird angenommen, dass die in Betracht gezogene Lebensversicherungsgesellschaft die folgenden Versicherungsarten abschliesse: Kapitalversicherungen auf den Todesfall, Kapitalversicherungen auf den Lebensfall ohne und mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall, Renten ebenfalls ohne und mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall, sowie Invaliditätsversicherungen in Verbindung mit Kapitalversicherungen auf den Todesfall oder Renten.

Literatur.

Dr. *Georg Bohlmann.* .Die Berechnung des Sterblichkeitsgewinnes bei einer Lebensversicherungs - Gesellschaft im IV. Heft der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Berlin 1905.

Dr. *Paul Radke.* Zur Ermittlung des Invaliditätsgewinnes und des Sterblichkeitsgewinnes bei der Invaliditätsversicherung, ebenfalls im IV. Heft der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Berlin 1905.

Dr. *Paul Eugen Böhmer* und *Wilhelm Gramberg.* Der Risikogewinn in der Lebens- und Invaliditätsversicherung, Berlin, 1906.

— Der Sterblichkeitsgewinn bei Leibrenten, in der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 7. Band, Berlin 1907.

Als weitere Arbeiten, welche sich auf die Berechnung der Risikoprämie oder die Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit beziehen, sind aufzuführen:

Dr. *M. Kanner.* Die Bestimmung des mittleren Risikos bei Lebensversicherungen. Deutsche Versicherungszeitung, Jahrgang 1867.

Dr. *Aug. Zillmer.* Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, Berlin 1877, zweite Auflage.

C. L. Landré. Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung, speziell der Abschnitt über den Gewinn oder Verlust durch die Weise des Ablebens, der Verzinsung etc.

Dr. *L. von Bortkiewicz.* Risikoprämie und Sparprämie bei Lebensversicherungen auf eine Person, Assekuranz-Jahrbuch, Wien 1903, Band 24.

Dr. *H. Amtmann.* Beiträge zur Theorie der Reserveprämie und der Risikoprämie, Österreichische Versicherungszeitung, Jahrgang 1906.

Dr. *H. Amtmann.* Weitere Beiträge zur Theorie der Reserveprämie und der Risikoprämie, Österreichische Versicherungszeitung, Jahrgang 1907.

Hans Kœppler. Die Berechnung der Risikoprämie für den Bilanztermin, Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungsanstalten, neue Folge, 4. Band, Wien 1908.

Dr. *Paul Böhmer.* Näherungsformeln für den Risikogewinn in der Todesfall-, Invaliditäts- und Rentenversicherung, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 9. Band, Berlin 1909.

— Sparprämie und Risikoprämie, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 10. Band, Berlin 1910.

— Näherungsformeln für den Risikogewinn in der Todesfall-, Invaliditäts- und Rentenversicherung, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 10. Band, Berlin 1910.

W. Küttner. Risikoprämie und Sparprämie. Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungsanstalten, neue Folge, 6. Band, Wien 1911.

I. Berechnung des Deckungskapitals für Versicherungen, bei denen die Prämien und Renten in unterjährigen nicht gestundeten Renten zahlbar sind.

In den folgenden Ableitungen sollen die Formeln zur Berechnung der Deckungskapitalien solcher Versicherungen mitgeteilt werden, bei denen die Prämien und Renten in unterjährigen nicht gestundeten Raten zahlbar sind. Die Formeln für die Versicherungen mit Jahresprämien und Renten folgen hieraus, indem die Anzahl der Raten gleich 1 gesetzt wird. Für die Versicherungen, bei denen die Prämien und Renten in unterjährigen gestundeten Raten zu zahlen sind, werden sämtliche Raten mit Beginn eines Versicherungsjahres fällig. Beim Tode eines Versicherten sind die gestundeten Raten des laufenden Versicherungsjahres nachzuzahlen; beim freiwilligen Abgang bei Lebzeiten werden die gestundeten Raten mit der Abgangsentschädigung verrechnet. Die Versicherungen mit gestundeten Raten sind somit wie solche mit Jahresprämien und Renten zu behandeln.

Das Versicherungsjahr beginnt mit dem Jahrestag des Abschlusses der Versicherung. Wird die Prämien- und Rentenzahlung in m Raten im Laufe eines Jahres geleistet, so bilden m Versicherungsabschnitte zusammen ein Versicherungsjahr, sofern der erste Abschnitt mit dem Jahrestag der Einlage beginnt.

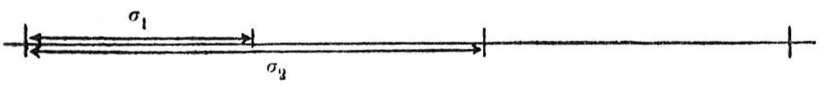
Zu berechnen ist das Deckungskapital, welches am Ende der verschiedenen Versicherungsabschnitte vorhanden ist, ferner das Deckungskapital, welches zu einem bestimmten Zeitpunkt im Laufe eines Versicherungsabschnittes zurückzustellen ist. Dabei wird angenommen, dass Leistungen, welche infolge des Todes eines Versicherten fällig werden, erst am Ende des Versicherungsjahres auszuzahlen sind.

Wird das Versicherungsjahr in m gleiche Abschnitte zerlegt, so soll die Anzahl der im Laufe des k. Abschnittes ($1 \leqq k \leqq m$) im $(t+1.)$ Versicherungsjahr gestorbenen Personen bezeichnet werden durch

$$l_{x+t+\frac{k-1}{m}} - l_{x+t+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m} d_{x+t+\frac{k-1}{m}} \qquad (1)$$

Indem wir für k alle Werte von 1 bis m einsetzen, erhalten wir die Anzahl der Gestorbenen für alle m Abschnitte des $(t+1.)$ Versicherungsjahres.

Wenn der k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres in drei Teile zerlegt und mit σ_1 die Zeit vom Beginn des Abschnittes bis zum Ende des ersten Teilabschnittes und mit σ_2 die Zeit vom Beginn des Abschnittes bis zum Ende des zweiten Teilabschnittes bezeichnet wird, so sei die Anzahl der Gestorbenen des zweiten Teilabschnittes $\sigma_2 - \sigma_1$ bezeichnet mit



$t+\frac{k-1}{m}$ Figur 1. $t+\frac{k}{m}$

$$l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} = {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \qquad (2)$$

Hieraus folgt die Anzahl der Gestorbenen für den Teilabschnitt σ_1, indem wir $\sigma_1 = 0$ und für $\sigma_2 = \sigma_1$, für den Teilabschnitt $\frac{1}{m} - \sigma_2$, indem wir für $\sigma_1 = \sigma_2$ und $\sigma_2 = \frac{1}{m}$ setzen.

A. Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

a) Versicherungen auf ein Leben.

1. Wir bezeichnen die jährliche Nettoprämie des x-Jährigen entsprechend der Versicherungssumme 1, wenn die Prämien in m nicht gestundeten Raten im Laufe eines Versicherungsjahres geleistet werden mit ${}^{(m)}P_x$. Die Bezeichnung gelte allgemein für die Versicherungen auf ein Leben, ohne Unterscheidung der verschiedenen Versicherungsarten. Zwischen dem Deckungskapital am Anfang und Ende des k. Abschnittes $(1 \leqq k \leqq m)$ im $(t+1.)$ Versicherungsjahr besteht die folgende Beziehung:

$$l_{x+t+\frac{k-1}{m}}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \frac{1}{m}{}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}} \tag{3}$$

$$= l_{x+t+\frac{k}{m}} \cdot {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\,(1+i)^{\frac{m-k}{m}} + {}_{\frac{1}{m}}d_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

Bei der Versicherung auf einen bestimmten Zeitpunkt ist hier und in den folgenden Ableitungen die Zahl der Gestorbenen noch mit dem Faktor v^{n-t-1} zu multiplizieren.

Setzen wir hier für k alle Werte von 1 bis m, so ergeben sich die Beziehungen zwischen den Deckungskapitalien am Anfang und Ende der m Abschnitte des $(t+1.)$ Versicherungsjahres. Durch Addition dieser m Beziehungen folgt

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x\,(1+i) + \frac{1}{m}{}^{(m)}P_x\Big[l_{x+t}(1+i) \tag{4}$$

$$+ l_{x+t+\frac{1}{m}}(1+i)^{\frac{m-1}{m}} + l_{x+t+\frac{2}{m}}(1+i)^{\frac{m-2}{m}} + \cdots$$

$$+ l_{x+t+\frac{k-1}{m}}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}} + \cdots + l_{x+t+\frac{m-1}{m}}(1+i)^{\frac{1}{m}}\Big]$$

$$= l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_x + d_{x+t}$$

2. Zur Bestimmung des Deckungskapitals, welches an einem bestimmten Zeitpunkt im Laufe des k. Abschnittes des $(t+1.)$ Versicherungsjahres vorhanden ist, nehmen wir an, dass der Teil der Nettoprämie, welcher während einer gegebenen Zeitstrecke verbraucht wird, sich proportional zur abgelaufenen Zeit verhalte, so dass nach Ablauf der Zeit σ_1 noch ein unverbrauchter Teil der Nettoprämie im Betrag von

$$\left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right){}^{(m)}P_x \tag{5}$$

übrig bleibt. Nach Ablauf der Zeitstrecke σ_2 im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres berechnet sich das Deckungskapital aus dem nach Ablauf der Zeitstrecke σ_1 vorhandenen Betrag, $\sigma_1 < \sigma_2 < \frac{1}{m}$, mit Hülfe der Gleichung

$$l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$+ {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \qquad (6)$$

Hieraus folgt das Deckungskapital am Ende der Zeitstrecke σ_1 aus dem am Anfang des Abschnittes vorhandenen Betrag, indem wir $\sigma_1 = 0$ und für $\sigma_2 = \sigma_1$ setzen; das Deckungskapital am Ende des k. Abschnittes folgt aus dem am Ende der Zeitstrecke σ_2 vorhandenen Werte, indem wir für $\sigma_1 = \sigma_2$ und $\sigma_2 = \frac{1}{m}$ einsetzen. Durch Addition der so erhaltenen zwei Gleichungen und der Gleichung (6) ergibt sich die allgemeine Gleichung (3).

Das Deckungskapital am Ende einer beliebigen Zeitstrecke lässt sich aus dem am Anfang derselben vorhandenen Betrag ermitteln, sobald eine Annahme über den Verlauf der Sterblichkeit während der Zeitstrecke getroffen wird.

3. Bei prämienfreien Versicherungen findet eine Teilung des Versicherungsjahres in m Abschnitte nicht statt. Für solche Versicherungen wird die Beziehung zwischen dem Deckungskapital am Anfang und Ende des Versicherungsjahres erhalten, indem in der Glei-

chung (4) für ${}^{(m)}P_x = 0$ und für ${}_tV_x$ das Deckungskapital einer prämienfreien Versicherung gesetzt wird. Die allgemeine Gleichung zur Berechnung des Deckungskapitals am Ende eines Abschnittes im $(t+1.)$ Versicherungsjahr aus dem am Anfang des Abschnittes vorhandenen Betrag folgt aus Gleichung (6), indem $k = 1$ und ${}^{(m)}P_x = 0$ gesetzt wird.

4. Bei der lebenslänglichen Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung wird bei einzelnen Gesellschaften während den Prämienjahren ein bestimmter Teil der Prämie verwendet zur Bildung einer sogenannten Verwaltungskostenreserve, welche zur Deckung der Verwaltungskosten nach Ablauf der Prämienjahre dient. Diese, neben der Todesfallversicherung laufende Versicherung ist wie eine Altersrente zu behandeln.

Für die prämienfreien Versicherungen wird ebenfalls bei einzelnen Gesellschaften eine Verwaltungskostenreserve bestellt, aus welcher die laufenden Verwaltungskosten bestritten werden. In diesem Falle läuft neben der Todesfallversicherung noch eine temporäre oder lebenslängliche Rentenversicherung.

5. Einzelne Gesellschaften verlangen in den Fällen, da der Versicherte aus Rücksichten auf den Beruf, die Lebensweise, die Gesundheit, die hereditären Anlagen, den Aufenthalt etc. nicht zur normalen Prämie aufgenommen werden kann, statt der Alterserhöhung eine in bar zu zahlende Zuschlagsprämie, welche das Entgelt für die höhere Sterblichkeitsgefahr der anormalen Risiken darstellt. Ein Gewinn auf den Zuschlagsprämien muss deshalb beim normalen Abgang der Versicherung dem Sterblichkeitsgewinn zufallen. Die Zuschlagsprämie kann entweder im Lauf des Jahres, in dem sie eingeht, bis auf den Übertrag verbraucht, oder es kann ein Teil derselben als Extrareserve zurückgestellt werden.

b) Versicherungen auf zwei Leben.

Von $l_x \, l_y$ eingetretenen Paaren leben nach $t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1$ Jahren noch

$$l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \tag{7}$$

Paare zusammen. Die Anzahl der durch Tod aufgelösten Paare wird für die Teilstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ des k. Abschnittes im $(t+1.)$ Versicherungsjahre mit ${}_{\sigma_2-\sigma_1}\delta_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1 : y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ bezeichnet, wobei

$$\left\{\begin{aligned}
&{}_{\sigma_2-\sigma_1}\delta_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1 : y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\qquad - l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\
&\quad = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\qquad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\qquad - {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad = {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\qquad + l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\qquad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\
&\quad = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\qquad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\
&\qquad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

1. Die unter a abgeleiteten Formeln lassen sich leicht auf die Todesfallversicherung auf das kürzeste von zwei Leben übertragen, bei welcher die Versicherungssumme nach dem ersten Todesfall fällig wird. In den dort gegebenen Formeln haben wir statt der Anzahl der Lebenden die Anzahl der zusammenlebenden Paare, statt der Anzahl der gestorbenen Personen die Anzahl der durch Tod aufgelösten Paare und statt ${}^{(m)}P_x$ die Nettoprämie für die verbundene Versicherung auf das kürzeste von zwei Leben, welche mit ${}^{(m)}P_{xy}$ bezeichnet sei, einzusetzen. Das Deckungskapital für die Versicherungssumme 1 nach t Jahren ist ${}_tV_{xy}$.

2. Für eine Versicherung auf zwei Leben, bei welcher die Versicherungssumme im Todesfall einer zum voraus bestimmten, z. B. der beim Eintritt x-jährigen Person, fällig wird, und die Prämien nur während dem Zusammenleben des Paares zu leisten sind, berechnet sich die Nettoprämie nach der Formel:

$$(9) \qquad {}^{(m)}P^1_{xy} = \frac{A_x}{{}^{(m)}\mathfrak{a}_{xy}}$$

Das Deckungskapital ist nach t Jahren für ein zusammenlebendes Paar gleich

$$(10) \qquad {}_tV^1_{xy} = A_{x+t} - {}^{(m)}P^1_{xy}\, {}^{(m)}\mathfrak{a}_{x+t:y+t}$$

Zwischen dem Deckungskapital nach $t + \frac{k-1}{m} + \sigma_1$ und $t + \frac{k-1}{m} + \sigma_2$ Jahren besteht die Beziehung

$$(11)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^1_{xy}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right)^{(m)}P^1_{xy}\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$=\Big[l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P^1_{xy}\Big)$$

$$+\,l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\cdot{}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot\,{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\Big](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}+{}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

3. Wird bei einer Versicherung auf zwei Leben die Versicherungssumme beim Tode der zuletzt sterbenden Person fällig, hat aber der überlebende Versicherte noch weiter Prämien zu bezahlen, und zwar die Prämie, welche seinem Eintrittsalter für die Versicherung auf ein Leben entspricht, so ist diese Versicherung eine Kombination von zwei einfachen Versicherungen auf das Leben der beiden einzelnen Personen und einer verbundenen Versicherung auf das kürzeste der beiden Leben.

4. Hört bei der Versicherung auf das längste von zwei Leben die Prämienzahlung mit der Auflösung des Paares auf, so ist diese Versicherungsart eine Kombination von zwei Versicherungen auf zwei Leben, bei denen das Kapital entweder beim Tode der ersten oder zweiten Person fällig wird mit Prämienzahlung während dem Zusammenleben des Paares (s. unter 2) und einer Versicherung auf das kürzeste von zwei Leben.

B. Kapitalversicherungen auf den Lebensfall.

a) Versicherungen auf ein Leben.

1. Für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall ohne Rückgewähr der Einlagen erhalten wir die Formeln zur Berechnung der Deckungskapitalien, indem wir in den Gleichungen (3), (4) und (6) überall die Ausgaben für die Gestorbenen gleich 0 setzen. Die Nettoprämie für die Versicherungssumme 1 sei, wenn die Zahlung der Prämien in m nicht gestundeten Raten im Laufe eines Jahres stattfindet, ebenfalls mit ${}^{(m)}P_x$ bezeichnet.

2. Die Kapitalversicherung auf den Lebensfall mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall ist eine Kombination von einer Kapitalversicherung auf den Lebensfall ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall und einer Kapitalversicherung auf den Todesfall. Im Todesfall ist bei der Versicherung mit Prämienzahlung ein steigender Betrag, die Summe der einbezahlten Prämienraten, bei der Versicherung mit einmaliger Prämie ein konstanter Betrag, die Bruttoeinlage, zurückzugewähren. Die Beziehung, welche zwischen dem Deckungskapital nach $t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1$ und $t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2$ Jahren besteht, $\frac{1}{m}>\sigma_2>\sigma_1>0$, lautet für eine prämienpflichtige Versicherung

$$l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}(rP)_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$=l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}(rP)_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$(12)\qquad +\left(t+\frac{k}{m}\right){}^{(m)}(r\Pi)_x\cdot{}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

und für die prämienfreie Versicherung

$$(13)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}\sigma_1}$$

$$= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$+ (r\varepsilon)_x \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

Hier ist ${}^{(m)}(rP)_x$ die jährliche Nettoprämie und ${}^{(m)}(r\Pi)_x$ die jährliche Bruttoprämie für die prämienpflichtige Versicherungssumme 1, $(r\varepsilon)_x$ die Bruttoeinlage für die prämienfreie Versicherungssumme 1.

3. Verwaltungskostenreserven können bei den Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung und den prämienfreien Versicherungen zurückgestellt werden. Es sind diesbezüglich dieselben Bemerkungen wie bei den Kapitalversicherungen auf den Todesfall zu machen.

b) Versicherungen auf zwei Leben.

1. Für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall für zwei Leben, bei welcher die Versicherungssummen nach Ablauf der Vertragsdauer an die zusammenlebenden Paare zu bezahlen ist (Versicherung auf den Erlebensfall des Paares), berechnet sich die Nettoprämie zu

$$(14)\qquad {}^{(m)}P_{xy} = \frac{{}_nE_{xy}}{{}^{(m)}\mathfrak{a}_{xy:\overline{n|}}}$$

Das Deckungskapital wird aus den Formeln für die Aussteuerversicherung auf ein Leben erhalten, indem wir an Stelle der einzeln lebenden Personen die Anzahl der zusammenlebenden Paare setzen.

2. Wird die Aussteuerversicherung auf zwei Leben in der Weise abgeschlossen, dass die Versicherungssumme an die zusammenlebenden Paare und die einzeln lebenden versorgten Kinder, d. h. in allen Fällen da das versorgte Kind lebt, auszuzahlen ist, während die Prämienzahlung mit der Auflösung des Paares aufhört (Versicherung auf den Erlebensfall des versorgten Kindes), so ermittelt sich die Nettoprämie zu

$$(15) \qquad {}^{(m)}P_{x/y} = \frac{{}_nE_y}{{}^{(m)}\mathfrak{a}_{xy:\overline{n}|}}$$

Für diese Versicherungsart besteht zwischen dem Deckungskapital nach $t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1$ und $t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2$ Jahren die Beziehung

$$(16) \qquad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_{x/y}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P_{x/y}\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$=\Big[l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Big) + {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_y\Big](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

3. Wenn bei der Aussteuerversicherung auf zwei Leben die Versicherungssumme am Ende des n^{ten} Jahres an die zusammenlebenden Paare, sowie an die einzeln lebenden Personen zu zahlen ist, die Prämie

nicht nur während dem Zusammenleben des Paares, sondern auch von den einzeln lebenden Personen entrichtet wird, und zwar in derselben Höhe, wie wenn sie von Anfang an eine Versicherung auf ein Leben abgeschlossen hätten, so setzt sich diese Versicherungsart zusammen aus zwei einfachen Kapitalversicherungen auf den Lebensfall des Versorgers und des Versorgten, sowie einer verbundenen Versicherung auf den Lebensfall des Paares.

4. Wird die verbundene Aussteuerversicherung in der Weise abgeschlossen, dass das Kapital am Ende der Versicherungszeit an die zusammenlebenden Paare, sowie an die einzeln lebenden Personen auszuzahlen ist, während die Prämienzahlung mit der Auflösung des Paares aufhört, so ist diese Versicherung eine Kombination von zwei verbundenen Versicherungen auf den Erlebensfall des Versorgers und des Versorgten, sowie einer Versicherung auf den Erlebensfall eines Paares.

C. Renten.

a) Versicherungen auf ein Leben.

1. Für die einfache Leibrente ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall besteht zwischen den Deckungskapitalien am Anfang und Ende des k. Abschnittes des $(t+1.)$ Versicherungsjahres die folgende Gleichung

$$(17) \qquad l_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x \, (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}}$$

$$= l_{x+t+\frac{k}{m}} \left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right) (1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

Hier bedeutet $\frac{1}{m}$ die am Ende des Abschnittes verfallene Rente. Wird für $k = 1$ bis m gesetzt, so erhalten wir die m-Gleichungen, welche zwischen den Deckungskapitalien am Anfang und Ende der m-Abschnitte bestehen. Durch Addition dieser m-Gleichungen folgt die Beziehung:

$$(18)\quad l_{x+t} \cdot {}_tV_x (1+i) = \frac{1}{m}\Big(l_{x+t+\frac{1}{m}} (1+i)^{\frac{m-1}{m}} + l_{x+t+\frac{2}{m}} (1+i)^{\frac{m-2}{m}} + l_{x+t+\frac{3}{m}} (1+i)^{\frac{m-3}{m}} + \cdots + l_{x+t+\frac{k}{m}} (1+i)^{\frac{m-k}{m}} + \cdots + l_{x+t+1}\Big) + l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_x$$

2. Das Deckungskapital nach Ablauf der Zeitstrecke σ_2 im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres berechnet sich aus dem nach Ablauf der Zeitstrecke σ_1 vorhandenen Betrag mittelst der Gleichung

$$(19)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\Big(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Dabei wurde die Annahme getroffen, dass der Betrag der in der Zeitstrecke σ_1 aufgelaufenen Rente sich proportional zur Zeit verhalte und demnach σ_1 betrage.

Aus Gleichung (19) leiten sich die beiden Beziehungen ab, welche zwischen den Deckungskapitalien am Anfang und Ende der Zeitstrecke σ_1, sowie am Anfang und Ende der Zeitstrecke $\frac{1}{m} - \sigma_2$ bestehen. Die Addition dieser zwei Gleichungen und der Gleichung (19) ergibt die allgemeine Gleichung (17).

3. Für die einfache Leibrente mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall, abzüglich den bezogenen Renten, findet die Rückgewähr nur während einer bestimmten Anzahl von Jahren statt. Sobald die Summe der bezogenen Renten grösser als die Einlage ist, hört die Rückgewähr im Todesfall auf. Während den Rückgewährsjahren setzt sich diese Versicherungsart zusammen aus einer einfachen Leibrente ohne Rückgewähr der Einlagen und einer Versicherung auf den Todesfall mit abnehmender Versicherungssumme, gleich der geleisteten Einlage, abzüglich den bezogenen Renten. Zwischen dem Deckungskapital am Anfang und Ende der Teilstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ des k. Abschnittes im $(t+1.)$ Versicherungsjahr besteht während den Rückgewährsjahren die Gleichung

$$(20)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$+ \left({}^{(m)}(ra)_x - \left(t+\frac{k-1}{m}\right)\right)_{\sigma_2-\sigma_1} d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

wobei ${}^{(m)}(ra)_x$ die Bruttoeinlage für die einfache Leibrente 1 mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall, abzüglich den bezogenen Renten, angibt.

Nach Ablauf der Rückgewährsjahre ist diese Versicherungsart wie eine einfache Leibrente zu behandeln.

4. Temporäre Leibrenten ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall, letztere unter Abzug der bereits bezogenen Renten, sind wie die einfachen Leibrenten ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall zu behandeln.

5. Aufgeschobene Leibrenten ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall (Altersrente). Während den Aufschubsjahren berechnen sich die Deckungskapitalien nach denselben Formeln wie für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall. Während dem Rentenbezug ist die Altersrente nach denselben Grundsätzen zu behandeln wie die einfache Leibrente.

6. Bei der aufgeschobenen Leibrente mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall kann die Rückgewähr entweder während der Aufschubszeit oder auch noch während dem Rentenbezug ausbedungen werden; im letzteren Falle dauert sie so lange, bis die geleisteten Einlagen durch die bezogenen Renten aufgezehrt sind. Das Deckungskapital berechnet sich während der Aufschubszeit nach den Formeln für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall, nach Ablauf der Aufschubsjahre nach den Formeln für die einfache Leibrente ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen.

7. Bei den sofort beginnenden Renten kann eine Verwaltungskostenreserve zur Deckung der künftigen Verwaltungskosten zurückgelegt werden. Die Versicherung zur Deckung der Verwaltungskosten ist wie eine Rentenversicherung zu behandeln.

Bei den prämienfreien Altersrenten kann beim Eintritt ebenfalls eine Verwaltungskostenreserve zur Deckung der Verwaltungskosten während und nach Ablauf der Aufschubsjahre bestellt werden. Die Versicherung zur Deckung der Verwaltungskosten während den Aufschubsjahren ist eine temporäre Leibrente, diejenige zur Deckung der Verwaltungskosten nach den Aufschubsjahren während der Aufschubszeit eine prämienfreie Altersrente, nach Ablauf derselben eine Leibrente.

Bei den Altersrenten mit Prämienzahlung kann eine Prämie erhoben werden zur Deckung der Verwaltungskosten nach den Aufschubsjahren. In diesem Falle läuft während der Aufschubszeit neben der eigentlichen Altersrente noch eine zweite Altersrente.

b) Versicherungen auf zwei Leben.

1. Die verbundene Leibrente auf das kürzeste von zwei Leben. Das Deckungskapital berechnet sich nach Analogie der für die einfache Leibrente gegebenen Formeln, indem wir dort statt der einzeln lebenden Personen die zusammenlebenden Paare einsetzen.

2. Die verbundene Leibrente auf das längste von zwei Leben ist eine Kombination von zwei einfachen Leibrenten auf das Leben der beiden einzelnen Personen und einer verbundenen Leibrente auf das kürzeste der beiden Leben.

3. Die aufgeschobene Leibrente auf das kürzeste von zwei Leben. Der Bezug der Rente beginnt nach einer bestimmten Anzahl von Jahren an die zusammenlebenden Paare und dauert bis zur Auflösung der Paare. Bei Versicherungen mit Prämienzahlung sind die Prämien solange das Paar zusammenlebt, längstens aber während der Aufschubszeit, zu entrichten. Während den Aufschubsjahren kommen für die Berechnung des Deckungskapitals die Formeln für die verbundene Kapitalversicherung auf den Erbensfall eines Paares zur Anwendung. Nach den Aufschubsjahren gelten die Formeln für die Rente auf das kürzeste von zwei Leben.

4. Die aufgeschobene Leibrente auf das längste von zwei Leben. Die Rente wird nach n Jahren an die zusammenlebenden Paare und die einzeln lebenden Personen ausbezahlt; der Rentenbezug dauert so lange, bis sämtliche Personen gestorben sind. Bestehen die

Leistungen der Versicherten in Prämien, so kann festgesetzt werden, dass nach der Auflösung des Paares die überlebende Person die Prämie für die einfache Altersrente weiter zu zahlen hat. Das Deckungskapital berechnet sich für ein zusammenlebendes Paar während der Aufschubszeit nach den Formeln für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall des Paares und der einzelnen Personen, ebenfalls mit Prämienzahlung für die einzeln lebenden Personen. Nach Ablauf der Aufschubsjahre kommen für ein zusammenlebendes Paar die Formeln für die verbundene Leibrente auf das längste von zwei Leben zur Anwendung.

5. Die einseitige Überlebensrente (Witwenrente). Das Deckungskapital einer prämienfreien Versicherung berechnet sich während dem Zusammenleben des Paares als Differenz zwischen dem Deckungskapital für eine Leibrente auf das Leben der versorgten Person und dem für eine Leibrente auf das kürzeste der beiden Leben. Für eine prämienpflichtige Versicherung besteht während dem Zusammenleben des Paares zwischen dem Deckungskapital nach $t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1$ und $t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2$ Jahren die Beziehung

$$(21)\qquad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_{x/y} + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P_{x/y}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y} + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$+ {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}$$

$$\cdot \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_y\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

D. Invaliditätsversicherungen.

1. Wir setzen voraus, dass die Invaliditätsversicherung in Verbindung mit der Todesfallversicherung durchgeführt werde und nehmen ferner an, dass dem Versicherten im Invaliditätsfall entweder Prämienbefreiung oder ausser derselben noch eine Rente, in Prozenten der Versicherungssumme bemessen, gewährt wird, sofern die Invalidität vor Erreichung eines bestimmten Altersjahres eintritt. Die Invaliditätsleistungen sollen nur bis zu dem festgesetzten Altersjahre ausbezahlt werden. Lebenslängliche Invalidenrenten werden in Verbindung mit der Lebensversicherung nur ausnahmsweise gewährt, so dass die Mitversicherung der Invalidität in der Regel nur bei lebenslänglichen Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung, bei gemischten Versicherungen und bei Versicherungen auf einen bestimmten Zeitpunkt ausbedungen werden kann. Werden die Prämien in m Raten im Laufe eines Jahres bezahlt, wobei die einzelnen Raten nicht gestundete Teile der Prämie darstellen, so kann festgesetzt werden, dass die Invaliditätsrenten ebenfalls in m nicht gestundeten Raten im Laufe eines Jahres zu entrichten sind und dass die erste Rate der Rente am Anfang des auf den Invalidisierungsabschnitt folgenden Abschnittes, die letzte Rate der Rente mit der letzten Prämienrate fällig wird.

In den späteren Ableitungen wird zunächst der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung gesondert für die Aktiven und Invaliden ermittelt. Die im Laufe eines Abschnittes neu entstandenen Invaliden werden mit Beginn des folgenden Abschnittes in die Gruppe der Invaliden übertragen. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit der Invaliden ist nach denselben Regeln wie für die temporären Leibrenten zu ermitteln, so dass die späteren Ableitungen sich auf die Ermittlung des Gewinnes oder Verlustes auf dem günstigen oder ungünstigen Verlauf der Sterblichkeit und der Invalidität der Aktiven beschränken.

Die Zahlen der Lebenden nach der Sterbetafel sind für die Ableitungen bei der Invaliditätsversicherung in Aktive und Invalide zu trennen. Wir verweisen diesfalls auf die Arbeit von Dr. G. Schærtlin im 1. Heft der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker: „Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung".

Für die Rente 1, welche im Invaliditätsfall zu zahlen ist, ergibt sich die Nettoprämie zu

$$(22) \qquad {}^{(m)}P_x^{aa} = \frac{{}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}^{ai}}{{}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}^{aa}}$$

Hier ist

$$(23) \quad {}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}^{ai} = {}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - {}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}^{aa} + \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\left({}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} - {}^{(m)}\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}^{i}\right)$$

der Barwert der temporären Invalidenrente 1, also der Rente zahlbar vom Ende des Invalidisierungsabschnittes an in m Raten von $\frac{1}{m}$ pro Jahr bis zu dem Zeitpunkt, da die letzte Prämienrate verfallen ist.

Das Deckungskapital, welches für einen Aktiven nach t Jahren zurückzustellen ist, berechnet sich für die Invaliditätsrente 1 zu

$$(24) \qquad {}_tV^{aa}_x = {}^{(m)}\mathrm{a}^{ai}_{x+t:\overline{n-t|}} - {}^{(m)}P^{aa}_x \, {}^{(m)}\mathrm{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

Die hier in Betracht gezogene Invaliditätsversicherung ist eine Versicherung mit abnehmender Leistung, indem die für die Renten der Erwerbsunfähigen zu leistenden Einlagen um so kleiner sind, je längere Zeit vom Abschluss der Versicherung bis zur Invalidisierung verflossen ist. Die Prämie dagegen bleibt während der ganzen Versicherungsdauer dieselbe. Infolgedessen wird das Deckungskapital eines Aktiven für Versicherungen auf kurze Jahre von Anfang an, für Versicherungen auf längere Dauern gegen das Ende der Versicherung immer negativ.

Für die folgenden Ableitungen treffen wir die Annahme, es sei für das $(t+1.)$ Versicherungsjahr

(25)

$l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$	die Anzahl der Aktiven am Anfang des k. Abschnittes,
$l^{aa}_{x+t+\frac{k}{m}}$	die Anzahl der Aktiven am Ende des k. Abschnittes,
$\frac{1}{m}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$	die Anzahl der Aktiven, welche im Laufe des k. Abschnittes als aktiv sterben,
$\left(\frac{1}{m}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\right)$	die Anzahl der Aktiven, welche im Laufe des k. Abschnittes invalid werden,
$\frac{1}{m}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}$	die Anzahl der Aktiven, welche im Laufe des k. Abschnittes invalid werden und am Ende desselben als Invalide leben,
$\frac{1}{m}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$	die Anzahl der Aktiven, welche im Laufe des k. Abschnittes invalid werden und nachher im gleichen Abschnitt sterben,
$\left(\frac{k}{m}l^{ai}_{x+t}\right)$	die Anzahl der Aktiven, welche im Laufe der k ersten Abschnitte invalid werden,
$\frac{k}{m}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}$	die Anzahl der Aktiven, welche im Laufe der k ersten Abschnitte invalid werden und am Ende des k. Abschnittes als Invalide leben,
$\frac{k}{m}d^{ai}_{x+t}$	die Anzahl der Aktiven, welche im Laufe der k ersten Abschnitte invalid werden und nachher in der gleichen Zeitstrecke sterben.

Dann ist

$$(26)\begin{cases} l^{aa}_{x+t+\frac{k}{m}} = l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} - {}_{\frac{1}{m}}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} - \left({}_{\frac{1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\right) \\ {}_{\frac{1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}} = \left({}_{\frac{1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\right) - {}_{\frac{1}{m}}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \\ {}_{\frac{k}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}} = \left({}_{\frac{k}{m}}l^{ai}_{x+t}\right) - {}_{\frac{k}{m}}d^{ai}_{x+t} \end{cases}$$

Zwischen den Deckungskapitalien der Aktiven am Anfang, sowie der Aktiven und der neu entstandenen Invaliden am Ende des k. Abschnittes des $(t+1.)$ Versicherungsjahres besteht die folgende Beziehung:

$$(27)\quad l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V^{aa}_{x} + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}}$$

$$= \left[l^{aa}_{x+t+\frac{k}{m}} \cdot {}_{t+\frac{k}{m}}V^{aa}_{x} + {}_{\frac{1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}\left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)\right](1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

Die Beziehungen zwischen den Deckungskapitalien ergeben sich hieraus für die sämtlichen Abschnitte des $(t+1.)$ Versicherungsjahres, indem wir für $k=1$ bis m setzen.

Hier bedeutet ${}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}$ das Deckungskapital eines Invaliden nach $t+\dfrac{k}{m}$ Jahren.

Zwischen den Deckungskapitalien der am Anfang des k. Abschnittes lebenden Invaliden und den Deckungskapitalien der hiervon am Ende des Abschnittes überlebenden Invaliden besteht die folgende Beziehung:

$$(28)\quad {}_{\frac{k-1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}}V^{i}_{x}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}} = {}_{\frac{k-1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

$$\cdot\ {}_{\frac{1}{m}}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

Die Beziehungen für die übrigen Abschnitte leiten sich hieraus ab, indem wir $k=2$ bis m setzen. In Gleichung (28) ist ${}_{\frac{1}{m}}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$ die Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden des Alters $x+t+\frac{k-1}{m}$ nach $\frac{1}{m}$ Jahren noch zu leben, so dass

$$(29) \qquad {}_{\frac{k-1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

angibt, wie viele von den am Anfang des k. Abschnittes vorhandenen Invaliden das Ende desselben erleben. Wie sich ohne weiteres einsehen lässt, ist

$$(30) \quad {}_{\frac{k-1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}} + {}_{\frac{1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}} = {}_{\frac{k}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}$$

Durch Addition der Gleichungen (27) und (28) erhalten wir die Formel:

$$(31) \quad \left[l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V^{aa}_{x}+\frac{1}{m}\,{}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)+{}_{\frac{k-1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}}V^{i}_{x}\right](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}}$$

$$=\left[l^{aa}_{x+t+\frac{k}{m}} \cdot {}_{t+\frac{k}{m}}V^{aa}_{x}+{}_{\frac{k}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}\left(\frac{1}{m}+{}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)\right](1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

Die Gleichung gibt uns die Beziehung zwischen den Deckungskapitalien der am Anfang und Ende des k. Abschnittes des $(t+1.)$ Versicherungsjahres lebenden Aktiven und Invaliden. Setzen wir hier $k=1$ bis m, und addieren die erhaltenen Gleichungen für die m-Abschnitte, so ergibt sich die Beziehung:

$$(32)\quad l^{aa}_{x+t}\cdot {}_tV^{aa}_x(1+i)+\frac{1}{m}\,{}^{(m)}P^{aa}_x\Big[l^{aa}_{x+t}(1+i)$$

$$+\,l^{aa}_{x+t+\frac{1}{m}}(1+i)^{\frac{m-1}{m}}+l^{aa}_{x+t+\frac{2}{m}}(1+i)^{\frac{m-2}{m}}+\cdots\cdot$$

$$+\,l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}}+\cdots\cdot+l^{aa}_{x+t+\frac{m-1}{m}}(1+i)^{\frac{1}{m}}\Big]$$

$$=\frac{1}{m}\Big[{}_{\frac{1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{1}{m}}(1+i)^{\frac{m-1}{m}}+{}_{\frac{2}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{2}{m}}(1+i)^{\frac{m-2}{m}}$$

$$+\,{}_{\frac{3}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{3}{m}}(1+i)^{\frac{m-3}{m}}+\cdots\cdot+{}_{\frac{k}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}(1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

$$+\cdots\cdot+l^{ai}_{x+t+1}\Big]+l^{aa}_{x+t+1}\cdot{}_{t+1}V^{aa}_x+l^{ai}_{x+t+1}\cdot{}_{t+1}V^{i}_x$$

2. Wir teilen den k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres wieder in drei Teile ein. Die Bezeichnungen für die am Anfang und Ende der drei Teilabschnitte lebenden Aktiven und Invaliden, für die im Laufe derselben gestorbenen Aktiven und neu entstandenen Invaliden etc. werden analog den in den Ausdrücken (25) gegebenen gewählt. Alsdann bestehen für die Zeitstrecke $\sigma_2-\sigma_1$ die den Gleichungen (26) entsprechenden Beziehungen:

$$(33)\left\{\begin{aligned}
l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}&=l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}-{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\\
&\quad-\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\\
{}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}&=\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\\
&\quad-{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\\
{}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_2}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}&=\left({}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_2}l^{ai}_{x+t}\right)-{}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_2}d^{ai}_{x+t}
\end{aligned}\right.$$

Hieraus leiten sich die Beziehungen für die beiden andern Zeitstrecken σ_1 und $\frac{1}{m} - \sigma_2$ ab.

Die Anzahl der am Ende der zweiten und dritten Teilstrecke lebenden im Laufe des k. Abschnittes entstandenen Invaliden berechnet sich nach den folgenden Formeln:

$$(34)\left\{\begin{aligned}
&{}_{\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} = {}_{\sigma_2}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\
&{}_{\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_2}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\
&\quad + {}_{\frac{1}{m}-\sigma_2}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}} = {}_{\frac{1}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}
\end{aligned}\right.$$

Das Deckungskapital der Aktiven am Ende der Zeitstrecke σ_2 und der in der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ entstandenen und überlebenden Invaliden berechnet sich aus dem am Ende der Zeitstrecke σ_1 für die Aktiven vorhandenen Betrag mit Hülfe der Gleichung

$$(35)\left\{\begin{aligned}
&l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_{x} \\
&\quad + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} \\
&= \Big[l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\Big) \\
&\quad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\Big(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\Big)\Big](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}
\end{aligned}\right.$$

Der nicht verbrauchte Teil der Rataprämie und die aufgelaufene Rente für die neuen Invaliden wurde hier proportional zu der seit Anfang des Abschnittes abgelaufenen Zeit angenommen. Aus der Gleichung (35) erhalten wir die Beziehungen für die Zeitstrecken σ_1 und $\frac{1}{m} - \sigma_2$, indem wir für σ_1 und σ_2 die entsprechenden Werte einsetzen.

Zwischen den Deckungskapitalien der am Ende der Zeitstrecke σ_1 lebenden aus dem k. Abschnitt stammenden Invaliden und den davon nach $\sigma_2 - \sigma_1$ Jahren lebenden Invaliden besteht die Beziehung

$$(36) \quad {}_{\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^i_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m} \quad \sigma_1}$$

$$= {}_{\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}p^i_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^i_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Am Ende des k. Abschnittes ist $\sigma_2 = \frac{1}{m}$ zu setzen. Für die in der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ entstandenen und am Ende des k. Abschnittes lebenden Invaliden ist σ_1 durch σ_2, σ_2 durch $\frac{1}{m}$ zu ersetzen und die Bezeichnung der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ statt σ_1 anzubringen.

Addieren wir die aus der Gleichung (35) für die 3 Zeitstrecken σ_1, $\sigma_2 - \sigma_1$ und $\frac{1}{m} - \sigma_2$ abzuleitenden Beziehungen und die Formeln nach (36) für die Zeitstrecken σ_1 und $\sigma_2 - \sigma_1$ auf Ende des Abschnittes, so gibt uns die Addition unter Benutzung von 34,2 die Gleichung (27).

Den Gleichungen (34) analoge Beziehungen bestehen für die Gesamtheit der Invaliden aus dem $(t+1.)$ Versicherungsjahr

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &{}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\ &\quad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_2}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\ &{}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\ &\quad + {}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_2}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\ &\quad + {}_{\frac{1}{m}-\sigma_2}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}} = {}_{\frac{k}{m}}l^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}} \end{aligned}\right.$$

Das Deckungskapital der am Ende der Zeitstrecke σ_2 lebenden Invaliden aus dem $(t+1.)$ Versicherungsjahr berechnet sich aus dem für die Invaliden am Ende der Zeitstrecke σ_1 vorhandenen Betrag mit Hülfe der Gleichung

$$\begin{aligned} &{}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} \\ (38)\quad &= {}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}p^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\ &\quad \cdot \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \end{aligned}$$

Hieraus leiten sich die Gleichungen für die beiden Teilstrecken σ_1 und $\frac{1}{m}-\sigma_2$ ab. Die Addition der Gleichungen (35) und (38) ergibt unter Berücksichtigung von 37,1 die Beziehung zwischen den Deckungskapitalien der sämtlichen Aktiven und Invaliden am Ende der Zeitstrecken σ_1 und $\sigma_2-\sigma_1$.

$$(39)\quad \left[l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right) {}^{(m)}P^{aa}_x \right) \right.$$

$$\left. + {}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^i_x \right) \right] (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$= \left[l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^{aa}_x \right) \right.$$

$$\left. + {}_{\frac{k-1}{m}+\sigma_2} l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^i_x \right) \right] (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Für die Zeitstrecken σ_1 und $\frac{1}{m} - \sigma_2$ folgen die Beziehungen durch Einsetzen der entsprechenden Werte von σ_1 und σ_2. Die Addition dieser 3 Gleichungen ergibt die Gleichung (31).

II. Berechnung der Risikoprämie und des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität der einzelnen Versicherung für einen ganzen Abschnitt, sowie für Teilabschnitte des Versicherungsjahres.

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität wird in den folgenden Entwicklungen immer durch die Risikoprämie ausgedrückt, weshalb es sich empfiehlt, die Berechnung der beiden Werte im Zusammenhang zu behandeln.

A. Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

a) Versicherungen auf ein Leben.

Erlischt eine Anzahl von Versicherungen durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten infolge von Rückkauf, Verzicht, Umwandlung etc., so sind nur die Sterbefälle zu entschädigen, welche sich bis zum Zeitpunkt des Abganges ereignen, während für die nachher stattfindenden Sterbefälle keine Zahlungen mehr zu leisten sind. Bei der Berechnung der Risikoprämie und des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit wird das gesamte im Zeitpunkt des Abganges einer Versicherung vorhandene Deckungskapital mehr dem nicht verbrauchten Teil der Nettoprämie als Ausgabe betrachtet. Von diesem Betrage fällt dem Versicherten ein Teil als Abgangsentschädigung zu, während der Rest als Gewinn auf dem Abgang bei Lebzeiten auszuweisen ist.

1. Wir betrachten als allgemeinen Fall die Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres, wobei $\frac{1}{m} > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$ ist, und ermitteln für diese die Risikoprämie, sowie den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit.

Die rechnungsmässige Zahl der Personen, welche in der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ sterben, ist durch die Gleichung (2) gegeben, so dass die rechnungsmässige Zahl der Lebenden am Ende der Zeitstrecke gleich ist

$$(40)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

Die Gleichung (6) geht unter Benutzung dieser Zahl der Lebenden über in

$$\begin{aligned} & l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} \\ (41)\quad & = \left(l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} + {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \end{aligned}$$

Durch einfache Umformung folgt hieraus

$$l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}\right.$$

$$\left.-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right]$$

$$(42)\qquad = {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[1-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right]$$

Der Betrag in der Hauptklammer auf der linken Seite ist die auf Ende des Versicherungsjahres aufgezinste Risikoprämie eines einzelnen Versicherten für die Zeitstrecke $\sigma_2-\sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres. Bezeichnen wir diese mit ${}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$, so wird

$$(43)\qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}q_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[1-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right]$$

wobei ${}_{\sigma_2-\sigma_1}q_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ die Wahrscheinlichkeit für einen Lebenden des Alters $x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1$ angibt, in der Zeitstrecke $\sigma_2-\sigma_1$ zu sterben.

Nach der Gleichung (42) berechnet sich die gesamte Risikoprämien-Einnahme des Zeitabschnittes $\sigma_2-\sigma_1$, für alle am Anfang desselben lebenden Versicherten.

Wenn die wirkliche Sterblichkeit mit der rechnungsmässig angenommenen nicht übereinstimmt, so wird sich entweder Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ergeben. Dieser berechnet sich als Differenz zwischen den Einnahmen an Deckungskapital mehr nicht verbrauchten Nettoprämien am Anfang des Teilabschnittes und den Ausgaben an Deckungskapital mehr nicht verbrauchten Nettoprämien am Ende des Teilabschnittes, sämtliche Werte auf das Ende des Versicherungsjahres aufgezinst, sowie den Ausgaben an Versicherungssummen für die im Laufe des Teilabschnittes wirklich gestorbenen Personen.

Die Einnahme von den am Anfang der Zeitstrecke lebenden Versicherten ist

$$(44)\qquad E = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

Sterben im Laufe des Teilabschnittes wirklich ${}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ Personen, so dass am Ende desselben noch

$$(45)\qquad \mathfrak{l}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

Personen leben, so ist die Ausgabe am Ende des Teilabschnittes

$$
\begin{aligned}
A = & \left(l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right. \\
(46) \quad & \left. + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} + {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir den Gewinn oder Verlust auf einer der am Anfang des Teilabschnittes lebenden Personen mit ${}_{\sigma_2-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$, so folgt der gesamte Gewinn oder Verlust als Differenz der Einnahmen nach (44) und der Ausgaben nach (46) zu

$$
(47)\left\{
\begin{aligned}
& l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
& \cdot \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} \\
& - \left(l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \\
& - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
& \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
& \cdot \left[1 - \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right] \\
& = \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right) \\
& \cdot \left[1 - \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

wobei der Wert für die gesamte Risikoprämie aus Gleichung (42) eingesetzt wird. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ergibt sich hieraus für einen einzelnen Versicherten, indem wir durch die Anzahl der Lebenden am Anfang der Zeitstrecke dividieren.

Mit Hülfe der hier aufgestellten allgemeinen Gleichungen findet sich die Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit für jeden beliebigen Teil eines Abschnittes. Für den k. Abschnitt ist σ_1 durch 0, σ_2 durch $\frac{1}{m}$, für die Zeitstrecke σ_1 ist σ_1 durch 0, σ_2 durch σ_1 für die Zeitstrecke $\frac{1}{m} - \sigma_2$ ist σ_1 durch σ_2 und σ_2 durch $\frac{1}{m}$ zu ersetzen.

Für Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung erhalten wir die Risikoprämie und den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit, indem wir $k = m = 1$ setzen.

2. Die Summe der Risikoprämien eines einzelnen Versicherten ergibt sich für die beiden Teilabschnitte σ_1 und $\frac{1}{m} - \sigma_1$ zusammen durch Addition der für diese Zeitstrecken aus Gleichung (43) abzuleitenden Werte, so dass

$$(48) \quad {}_{\sigma 1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}} + {}_{\frac{1}{m}-\sigma 1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma 1} = {}_{\frac{1}{m}}R_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

Die Summe der gesamten Risikoprämien-Einnahmen für die am Anfang der beiden Teile des k. Abschnittes lebenden Personen wird unter Benutzung von (48) erhalten zu

$$(49) \qquad l_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}} + l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = l_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}R_{x+t+\frac{k-1}{m}} - {}_{\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

Für die am Anfang der beiden Teilabschnitte lebenden sämtlichen Versicherten ist der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit zusammen gleich der Summe der aus der ersten Gleichung (47) für jeden derselben abzuleitenden Ausdrücke, so dass

$$(50) \qquad l_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}} + l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = l_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}G_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit eines einzelnen Versicherten ergibt sich für die beiden Teilabschnitte zusammen, indem wir zu der Gleichung (50) die Identität

$$(51) \qquad \left(l_{x+t+\frac{k-1}{m}} - l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right) \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

addieren. Alsdann folgt

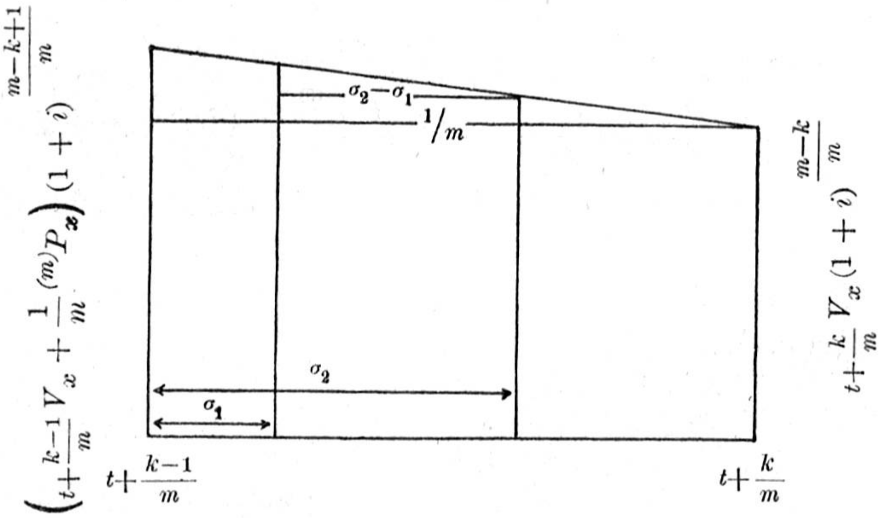
$$(52) \qquad l_{x+t+\frac{k-1}{m}} \left({}_{\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}} + {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right) = l_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}G_{x+t+\frac{k-1}{m}} + {}_{\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

so dass

$$(53) \qquad {}_{\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}} + {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\frac{1}{m}}G_{x+t+\frac{k-1}{m}} + {}_{\sigma_1}\mathfrak{q}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

wenn mit $\mathfrak{q}$ die wirkliche Sterbenswahrscheinlichkeit bezeichnet wird.

3. Wir erhalten einen Näherungswert für die Risikoprämie der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres, indem wir die Annahme treffen, dass sich der auf Ende des Versicherungsjahres aufgezinste Betrag an Deckungskapital mehr der nicht verbrauchten Nettoprämie während des k. Abschnittes geradlinig ändere. Dann besteht zwischen den Differenzen der aufgezinsten Beträge am Anfang und Ende des Teilabschnittes $\sigma_2 - \sigma_1$ und am Anfang und Ende des ganzen Abschnittes die Proportion



Figur 2.

$$(54)\quad \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$- \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} : \sigma_2 - \sigma_1$$

$$= \left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \frac{1}{m}{}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}} - {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\,(1+i)^{\frac{m-k}{m}} : \frac{1}{m}$$

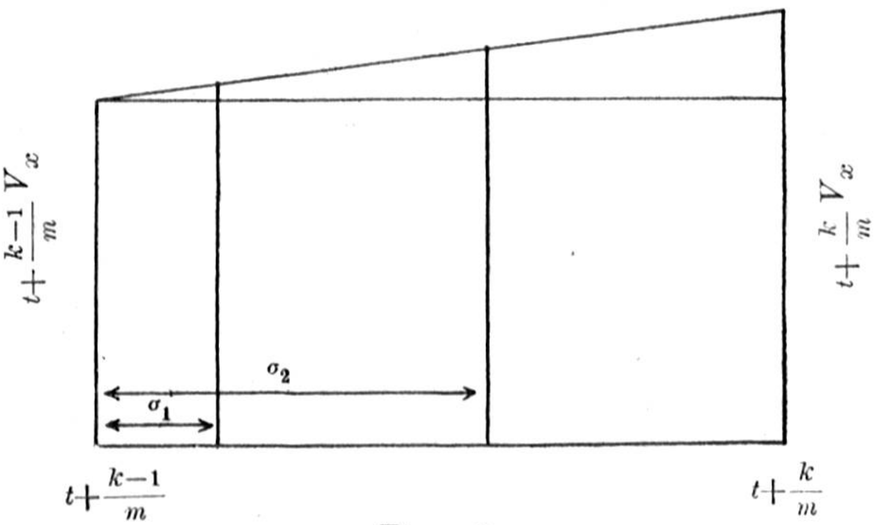
oder

$$(55)\qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} : \sigma_2 - \sigma_1 = {}_{\frac{1}{m}}R_{x+t+\frac{k-1}{m}} : \frac{1}{m}$$

so dass

$$(56)\qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = m(\sigma_2 - \sigma_1) \cdot {}_{\frac{1}{m}}R_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

4. Einen weiteren Näherungswert für die Risikoprämie erhalten wir durch die Annahme, dass das reine Deckungskapital im Laufe des k. Abschnittes geradlinig zunehme. Alsdann besteht die Proportion



Figur 3.

$$(57)\ {}_{t+\frac{k}{m}}V_x - {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x : \frac{1}{m} = {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x - {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x : \sigma_1$$

woraus

$$(58)\qquad {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x = (1-\sigma_1 m)\, {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \sigma_1 m\, {}_{t+\frac{k}{m}}V_x$$

Analog ist

$$(59)\qquad {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x = (1-\sigma_2 m)\, {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \sigma_2 m\, {}_{t+\frac{k}{m}}V_x$$

Die aufgezinste Risikoprämie für den Teilabschnitt $\sigma_2 - \sigma_1$ schreibt sich auch

(60) $${}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= \left[\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right) {}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{1}{m}-\sigma_1}\right.$$

$$\left. - \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{1}{m}-\sigma_2}\right](1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

wobei der Ausdruck in der Hauptklammer die auf Ende des k. Abschnittes aufgezinste Risikoprämie des Teilabschnittes angibt. Wir setzen hier für die Deckungskapitalien die Werte nach den Gleichungen (58) und (59) ein; ferner setzen wir, wenn $z < 1$ ist, näherungsweise

(61) $$(1+i)^z = 1 + zi$$

Geben wir hier z der Reihe nach die Werte $\frac{1}{m} - \sigma_1$, $\frac{1}{m} - \sigma_2$ und $\frac{m-k}{m}$, so erhalten wir durch Einsetzen der entsprechenden Werte in Gleichung (60) für die Risikoprämie den Näherungswert

$${}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= \left[\left((1 - \sigma_1 m) \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \sigma_1 m \cdot {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right) {}^{(m)}P_x\right)\left(1 + \frac{i}{m} - \sigma_1 i\right)$$

(62) $$- \left((1 - \sigma_2 m) \cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \sigma_2 m \cdot {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right.$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_x\Bigg)\left(1+\frac{i}{m}-\sigma_2 i\right)\Bigg]\left(1+i-\frac{k}{m}\,i\right)$$

Die Summe der in der Hauptklammer mit $1+\frac{i}{m}$ multiplizierten Glieder ist

$$\Bigg((1-\sigma_1 m)\cdot{}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x+\sigma_1 m\cdot{}_{t+\frac{k}{m}}V_x$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P_x-\left(1-\sigma_2 m\right)\cdot{}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x$$

$$-\sigma_2 m\cdot{}_{t+\frac{k}{m}}V_x-\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_x\Bigg)\left(1+\frac{i}{m}\right)$$

$$(63)\quad=(\sigma_2-\sigma_1)\,m\left[\left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x+\frac{1}{m}{}^{(m)}P_x\right)\left(1+\frac{i}{m}\right)\right.$$

$$\left.-{}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right]-(\sigma_2-\sigma_1)\,i\cdot{}_{t+\frac{k}{m}}V_x$$

Hier ist der Ausdruck

$$(64)\qquad\left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x+\frac{1}{m}{}^{(m)}P_x\right)\left(1+\frac{i}{m}\right)$$

$$-{}_{t+\frac{k}{m}}V_x={}_{\frac{1}{m}}{}^{1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

ein Näherungswert für die auf Ende des k. Abschnittes aufgezinste Risikoprämie dieses Abschnittes. Die Summe der übrigen Glieder in der Hauptklammer von (62) und das letzte Glied in (63) ist

$$(65)\quad\sigma_2 i\Bigg((1-\sigma_2 m)\cdot{}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x+\sigma_2 m\cdot{}_{t+\frac{k}{m}}V_x$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_x-{}_{t+\frac{k}{m}}V_x\Bigg)$$

$$-\sigma_1 i\left((1-\sigma_1 m)\cdot {}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \sigma_1 m \cdot {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P_x - {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right)$$

$$= (\sigma_2-\sigma_1)\, i\left(1-(\sigma_2+\sigma_1)\, m\right)\left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x\right.$$

$$\left. + \frac{1}{m}{}^{(m)}P_x - {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right)$$

Somit wird die Risikoprämie

$$(66)\quad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \left[(\sigma_2-\sigma_1)\, m\cdot {}_{\frac{1}{m}}{}^1R_{x+t+\frac{k-1}{m}}\right.$$

$$+ (\sigma_2-\sigma_1)\, i\left(1-(\sigma_2+\sigma_1)\, m\right)\left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{m}{}^{(m)}P_x - {}_{t+\frac{k}{m}}V_x\right)\right]\left(1+i-\frac{k}{m}i\right)$$

Dabei ist

$${}_{\frac{1}{m}}{}^1R_{x+t+\frac{k-1}{m}}\left(1+i-\frac{k}{m}i\right) = {}_{\frac{1}{m}}R_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

ein Näherungswert für die auf Ende des Jahres aufgezinste Risikoprämie des k. Abschnittes. Vom 2. Gliede erreicht der erste Faktor

$$(\sigma_2-\sigma_1)\left(1-(\sigma_2+\sigma_1)\, m\right) i$$

den Maximalwert, wenn $\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = \frac{1}{2m}$ mit

$$\frac{1}{4m}i$$

den Minimalwert, wenn $\sigma_1 = \frac{1}{2m},\ \sigma_2 = \frac{1}{m}$ mit

$$-\frac{1}{4m}i$$

Derselbe ist somit eine kleine Zahl. Der zweite Faktor des zweiten Gliedes

$${}_{t+\frac{k-1}{m}}V_x + \frac{1}{m}{}^{(m)}P_x - {}_{t+\frac{k}{m}}V_x$$

ist ebenfalls ein kleiner Wert, indem das Deckungskapital am Anfang eines Abschnittes mehr der eingezahlten Prämienrate nur wenig vom Deckungskapital am Ende des Abschnittes abweicht. Da der dritte Faktor $1 + i - \frac{k}{m}i$ nur wenig von 1 verschieden ist, so ist das ganze zweite Glied in Formel (66) eine kleine Zahl und kann deshalb vernachlässigt werden. Als Näherungswert für die Risikoprämie des Teilabschnittes $\sigma_2 - \sigma_1$ erhalten wir demnach wieder Gleichung (56).

b. Versicherungen auf zwei Leben.

1. Für die Kapitalversicherung auf zwei Leben, bei welcher die Versicherungssumme beim ersten Todesfall fällig wird, ergibt sich für die am Anfang des Teilabschnittes $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t + 1.)$ Versicherungsjahres zusammenlebenden Paare die Risikoprämie aus Gleichung (42), der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit aus Gleichung (47), indem wir dort an Stelle der Anzahl der Lebenden die Anzahl der zusammenlebenden Paare, an Stelle der Gestorbenen die Anzahl der aufgelösten Paare, V_{xy} statt V_x und ${}^{(m)}P_{xy}$ statt ${}^{(m)}P_x$ setzen. Die Anzahl der wirklich aufgelösten Paare, welche mit

$${}_{\sigma_2-\sigma_1}\delta^1_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1 : y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

bezeichnet sei, leitet sich aus den Gleichungen (8) ab, indem wir dort an Stelle der rechnungsmässigen Zahlen der Gestorbenen und der Überlebenden die wirklichen Zahlen einsetzen.

2. Wenn eine Versicherung auf zwei Leben in der Weise abgeschlossen wird, dass die Prämien während dem Zusammenleben des Paares zu leisten sind, die Versicherungssumme aber nur beim Tode der einen der beiden Personen, z. B. der $x$jährigen Person fällig wird, so berechnet sich die Risikoprämie für alle am Anfang des Teilabschnittes $\sigma_2 - \sigma_1$ lebenden Paare aus Gleichung (11) zu

$$(67)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^1_{xy:t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Bigg[\bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^1_{xy} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$- \bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\Bigg]$$

$$= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2 : \sigma_2-\sigma_1}\, d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Bigg[{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x - \bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\bigg)\Bigg](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$+ {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Bigg[1 - \bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\Bigg]$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit des Teilabschnittes $\sigma_2 - \sigma_1$ ergibt sich für alle am Anfang desselben lebenden Paare zusammen zu

$$
\begin{aligned}
(68)\quad & l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G^1_{xy:\,t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^1_{xy:t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad - \mathfrak{l}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Big[{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \\
&\quad - \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\Big)\Big](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \\
&\quad - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Big[1 - \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy} \\
&\qquad + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\Big] \\
&= \Big(l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad - \mathfrak{l}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big) \Big[{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \\
&\quad - \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\Big)\Big](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \\
&\quad - \Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big)\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&\quad \cdot \Big[1 - \Big({}_{t+\frac{k+1}{m}+\sigma_2}V^1_{xy} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^1_{xy}\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\Big]
\end{aligned}
$$

Die Anzahl der am Ende des Teilabschnittes wirklich zusammenlebenden Paare ist hier

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{l}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot \mathfrak{l}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \\
&= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&- \mathfrak{l}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&- {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}
\end{aligned}
\tag{69}
$$

3. Die übrigen im Abschnitt I, A, b aufgeführten Versicherungen auf zwei Leben sind als Kombinationen von je drei der bereits behandelten Versicherungsarten anzusehen.

B. Kapitalversicherungen auf den Lebensfall.

a. Versicherungen auf ein Leben.

1. Für die Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres wird die Risikoprämie einer Versicherung ohne Rückgewähr der Einlagen erhalten, indem wir in Gleichung (6) resp. (41) die Ausgaben für die Gestorbenen gleich 0 setzen. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
&l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg[\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \\
&+ \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_x\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \\
&- \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}\Bigg] \\
&= {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \\
&+ \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_x\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Der Ausdruck in der Hauptkammer auf der linken Seite ist die auf Ende des Versicherungsjahres aufgezinste Risikoprämie aller Versicherten für die Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt. Es ist somit die aufgezinste Risikoprämie für einen einzelnen Versicherten gleich

$$(71) \quad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}q_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Wenn die wirkliche Sterblichkeit mit der rechnungsmässig angenommenen nicht übereinstimmt, so ergibt sich entweder Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit. Dieser folgt aus Gleichung (47), indem wir dort die Ausgabe für die wirklich Gestorbenen gleich 0 setzen zu

$$(72) \quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$-l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$

$$\cdot \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Für den einzelnen Versicherten folgt der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit, indem wir hier durch die Anzahl der Lebenden am Anfang des Teilabschnittes dividieren.

2. Hieraus ist ersichtlich, dass die Formeln zur Berechnung der Risikoprämie für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall ohne Rückgewähr der Einlagen aus denen für die Kapitalversicherung auf den Todesfall erhalten werden, indem wir bei den Gliedern der Formeln die Zeichen wechseln und die Ausgabe für die rechnungsmässige Zahl der Gestorbenen gleich 0 setzen. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ergibt sich für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall aus dem für die Kapitalversicherung auf den Todesfall, indem wir der Risikoprämie das entgegengesetzte Zeichen geben und die Ausgabe für die rechnungsmässig und wirklich Gestorbenen gleich 0 setzen. Dadurch lassen sich die in den Abschnitten II, A, a, 2—4 gegebenen Formeln ohne weiteres auf die Kapitalversicherung auf den Lebensfall übertragen.

3. Die Kapitalversicherung auf den Lebensfall mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall ist eine Kombination von einer Kapitalversicherung auf den Lebensfall ohne Rückgewähr der Einlagen und einer Kapitalversicherung auf den Todesfall. Für die Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres ergibt sich deshalb die Risikoprämie eines ein-

zelnen Versicherten als Differenz der Risikoprämie für die Aussteuersumme 1 und die Todesfallsumme $\left(t+\frac{k}{m}\right)^{(m)}(r\pi)_x$, oder direkt aus Gleichung (12) zu

$$
\begin{aligned}
(73) \qquad & {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \\
& + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}(rP)_x\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \\
& - \Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right)^{(m)}(rP)_x\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} \\
& = {}_{\sigma_2-\sigma_1}q_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg[\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \\
& + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}(rP)_x\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \\
& - \left(t+\frac{k}{m}\right)^{(m)}(r\pi)_x\Bigg]
\end{aligned}
$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit setzt sich für die sämtlichen Versicherten ebenfalls aus dem Gewinn oder Verlust für die Lebensfall- und die Todesfallversicherung zusammen; er ergibt sich aber auch als Differenz der Einnahmen und Ausgaben zu

$$
\begin{aligned}
(74) \qquad & l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
& = {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg[\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x \\
& + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}(rP)_x\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} - \left(t+\frac{k}{m}\right)^{(m)}(r\pi)_x\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$-l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\cdot{}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$=\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}-{}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$

$$\cdot\left[\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}(rP)_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right.$$

$$\left.-\left(t+\frac{k}{m}\right)^{(m)}(r\pi)_x\right]$$

Für eine Versicherung mit Rückgewähr der Einlagen ist der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit kleiner als für eine solche ohne Rückgewähr der Einlagen, weil die unter Risiko stehende Summe im ersten Fall kleiner ist als im letzteren.

b. Versicherungen auf zwei Leben.

1. Für die Aussteuerversicherung auf zwei Leben, bei welcher das versicherte Kapital am Ende der Versicherungszeit nur an die zusammenlebenden Paare auszuzahlen ist und die Prämienzahlung mit der Auflösung des Paares aufhört, ergibt sich die Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit für die Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres aus den Gleichungen (70) bis (72), indem wir dort V_{xy} statt V_x, ${}^{(m)}P_{xy}$ statt ${}^{(m)}P_x$ und die Anzahl der aufgelösten Paare statt der Anzahl der gestorbenen Personen einsetzen.

2. Wenn bei der Aussteuerversicherung auf zwei Leben die Versicherungssumme nach Ablauf der Vertragszeit an die zusammenlebenden Paare und die einzeln lebenden versorgten beim Eintritt y Jahre alten Versicherten auszuzahlen ist, während die Prämien-

zahlung mit der Auflösung des Paares aufhört, so berechnet sich die Risikoprämie der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres für alle am Anfang der Zeitstrecke lebenden Paare aus Gleichung (16) zu

$$(75)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x/y\,:\,t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Bigg[\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y} + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$-\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_{x/y} + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}\Bigg]$$

$$= \Bigg[l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg) - {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}$$

$$\cdot \Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{y} - {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y}$$

$$-\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg)\Bigg](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ergibt sich für die Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ für alle am Anfang derselben lebenden Paare zu

$$(76)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G_{x/y\,:\,t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= \Bigg[l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg)-{}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\,\mathfrak{l}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}$$

$$\cdot\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_y-{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y}$$

$$-\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg)\Bigg](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}-l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot\, l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot\,{}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x/y:t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}=\Bigg[l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$-{}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big)\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg)$$

$$-\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\,\mathfrak{l}_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}$$

$$-{}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\,l_{y+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\Big)\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_y$$

$$-{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_{x/y}-\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_{x/y}\Bigg)\Bigg](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Die Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit folgen hieraus für ein Paar durch Division mit der Anzahl der am Anfang des Teilabschnittes lebenden Paare.

3. Die zwei im Abschnitt I, B, b, 3 und 4 aufgeführten Versicherungen sind als Kombinationen von bereits behandelten Versicherungsarten anzusehen.

C. Renten.

a) Versicherungen auf ein Leben.

1. Für die einfache Leibrente ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall berechnet sich die Risikoprämie der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres aus der allgemeinen Gleichung (19) für die sämtlichen am Anfang derselben lebenden Personen zu

$$(77)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right.$$

$$\left. - \left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}\right]$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Die Risikoprämie für eine einzelne Person ist somit

$${}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$(78)\qquad - \left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}q_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Wenn die wirkliche Sterblichkeit von der rechnungsmässig angenommenen abweicht, so ergibt sich Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit. Dieser ist für die am Anfang der Zeitstrecke lebenden Personen gleich der Differenz der aufgezinsten Einnahmen am Anfang der Zeitstrecke mit

$$(79)\quad E = l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

und der aufgezinsten Ausgaben am Ende der Zeitstrecke mit

$$(80)\quad A = \left(l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right) \cdot \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Demnach ist der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit gleich

$$(81)\quad l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} : {}_{\sigma_2-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$- l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right.$$

$$\left. - {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Für den einzelnen Versicherten ergibt sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit, indem wir in Gleichung (81) beiderseits durch die Anzahl der Lebenden teilen.

2. Die Formeln zur Berechnung der Risikoprämie bei der einfachen Leibrente ohne Rückgewähr werden aus denen für die Kapitalversicherung auf den Todesfall erhalten, indem wir den verschiedenen Gliedern die entgegengesetzten Zeichen geben, an Stelle des Deckungskapitals mehr der nicht verbrauchten Nettoprämie das Deckungskapital mehr der aufgelaufenen Rente und ausserdem die Ausgabe für Versicherungs-

summen gleich 0 setzen. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit folgt für die einfache Leibrente, indem wir in den Formeln für die Kapitalversicherung auf den Todesfall statt dem Deckungskapital mehr der nicht verbrauchten Nettoprämie das Deckungskapital mehr der aufgelaufenen Rente einsetzen, der Risikoprämie das entgegengesetzte Zeichen geben und die Ausgabe für die rechnungsmässige und wirkliche Zahl der Gestorbenen gleich 0 setzen. Dadurch lassen sich die in den Abschnitten II, A, a, 2—4 für die Kapitalversicherung auf den Todesfall gegebenen Formeln leicht auf die einfache Leibrente ohne Rückgewähr übertragen.

3. Die einfache Leibrente mit Rückgewähr der Einlagen abz. den bezogenen Renten im Todesfall kann während den Rückgewährsjahren als eine Kombination einer einfachen Leibrente und einer prämienfreien Kapitalversicherung auf den Todesfall mit abnehmender Versicherungssumme betrachtet werden. Die Risikoprämie eines einzelnen Versicherten bestimmt sich für die Teilstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t + 1.)$ Versicherungsjahres als Differenz der Risikoprämien für die einfache Leibrente und die Todesfallversicherung mit der Versicherungssumme ${}^{(m)}(ra)_x - \left(t + \frac{k-1}{m}\right)$ oder direkt aus Gleichung (20) zu

$$
\begin{aligned}
{}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} &= \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2} \\
(82) \qquad &- \left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} \\
&= {}_{\sigma_2-\sigma_1}q_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right.
\end{aligned}
$$

$$-\left({}^{(m)}(ra)_x - \left(t + \frac{k-1}{m}\right)\right)\Bigg]$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist während der Dauer der Rückgewähr für die Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ des k. Abschnittes gleich der Summe von Gewinn oder Verlust auf der einfachen Leibrente und auf der Todesversicherung, oder auch gleich der Differenz der aufgezinsten Einnahmen am Anfang und der Ausgaben am Ende des Teilabschnittes. Für die sämtlichen Versicherten ergibt er sich zu

(83) $$l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg[\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$-\left({}^{(m)}(ra)_x - \left(t + \frac{k-1}{m}\right)\right)\Bigg]$$

$$-\, l_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$-\, {}_{\sigma_2-\sigma_1}d_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big)\Bigg[\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$-\left({}^{(m)}(ra)_x - \left(t + \frac{k-1}{m}\right)\right)\Bigg]$$

Die aufgezinste Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit sind während den Rückgewährsjahren kleiner als für eine Rente ohne Rückgewähr, weil der unter Risiko stehende Betrag kleiner ist. Nach Ablauf der Rückgewährsjahre ist die Risikoprämie, sowie der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit wie für eine Rente ohne Rückgewähr der Einlagen zu berechnen.

4. Für die temporäre Leibrente ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall ist die aufgezinste Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach denselben Formeln wie für die einfache Leibrente ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen zu berechnen.

5. Die aufgeschobene Leibrente (Altersrente) ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall ist während den Aufschubsjahren wie eine Kapitalversicherung auf den Lebensfall ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen, während den Rentenjahren wie eine einfache Leibrente ohne oder mit Rückgewähr der Einlagen zu behandeln.

b. Versicherungen auf zwei Leben.

1. Für die verbundene Leibrente auf das kürzeste von zwei Leben ergeben sich die Formeln für die Risikoprämie und den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit aus denen für die einfache Leibrente, indem wir statt der gestorbenen Personen die durch Tod aufgelösten Paare, statt der einzelnen Personen die zusammenlebenden Paare und V_{xy} statt V_x einsetzen.

2. Die übrigen im Abschnitt I, C, b, 2—5 aufgeführten Versicherungen sind Kombinationen der hier behandelten Versicherungsarten. Zu erwähnen ist nur, dass sich für die Witwenrente mit Prämienzahlung die Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit während dem Zusammenleben des Paares nach den Gleichungen (75) und (76) berechnet, indem wir dort an Stelle des Deckungskapitals der einzeln lebenden Person das Deckungskapital mehr der aufgelaufenen Rente einsetzen.

D. Invaliditätsversicherungen.

1. Aus der allgemeinen Gleichung (35) folgt unter Benutzung der ersten zwei Gleichungen (33) die Beziehung

$$
\begin{aligned}
(84)\qquad & l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_{x}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}\\
=&\left[\left(l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}-{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}-\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\right)\right.\\
&\cdot\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)+\left(\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\right.\\
&\left.\left.-{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left(\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right)\right](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}
\end{aligned}
$$

Durch eine einfache Umformung geht dieselbe über in

$$
\begin{aligned}
(85)\qquad & l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_{x}\right.\right.\\
&\left.+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}\\
&\left.-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}\right]\\
&=\left\{\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left[\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right.\right.\\
&\left.-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$-\Bigg[{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right)$$

$$+\,{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Es ist demnach

(86)
$$ {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$=\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_{x}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$=\Bigg\{{}_{\sigma_2-\sigma_1}i_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg[\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}$$

$$-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)\Bigg]$$

$$-\Bigg[{}_{\sigma_2-\sigma_1}q^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right)$$

$$+\,{}_{\sigma_2-\sigma_1}q^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

die auf Ende des Versicherungsjahres aufgezinste Risikoprämie eines Aktiven für die Invalidität der Aktiven, die Sterblichkeit der Invaliden und der Aktiven in der Zeitstrecke $\sigma_2 - \sigma_1$ des k. Abschnittes im $(t+1.)$ Versicherungsjahr. Wir bezeichnen diese in der Folge kurzweg als Risikoprämie für die Invaliditätsversicherung eines Aktiven. Sie setzt sich aus 3 Teilen zusammen. Der erste Teil

$$(87) \qquad \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}i_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg[\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}$$

$$-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\right)\Bigg](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

ist die aufgezinste Risikoprämie für die Invalidität der Aktiven. Das zweite Glied

$$(88) \qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = -\, {}_{\sigma_2-\sigma_1}q^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

ist die aufgezinste Risikoprämie für die Sterblichkeit der Invaliden im Invalidisierungsabschnitt. Das dritte Glied

$$(89) \qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = -\, {}_{\sigma_2-\sigma_1}q^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

ist die aufgezinste Risikoprämie für die Sterblichkeit der Aktiven.

In den Formeln (87) bis (89) für die aufgezinsten Risikoprämien kommen die Invaliditätswahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeiten als invalid oder als aktiv zu sterben vor. Es lassen sich demnach die Risikoprämien für die Invalidität der Aktiven, die Sterblichkeit der Invaliden und Aktiven nur getrennt ermitteln, wenn der Versicherungsbestand in Gruppen von Versicherten desselben Alters zerlegt wird. Die Zerlegung der Risikoprämie für die Invaliditätsversicherung in die drei einzelnen Bestandteile passt deshalb nicht in den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinein, so dass auf die bereits erwähnten Arbeiten von Radtke, Böhmer und Gramberg verwiesen wird.

Die Gleichung (85) gibt die Risikoprämie für die sämtlichen am Anfang des Teilabschnittes lebenden Aktiven.

Sofern die wirkliche Invalidität der Aktiven, die wirkliche Sterblichkeit der Invaliden und Aktiven von den rechnungsmässig angenommenen Werten abweichen, so muss sich entweder Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung überhaupt ergeben. Für den Teilabschnitt $\sigma_2 - \sigma_1$ im k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres ist die Einnahme von den am Anfang desselben lebenden Aktiven aufgezinst auf Ende des Versicherungsjahres gleich

$$(90) \qquad E = l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right)^{(m)} P^{aa}_{x} \right) (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

Die Ausgabe an Deckungskapital an die am Ende des Teilabschnittes lebenden Aktiven und die im Laufe desselben neu entstandenen und überlebenden Invaliden, ebenfalls auf Ende des Versicherungsjahres aufgezinst ist

(91)
$$A = \Big[l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x} \Big) + {}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \cdot \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right) \Big] (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$= \Big[\Big(l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right) \Big) \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_{x} \Big)$$

$$+ \Big(\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right) - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \Big) \cdot \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right) \Big] (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Hier ist ${}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ die wirkliche Anzahl der gestorbenen Aktiven, $\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$ die wirkliche Anzahl der neuen Invaliden und ${}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ die wirkliche Anzahl der im Invalidisierungsteilabschnitt gestorbenen Invaliden. Der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung ist für die am Anfang des Teilabschnittes lebenden Aktiven zusammen als Differenz zwischen den Einnahmen in (90) und den Ausgaben in (91) gleich

$$(92)\quad l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$\cdot \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$-\Bigg[\mathfrak{l}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)$$

$$+ {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_x\right)\Bigg](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$= l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$-\Bigg\{\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\Bigg[\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_x$$

$$-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)\Bigg]$$

$$+\Bigg[{}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)$$

$$+ {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_x\right)\Bigg]\Bigg\}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$=\Bigg\{\Bigg(\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right) - \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\Bigg)$$

$$\cdot\Bigg[\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_x - \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x + \left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)\Bigg]$$

$$-\Bigg[\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$

$$\cdot\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)+\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right.$$

$$\left.\left.-{}_{\sigma_2-\sigma_1}\delta^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left(\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^i_x\right)\right]\Big\}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Der Gewinn oder Verlust der sämtlichen Aktiven auf der Invaliditätsversicherung lässt sich in drei Teile zerlegen. Der erste Teil

$$(93)\qquad l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}G^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$

$$=\left(\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)-\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\right)$$

$$\cdot\left[\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^i_x-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)\right](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

gibt den Gewinn oder Verlust auf dem günstigen oder ungünstigen Verlauf der Invalidität der Aktiven. Der zweite Teil

$$(94)\qquad l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\cdot{}_{\sigma_2-\sigma_1}G^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$=-\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}-{}_{\sigma_2-\sigma_1}\delta^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$

$$\cdot\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P^{aa}_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

stellt den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit der Aktiven dar, und der dritte Teil

(95)
$$l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$
$$= -\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\delta^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$
$$\cdot \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

gibt den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit der Invaliden im Invalidisierungsteilabschnitt.

Für einen einzelnen Aktiven folgt der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung aus Gleichung (92), indem wir durch die Anzahl der Aktiven am Anfang des Abschnittes dividieren.

2. Eine etwas andere Form für die Risikoprämie erhalten wir, indem wir in Gleichung (86) für die Anzahl der neu entstandenen Invaliden den Wert aus der zweiten Gleichung (33) einsetzen. Daraus ergibt sich

(96)
$${}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$
$$= \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$
$$- \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$
$$= \Bigg\{ {}_{\sigma_2-\sigma_1}p^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Bigg[\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}$$
$$- \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\right)\Bigg]$$
$$- \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}q^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} + {}_{\sigma_2-\sigma_1}q^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$
$$\cdot \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_{x}\right)\Bigg\}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Die aufgezinste Risikoprämie für die Invaliditätsversicherung der sämtlichen Aktiven wird erhalten, indem wir Gleichung (96) mit der Anzahl der lebenden Aktiven am Anfang des Teilabschnittes multiplizieren.

Der Gewinn oder Verlust aller Aktiven für die Invaliditätsversicherung ergibt sich aus Gleichung (92), indem wir die Anzahl der wirklich entstandenen Invaliden durch den analogen Wert nach der zweiten Gleichung (33) ersetzen zu

(97) $$l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$- \Bigg\{ {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \Bigg[\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}$$

$$- \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^{aa}_{x} \right)\Bigg]$$

$$- \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} + {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \right)$$

$$\cdot \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^{aa}_{x} \right)\Bigg\} (1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$= \Bigg\{ \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} - {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2} \right)$$

$$\cdot \left[\sigma_2 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x} - \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right) {}^{(m)}P^{aa}_{x} \right)\right]$$

$$- \Bigg[{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} + {}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$- \left({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} + {}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \right)\Bigg]$$

$$\cdot\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_x\right)\Bigg\}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung folgt hieraus für einen einzelnen Aktiven, indem beidseitig durch die Anzahl der lebenden Aktiven dividiert wird.

3. Eine dritte Art der Darstellung für die Risikoprämie erhalten wir durch eine andere Anordnung der Glieder in der zweiten Gleichung (96); es wird somit

$$(98)\qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}=\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_x\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right)^{(m)}P^{aa}_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$-\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_x\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$=\Bigg[{}_{\sigma_2-\sigma_1}p^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^i_x\right)$$

$$-\left({}_{\sigma_2-\sigma_1}q^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}+{}_{\sigma_2-\sigma_1}i_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$$

$$\cdot\left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P^{aa}_x\right)\Bigg](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}.$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung folgt für alle Aktiven zu

$$(99)\qquad l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\cdot{}_{\sigma_2-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$=l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\cdot{}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$-\Big[{}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\Big(\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\Big)$$

$$-\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}+\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big)\Big)$$

$$\cdot\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}+\Big(\frac{1}{m}-\sigma_2\Big)^{(m)}P^{aa}_{x}\Big)\Big](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

$$=\Big\{\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}-{}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}\Big)$$

$$\cdot\Big(\sigma_2+{}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{i}_{x}\Big)$$

$$-\Big[{}_{\sigma_2-\sigma_1}d^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}+\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big)$$

$$-\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}+\Big({}_{\sigma_2-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big)\Big)\Big]$$

$$\cdot\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V^{aa}_{x}+\Big(\frac{1}{m}-\sigma_2\Big)^{(m)}P^{aa}_{x}\Big)\Big\}(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_2}$$

4. Aus den in den vorangehenden Kapiteln abgeleiteten Formeln folgt die Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung für den k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres, indem wir $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 = \frac{1}{\mathrm{m}}$ setzen. Wird der k. Abschnitt in zwei Teile zerlegt, so erhalten wir die Risikoprämie und den Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung für den ersten Teil durch Einsetzen von $\sigma_1 = 0$, von $\sigma_2 = \sigma_1$, für den zweiten Teil durch Einsetzen von $\sigma_2 = \frac{1}{m}$.

Für den zweiten Teil ist anzunehmen, dass von den $l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ am Anfang desselben wirklich lebenden Aktiven in der Zeitstrecke $\frac{1}{m} - \sigma_1$ rechnungsmässig

$\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\, l'^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)$ Aktive invalid werden,

$\frac{1}{m}-\sigma_1\, d'^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ Aktive als aktiv sterben,

$\frac{1}{m}-\sigma_1\, d'^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ Aktive invalid werden und nachher sterben und

$\frac{1}{m}-\sigma_1\, l'^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}$ Aktive invalid werden und das Ende des Teilabschnittes erleben.

5. Für den zweiten Teil des k. Abschnittes im $(t+1.)$ Versicherungsjahr kommt noch die Risikoprämie und der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit für die am Anfang des Teilabschnittes lebenden Invaliden in Betracht. Bezeichnet ${}_{\sigma_1} l^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$ die Anzahl der wirklich am Anfang des zweiten Teilabschnittes lebenden aus dem ersten Teilabschnitt stammenden Invaliden, so ist die Risikoprämie für einen dieser Invaliden, s. Gleichung (78)

$$(100)\quad \frac{1}{m}-\sigma_1\, R^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = \left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

$$-\left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$= \frac{1}{m}-\sigma_1\, q^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist für diese Invaliden zusammen

(101)
$$ {}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} $$

$$ = {}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[\left(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}\right. $$

$$ \left. - {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}\mathfrak{p}^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k}{m}}\right] $$

$$ = {}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left[{}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}\mathfrak{q}^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right. $$

$$ \left. \cdot\left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k}{m}} - {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right] $$

$$ = {}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\left({}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}\mathfrak{q}^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right. $$

$$ \left. - {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}q^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right)\left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k}{m}} $$

6. Für die beiden Teile des k. Abschnittes ergibt sich die Summe der Risikoprämien eines einzelnen Aktiven aus Gleichung (86), indem wir für σ_1 und σ_2 die entsprechenden Werte einsetzen und die beiden so erhaltenen Gleichungen addieren zu

(102)
$$ {}_{\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} + {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} $$

$$ = \left({}_{t+\frac{k-1}{m}}V^{aa}_{x} + {}_{\frac{1}{m}}{}^{(m)}P^{aa}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}} $$

$$ - {}_{t+\frac{k}{m}}V^{aa}_{x}(1+i)^{\frac{m-k}{m}} = {}_{\frac{1}{m}}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} $$

Die Summe der Risikoprämien für die sämtlichen am Anfang der beiden Teilabschnitte lebenden Aktiven ist gleich

$$(103)\qquad l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

$$+\ \mathfrak{l}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}} + \Big(l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} - {}_{\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

$$- \Big({}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\Big)\Big)\ {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\frac{1}{m}}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

$$- \Big({}_{\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} + \Big({}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\Big)\Big) \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

Der Gewinn oder Verlust der sämtlichen Aktiven auf der Invaliditätsversicherung findet sich für die beiden Teile des k. Abschnittes zusammen durch Addition der aus der ersten Gleichung (92) abzuleitenden Gleichungen und unter Benutzung von Gleichung (101) zu

$$(104)\qquad l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \cdot {}_{\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

$$+\ \mathfrak{l}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \cdot {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}} \Big({}_{t+\frac{k-1}{m}}V^{aa}_{x} + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P^{aa}_{x}\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}}$$

$$-\Big[\mathfrak{l}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_{x} + \Big(\frac{1}{m}-\sigma_1\Big)\,{}^{(m)}P^{aa}_{x}\Big)$$

$$+\ {}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big(\sigma_1 + {}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{i}_{x}\Big)\Big](1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$+\mathfrak{l}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\Big({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V^{aa}_x$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_1\right){}^{(m)}P^{aa}_x\Big)(1+i)^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

$$-\Big[\mathfrak{l}^{aa}_{x+t+\frac{k}{m}}\cdot{}_{t+\frac{k}{m}}V^{aa}_x+{}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k}{m}}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{m}+{}_{t+\frac{k}{m}}V^{i}_x\right)\Big](1+i)^{\frac{m-k}{m}}$$

$$=l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\cdot{}_{\frac{1}{m}}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

$$-{}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\cdot{}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

Der Gewinn oder Verlust eines einzelnen Aktiven auf der Invaliditätsversicherung findet sich für die beiden Teile des k. Abschnittes zusammen, indem wir zu der letzten Gleichung (104) die Identität addieren

$$(105)\quad\left(l^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}-\mathfrak{l}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}\right){}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$=\left({}_{\sigma_1}\mathfrak{d}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}+\left({}_{\sigma_1}\mathfrak{l}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\right)\right){}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

und nachher durch die Anzahl der Aktiven am Anfang des Abschnittes dividieren, so dass

$$(106)\quad{}_{\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}+{}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}={}_{\frac{1}{m}}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

$$-{}_{\sigma_1}\mathfrak{p}^{ai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\cdot{}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$+\left({}_{\sigma_1}\mathfrak{q}^{aa}_{x+t+\frac{k-1}{m}}+{}_{\sigma_1}\mathfrak{i}_{x+t+\frac{k-1}{m}}\right){}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

7. Näherungswerte für die Risikoprämie des Teilabschnittes $\sigma_2 - \sigma_1$ erhalten wir durch die Annahme, dass sich entweder der Betrag an Deckungskapital mehr nicht verbrauchter Nettoprämie aufgezinst auf Ende des Versicherungsjahres während dem Laufe des k. Abschnittes geradlinig ändere, oder dass das reine Deckungskapital im Laufe des k. Abschnittes geradlinig zunehme. Beide Annahmen führen zu dem Näherungswert für die Risikoprämie auf der Invaliditätsversicherung

$$(107) \qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = m\,(\sigma_2 - \sigma_1)\,{}_{\frac{1}{m}}R^{aai}_{x+t+\frac{k-1}{m}}$$

Wir verweisen auf die Ableitungen bei den Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

III. Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität einer einzelnen Versicherung für einen ganzen Abschnitt, sowie für Teilabschnitte im Rechnungsjahr.

Bei den meisten Versicherungsgesellschaften beginnt das Versicherungsjahr einer Versicherung mit dem Datum des Eintrittstages. Da sich die Eintritte über den Lauf eines Rechnungsjahres verteilen, so wird für alle Versicherungen, bei denen der Eintritt nach dem 1. Januar erfolgt ist, das Versicherungsjahr und ein Abschnitt des Versicherungsjahres durch den 31. Dezember, den Zeitpunkt des Rechnungsabschlusses, in zwei Teile zerlegt. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität setzt sich demnach für ein Rechnungsjahr bei allen Versicherungen, welche in Vorjahren eingetreten und am Ende des Jahres noch in Kraft sind, aus dem Ergebnis eines

Teilabschnittes am Anfang und Ende des Jahres und dem Ergebnis einer Anzahl von ganzen Abschnitten zusammen. Für die im Laufe des Jahres eingetretenen Versicherungen kommt das Ergebnis von einem oder mehreren ganzen Abschnitten und einem Teilabschnitt am Ende des Jahres in Betracht. Erlischt die Versicherung im Laufe des Jahres durch Tod oder freiwilligen Abgang bei Lebzeiten, so sind die Ergebnisse der Abschnitte bis zum Erlöschen der Versicherung zu berücksichtigen. Wir werden demnach den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität für die beiden Teilabschnitte am Anfang und Ende des Jahres, sowie für zwei ganze vor und nach dem Beginn des Versicherungsjahres liegende Abschnitte berechnen.

Für die künftigen Ableitungen treffen wir die folgenden Voraussetzungen: Für eine aus dem Vorjahr übertragene Versicherung ist das am Ende desselben vorhandene Deckungskapital mehr dem nicht verbrauchten Teil der Nettoprämie, dem Nettoprämienübertrag, eventuell mehr dem Rentenübertrag als Einnahme auf Anfang des Jahres aufzunehmen. Das am Ende eines Abschnittes vorhandene Deckungskapital ist als Ausgabe am Ende desselben und als Einnahme am Anfang des folgenden Abschnittes aufzuführen. Das Deckungskapital mehr dem Nettoprämienübertrag eventuell Rentenübertrag am Ende des Jahres ist als Ausgabe des letzten Teilabschnittes zu buchen. Für Versicherungen, welche durch anormalen Abgang bei Lebzeiten wegfallen, ist das ganze zur Zeit des Abganges vorhandene Deckungskapital mehr nicht verbrauchter Nettoprämie, Rentenübertrag, zu verausgaben.

Die Zahlung der Rataprämien muss innerhalb einer gewissen Frist bewerkstelligt werden. Wird die Prämie innerhalb derselben nicht bezahlt, so erlischt die Versicherung, oder sie wird in eine prämienfreie Versicherung umgewandelt, oder sie kann auch zurückgekauft werden. Da die Gesellschaft das volle Sterberisiko auch während der Wartefrist zu tragen hat, so muss zur Ermittlung des Sterblichkeitsgewinnes die nicht eingegangene Prämie als bezahlt betrachtet werden. Dafür wird der zur Bemessung der Abgangsentschädigung in Betracht kommende Betrag um die ausstehende Prämienrate gekürzt. Wird die Versicherung in eine prämienfreie umgewandelt, so kann die ursprüngliche Versicherung wie ein Austritt bei Lebzeiten, die umgewandelte Versicherung dagegen als ein Eintritt behandelt werden.

Für die folgenden Ableitungen führen wir die auf Ende des Rechnungsjahres aufgezinste Risikoprämie ein. Diese wird aus der auf Ende des Versicherungsjahres aufgezinsten Risikoprämie erhalten, durch Multiplikation entweder mit dem Faktor $(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$, wenn es sich um einen Abschnitt handelt, welcher zwischen dem Anfang des Rechnungsjahres und dem Ende des Versicherungsjahres liegt, oder mit dem Faktor $v^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$, wenn der Abschnitt zwischen dem Anfang des neuen Versicherungsjahres und dem Ende des Rechnungsjahres liegt. Die auf Ende des Rechnungsjahres aufgezinste Risikoprämie sei allgemein mit R^1 bezeichnet.

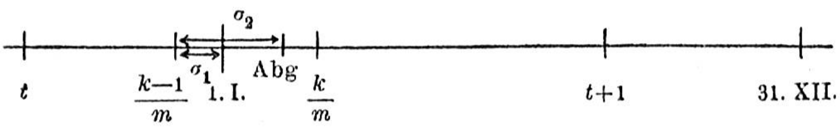
Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität wird wieder definiert als Differenz zwischen den Einnahmen am Anfang des Jahres, resp. am Anfang des in Betracht gezogenen Abschnittes und den Ausgaben zur Zeit des Erlöschens der Versicherung durch Tod oder freiwilligen Abgang bei Lebzeiten, resp. am Ende des Abschnittes oder am Ende des Jahres. Die Einnahmen und Ausgaben sind auf Ende des Rechnungsjahres aufzuzinsen.

Für die folgenden Ableitungen nehmen wir an, es werde der k. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres durch den 1. Januar in zwei Teile zerlegt, und es sei σ_1 die Zeitstrecke vom Beginn des k. Abschnittes bis zum 1. Januar, wobei $\frac{1}{m} > \sigma_1 > 0$ ist.

A. Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

a) Versicherungen auf ein Leben.

1. Wir untersuchen zunächst den ersten Teilabschnitt des Rechnungsjahres und ermitteln den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit für die folgenden hier in Betracht kommenden Fälle:



Figur 4.

α) Die Versicherung besteht am Ende des k. Abschnittes noch in Kraft, resp. sie erlischt am Ende desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten.

Die Einnahme am Anfang des Jahres aufgezinst auf Ende desselben ist

$$(108) \qquad E = \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right) {}^{(m)}P_x \right)(1+i)$$

Die aufgezinste Ausgabe am Ende des Abschnittes ist

$$(109) \qquad A_1 = {}_{t+\frac{k}{m}}V_x (1+i)^{\frac{m-1}{m}+\sigma_1}$$

somit der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit

$${}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G'_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} (1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$(110) \qquad = {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R'_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

β) Die Versicherung erlischt durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten im Laufe des Teilabschnittes. Es sei σ_2 die Zeit vom Beginn des k. Abschnittes bis zum Erlöschen der Versicherung, wobei $\sigma_1 < \sigma_2 < \frac{1}{m}$. Die aufgezinste Einnahme ist durch Gleichung (108) gegeben, die aufgezinste Ausgabe beim Erlöschen der Versicherung ist

$$A_2 = \left({}_{t+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{1-(\sigma_2-\sigma_1)} \qquad (111)$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist demnach

$$(112) \qquad {}_{\sigma_2-\sigma_1}G'_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$= {}_{\sigma_2-\sigma_1}R_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\sigma_2-\sigma_1}R'_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

γ) Die Versicherung erlischt durch Tod des Versicherten im ersten Teilabschnitt des Rechnungsjahres. Die Einnahme bestimmt sich nach Gleichung (108), die aufgezinste Ausgabe ist, da die Versicherungssumme als am Ende des Versicherungsjahres zahlbar vorausgesetzt wurde, gleich

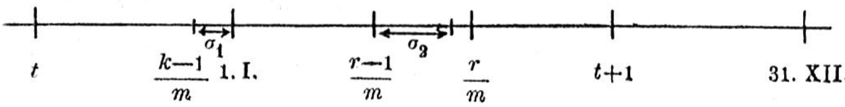
$$A_3 = (1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \tag{113}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist

$$ {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}G''_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \tag{114}$$

$$= {}_{\frac{1}{m}-\sigma_1}R'_{x+t+\frac{k-1}{m}+\sigma_1} + {}_{t+\frac{k}{m}}V_x(1+i)^{\frac{m-1}{m}+\sigma_1} - (1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

2. Wir ermitteln den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit für den r. Abschnitt des $(t+1.)$ Versicherungsjahres, wobei $k < r < m$ ist. Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:



Figur 5.

a) Die Versicherung besteht am Ende des Abschnittes noch in Kraft, resp. sie erlischt am Ende desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten. Die Einnahme am Anfang des r. Abschnittes auf das Ende des Jahres aufgezinst ist

$$E = \left({}_{t+\frac{r-1}{m}}V_x + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-r+k}{m}+\sigma_1} \tag{115}$$

Die aufgezinste Ausgabe am Ende des r. Abschnittes ist

$$A_1 = {}_{t+\frac{r}{m}}V_x\,(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1} \tag{116}$$

Demnach ist der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit gleich

$$ {}_{\frac{1}{m}}G'_{x+t+\frac{r-1}{m}} = {}_{\frac{1}{m}}R_{x+t+\frac{r-1}{m}}\,(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\frac{1}{m}}R'_{x+t+\frac{r-1}{m}} \tag{117}$$

β) Die Versicherung wird durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten im Laufe des r. Abschnittes aufgelöst. Die Einnahme berechnet sich nach Gleichung (115), die Ausgabe ist, wenn die Versicherung nach $t+\frac{r-1}{m}+\sigma_2$ Jahren erlischt

$$(118)\qquad A_2=\left({}_{t+\frac{r-1}{m}+\sigma_2}V_x+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right)^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{m-r+k}{m}-(\sigma_2-\sigma_1)}$$

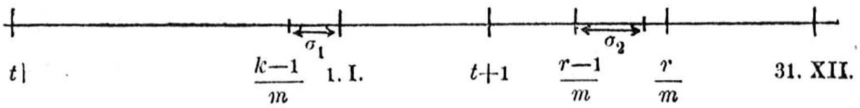
Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist

$$(119)\qquad {}_{\sigma_2}G'_{x+t+\frac{r-1}{m}}={}_{\sigma_2}R_{x+t+\frac{r-1}{m}}(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$
$$={}_{\sigma_2}R'_{x+t+\frac{r-1}{m}}$$

γ) Die Versicherung erlischt durch Tod des Versicherten im Laufe des r. Abschnittes. Die Einnahme ist nach Gleichung (115), die Ausgabe nach Gleichung (113) zu bestimmen. Somit ist der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit

$$(120)\qquad {}_{\frac{1}{m}}G''_{x+t+\frac{r-1}{m}}={}_{\frac{1}{m}}R'_{x+t+\frac{r-1}{m}}$$
$$+{}_{t+\frac{r}{m}}V_x(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1}-(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

3. Es soll der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit einer Versicherung für den r. Abschnitt des $(t+2.)$ Versicherungsjahres ermittelt werden, wobei $k>r>o$. Dabei sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:



Figur 6.

α) Die Versicherung ist am Ende des Abschnittes noch in Kraft, resp. sie erlischt auf Ende desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten. Die aufgezinste Einnahme am Anfang des Abschnittes ist

$$(121)\qquad E = \left({}_{t+1+\frac{r-1}{m}}V_x + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\frac{k-r}{m}+\sigma_1}$$

und die aufgezinste Ausgabe am Ende des Abschnittes ist

$$(122)\qquad A_1 = {}_{t+1+\frac{r}{m}}V_x(1+i)^{\frac{k-r-1}{m}+\sigma_1}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit folgt zu

$$(123)\qquad {}_{\frac{1}{m}}G'_{x+t+1+\frac{r-1}{m}}$$

$$= {}_{\frac{1}{m}}R_{x+t+1+\frac{r-1}{m}}\,v^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} = {}_{\frac{1}{m}}R'_{x+t+1+\frac{r-1}{m}}$$

β) Die Versicherung wird im Laufe des Abschnittes durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten aufgelöst. Der Abgang erfolge nach $t+1+\frac{r-1}{m}+\sigma_2$ Jahren. Die aufgezinste Einnahme ist durch Gleichung (121) gegeben; die aufgezinste Ausgabe zur Zeit des freiwilligen Abganges bei Lebzeiten ist

$$(124)\qquad A_2 = \Bigg({}_{t+1+\frac{r-1}{m}+\sigma_2}V_x$$

$$+\left(\frac{1}{m}-\sigma_2\right){}^{(m)}P_x\Bigg)(1+i)^{\frac{k-r}{m}+\sigma_1-\sigma_2}$$

Demnach folgt als Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit der Betrag

(125) $${}_{\sigma_2}G'_{x+t+1+\frac{r-1}{m}}$$

$$= {}_{\sigma_2}\mathrm{R}_{x+t+1+\frac{r-1}{m}} \cdot v^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} = {}_{\sigma_2}\mathrm{R}'_{x+t+1+\frac{r-1}{m}}$$

γ) Der Versicherte stirbt im Laufe des Abschnittes. Da die Versicherungssumme erst am Ende des Versicherungsjahres zahlbar ist, so ist ihr Wert auf Ende des Jahres zurückgezinst

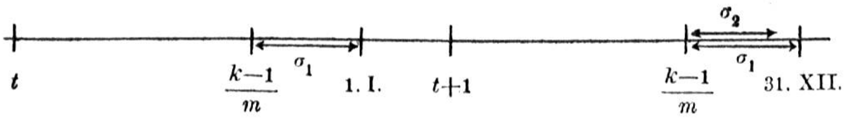
(126) $$A_3 = v^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ergibt sich zu

(127) $${}_{\frac{1}{m}}G'_{x+t+1+\frac{r-1}{m}} = {}_{\frac{1}{m}}R'_{x+t+1+\frac{r-1}{m}}$$

$$+ {}_{t+1+\frac{r}{m}}V_x\,(1+i)^{\frac{k-r-1}{m}+\sigma_1} - v^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1}$$

4. Zum Schluss soll noch der Gewinn oder Verlust für den letzten Teilabschnitt des Rechnungsjahres ermittelt werden. Derselbe ist für die folgenden drei Fälle zu berechnen:



Figur 7.

α) Die Versicherung ist am Ende des Rechnungsjahres noch in Kraft, resp. sie erlischt durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten. Die aufgezinste Einnahme ist

$$(128)\qquad E = \left({}_{t+1+\frac{k-1}{m}}V_x + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\sigma_1}$$

Die Ausgabe am Ende des Teilabschnittes ist

$$(129)\qquad A_1 = {}_{t+1+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right){}^{(m)}P_x$$

so dass der Gewinn oder Verlust gleich

$$(130)\qquad {}_{\sigma_1}G'_{x+t+1+\frac{k-1}{m}}$$

$$= {}_{\sigma_1}R_{x+t+1+\frac{k-1}{m}} \cdot v^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} = {}_{\sigma_1}R'_{x+t+1+\frac{k-1}{m}}$$

β) Die Versicherung werde im Laufe des Teilabschnittes vor dem Ende des Rechnungsjahres durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten aufgelöst. Der Abgang erfolge nach $t + 1 + \frac{k-1}{m} + \sigma_2$ Jahren, wobei $\sigma_2 < \sigma_1$ ist. Die Ausgabe im Zeitpunkt der Auflösung ist aufgezinst auf das Ende des Rechnungsjahres

$$(131)\qquad A_2 = \left({}_{t+1+\frac{k-1}{m}+\sigma_2}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P_x\right)(1+i)^{\sigma_1-\sigma_2}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit folgt hieraus

$$(132)\qquad {}_{\sigma_2}G'_{x+t+1+\frac{k-1}{m}}$$

$$= {}_{\sigma_2}R_{x+t+1+\frac{k-1}{m}} \cdot v^{\frac{m-k+1}{m}-\sigma_1} = {}_{\sigma_2}R'_{x+t+1+\frac{k-1}{m}}$$

γ) Die Versicherung erlischt durch Tod des Versicherten im Laufe des Teilabschnittes. Die Einnahme berechnet sich nach (128), die Ausgabe nach (126); der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist

$$(133) \qquad {}_{\sigma_1}G''_{x+t+1+\frac{k-1}{m}} = {}_{\sigma_1}R'_{x+t+1+\frac{k-1}{m}}$$

$$+ {}_{t+1+\frac{k-1}{m}+\sigma_1}V_x + \left(\frac{1}{m} - \sigma_1\right) {}^{(m)}P_x - v^{\frac{m-k+1}{m} - \sigma_1}$$

5. Für eine im Laufe des Jahres eingetretene Versicherung berechnet sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach den unter 3 und 4 gegebenen Formeln, indem wir dort $t + 1 = 0$ setzen.

b. Versicherungen auf zwei Leben.

1. Bei der Kapitalversicherung auf das kürzeste von zwei Leben erhalten wir für den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Formeln. Wir haben dort V_{xy} statt V_x, ${}^{(m)}P_{xy}$ statt ${}^{(m)}P_x$ zu setzen und zu beachten, dass die Versicherungssumme fällig wird, sofern das Paar durch den Tod der einen der beiden Personen aufgelöst wird.

2. Für die übrigen in den früheren Kapiteln besprochenen Kapitalversicherungen auf zwei Leben erhalten wir analoge Formeln für den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit wie im Abschnitte *a*, sofern die Versicherung am Ende des Abschnittes noch unverändert besteht, resp. sofern sie im Laufe desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten weggefallen ist. Wir haben dort nur statt V_x und ${}^{(m)}P_x$ das Deckungskapital und die Nettoprämie für die in Frage stehende Versicherungsart einzusetzen.

Stirbt dagegen die eine der beiden Personen oder sterben beide Personen, so ändern sich die im Abschnitt *a* für den Todesfall abgeleiteten Formeln zur Berechnung von Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit. In den folgenden Ableitungen sollen noch die Formeln für die Berechnung von Gewinn oder

Verlust auf der Sterblichkeit bei der Auflösung eines Paares durch Tod entwickelt werden.

3. Die Versicherung auf zwei Leben sei in der Weise abgeschlossen, dass die Prämie während dem Zusammenleben des Paares bezahlt, die Versicherungssumme nur beim Tode der einen der beiden Personen z. B. der x-jährigen Person fällig wird. Es sind für den r. Abschnitt des $(t+1.)$ Jahres die folgenden Fälle zu unterscheiden:

α) Es stirbt entweder die x-jährige Person oder es sterben beide Personen. Da in beiden Fällen die Versicherungssumme auszuzahlen ist, so ergibt sich als Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{m}}G''^{1}_{xy:t+\frac{r-1}{m}} &= \left({}_{t+\frac{r-1}{m}}V^{1}_{xy} + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P^{1}_{xy}\right)(1+i)^{\frac{m-r+k}{m}+\sigma_1} \\
(134) \qquad & \quad - (1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \\
&= {}_{\frac{1}{m}}R'^{1}_{xy:t+\frac{r-1}{m}} + {}_{t+\frac{r}{m}}V^{1}_{xy}(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1} - (1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}
\end{aligned}
$$

β) Es stirbt die y-jährige Person, während der x-jährige Versicherte am Ende des Abschnittes noch lebt. Da für den Überlebenden das Deckungskapital einer prämienfreien Versicherung zu bestellen ist, so folgt der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit zu

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{m}}G''^{1}_{xy:t+\frac{r-1}{m}} &= \left({}_{t+\frac{r-1}{m}}V^{1}_{xy} + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P^{1}_{xy}\right)(1+i)^{\frac{m-r+k}{m}+\sigma_1} \\
(135) \qquad & \quad - {}_{t+\frac{r}{m}}V_{x}(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1} \\
&= {}_{\frac{1}{m}}R'^{1}_{xy:t+\frac{r-1}{m}} - \left({}_{t+\frac{r}{m}}V_{x} - {}_{t+\frac{r}{m}}V^{1}_{xy}\right)(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1}
\end{aligned}
$$

Für die übrigen Abschnitte und Teilabschnitte im Rechnungsjahr ergeben sich analoge Formeln.

4. Bei der Versicherung auf zwei Leben soll die Versicherungssumme beim Tode der zuletzt sterbenden Person fällig werden; die überlebende Person habe aber die ihrem Eintrittsalter entsprechende Prämie für die Versicherung auf ein Leben weiter zu bezahlen. Sterben beide Personen z. B. im Laufe des r. Abschnittes des $(t+1.)$ Versicherungsjahres, so ist die Versicherungssumme auszuzahlen und der Gewinn oder Verlust findet sich nach einer der Gleichung (134) analogen Formel. Stirbt im Laufe des Abschnittes die eine der beiden Personen, während die andere am Ende desselben noch lebt, so ist für die überlebende Person am Ende des Abschnittes das Deckungskapital einer prämienfreien Versicherung zu bestellen. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit findet sich mit den entsprechenden Modifikationen nach Gleichung (135).

5. Die Kapitalversicherung auf zwei Leben sei in der Weise abgeschlossen, dass die Prämienzahlung mit der Auflösung des Paares aufhört und die Versicherungssumme mit dem Tode der zuletzt sterbenden Person fällig wird. Für den r. Abschnitt findet sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach Analogie von Gleichung (134), wenn beide Personen im Laufe des Abschnittes sterben, nach Gleichung (135), wenn nur die eine der beiden Personen stirbt.

B. Kapitalversicherungen auf den Lebensfall.

a) Versicherungen auf ein Leben.

1. Für die Kapitalversicherung auf den Lebensfall ohne Rückgewähr der Einlagen im Todesfall berechnet sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterb-

lichkeit nach den für die Kapitalversicherung auf den Todesfall mitgeteilten Formeln. Wir haben dort der Risikoprämie das entgegengesetzte Zeichen zu geben und im Todesfall des Versicherten die Ausgabe für die Versicherungssumme gleich 0 zu setzen.

2. Die Kapitalversicherung auf den Lebensfall mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ermittelt sich nach denselben Formeln wie für die Kapitalversicherung ohne Rückgewähr, sofern die Versicherung am Ende eines Abschnittes oder Teilabschnittes noch unverändert in Kraft besteht, oder im Laufe desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten erlischt. Stirbt der Versicherte z. B. im Laufe des r. Abschnittes des $(t+1.)$ Versicherungsjahres, so ist der Betrag der Rückgewähr auszurichten. Die Einnahme am Anfang des Abschnittes ist nach Gleichung (115) zu bestimmen, die aufgezinste Ausgabe an Rückfallssummen ist

$$A = \left(t + \frac{r}{m}\right)^{(m)}(r\pi)_x \, (1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \tag{136}$$

so dass der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{m}}G''_{x+t+\frac{r-1}{m}} = {}_{t+\frac{r}{m}}V_x \, (1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1} \\ - {}_{\frac{1}{m}}R'_{x+t+\frac{r-1}{m}} - \left(t + \frac{r}{m}\right)^{(m)}(r\pi)_x \, (1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} \end{aligned} \tag{137}$$

b) Versicherungen auf zwei Leben.

1. Die Formeln zur Berechnung von Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ergeben sich für die Aussteuerversicherung auf zwei Leben, bei welcher die Versicherungssumme nach Ablauf der Versicherungs-

zeit nur an die zusammenlebenden Paare auszurichten ist, während die Prämienzahlung mit der Auflösung des Paares aufhört, aus den Formeln für die Versicherung auf ein Leben, indem wir V_x und ${}^{(m)}P_x$ durch V_{xy} und ${}^{(m)}P_{xy}$ ersetzen.

2. Für die übrigen in den früheren Kapiteln in Betracht gezogenen Aussteuerversicherungen auf zwei Leben wird der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach denselben Formeln wie für die Versicherung auf ein Leben ermittelt, wenn die Versicherung am Ende eines Abschnittes noch unverändert in Kraft besteht, oder im Laufe desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten erlischt. Dabei sind V_x und ${}^{(m)}P_x$ durch das Deckungskapital und die Nettoprämie der in Frage stehenden Versicherungsart zu ersetzen.

Stirbt die versorgte Person, oder sterben beide Personen, so findet sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach Analogie von Gleichung (134). Stirbt der Versorger, resp. die eine der beiden Personen, während die versorgte, resp. die andere Person noch lebt, so ist der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach Analogie von Gleichung (135) zu berechnen. Dabei ist der Risikoprämie das negative Zeichen zu geben, die Ausgabe für Sterbesummen gleich 0 zu setzen, und es sind für die Prämie, das Deckungskapital und die Risikoprämie die der Versicherungsart entsprechenden Werte zu substituieren.

C. Renten.

a) Versicherungen auf ein Leben.

1. Für die einfache Leibrente ohne Rückgewähr der Einlagen berechnet sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach den für die Kapitalversiche-

rung auf den Todesfall abgeleiteten Formeln, wobei der Risikoprämie das entgegengesetzte Zeichen zu geben, die Ausgabe für die Versicherungssumme im Todesfall des Versicherten gleich 0, und das Deckungskapital mehr der aufgelaufenen Rente an Stelle des Dekungskapitals mehr der nicht verbrauchten Nettoprämie einzusetzten ist.

2. Die einfache Leibrente mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall, abz. den bezogenen Renten. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist, wenn der Versicherte das Ende eines Abschnittes resp. Teilabschnittes erlebt, oder beim freiwilligen Abgang bei Lebzeiten, nach denselben Formeln wie für die einfache Leibrente zu berechnen. Beim Todesfall des Versicherten während den Rückgewährsjahren ist der Betrag der Rückgewähr auszurichten, so dass der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit aus den Formeln für die einfache Leibrente ohne Rückgewähr erhalten wird, indem wir noch die aufgezinste Rückfallssumme abziehen. Beim Tode im r. Abschnitt des ($t+1$.) Versicherungsjahres z. B. ist der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit

$$(138)\quad {}_{\frac{1}{m}}G''_{x+t+\frac{r-1}{m}} = \left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{r}{m}}V_x\right)(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1}$$

$$- {}_{\frac{1}{m}}R'_{x+t+\frac{r-1}{m}} - \left({}^{(m)}(ra)_x - \left(t + \frac{r-1}{m}\right)\right)(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1}$$

3. Betreffend die temporäre Leibrente und die aufgeschobene Leibrente (Altersrente) gelten die unter II, C, a, 4 und 5 aufgeführten Bemerkungen.

b) Versicherungen auf zwei Leben.

1. Die verbundene Leibrente auf das kürzeste von zwei Leben. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterb-

lichkeit bestimmt sich nach denselben Formeln wie für die einfache Leibrente, wobei statt V_x das Deckungskapital für die verbundene Rente einzusetzen ist.

2. Bei der verbundenen Leibrente auf das längste von zwei Leben wird der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach den gleichen Formeln wie für die einfache Leibrente ermittelt, wenn die Versicherung am Ende eines Abschnittes noch unverändert in Kraft besteht, oder wenn sie im Laufe desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten erlischt. Dabei ist $V_{\overline{xy}}$ an Stelle von V_x zu setzen.

Beim Todesfall der einen Person oder der beiden Personen kommen die Formeln (134) und (135) mit den entsprechenden Modifikationen zur Anwendung.

3. Die aufgeschobenen verbundenen Leibrenten sind während der Aufschubszeit wie die entsprechenden Kapitalversicherungen auf den Lebensfall, während den Rentenjahren wie die entsprechenden sofort beginnenden Renten zu behandeln.

4. Für die einseitige Überlebensrente (Witwenrente) findet sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit während dem Zusammenleben des Paares nach denselben Formeln wie für eine Kapitalversicherung auf den Lebensfall für ein Leben, wenn die Versicherung am Ende eines Abschnittes noch in Kraft besteht oder im Laufe desselben durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten wegfällt. Dabei sind V_x und ${}^{(m)}P_x$ durch $V_{x/y}$ und ${}^{(m)}P_{x/y}$ zu ersetzen.

Stirbt die begünstigte Person oder sterben beide Personen, so berechnet sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit nach Gleichung (134). Stirbt der Versorger, während die begünstigte Person am Ende des Abschnittes noch lebt, so findet sich der Gewinn oder Verlust nach Gleichung (135). Wir haben dabei die Ausgabe für die Versicherungssumme gleich 0, $V_{x/y}$ statt $V_{\overline{xy}}$ zu setzen, der Risikoprämie das entgegengesetzte Zeichen zu geben und statt V_y das Deckungskapital für die begünstigte Person mehr aufgelaufene Rente einzusetzen.

D. Invaliditätsversicherungen.

Wir teilen die Formeln zur Bestimmung von Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung nur für den r. Abschnitt im $(t+1.)$ Versicherungsjahr mit. Dabei haben wir die folgenden Fälle zu unterscheiden:

α) Der Versicherte lebt am Ende des Abschnittes noch als aktiv. Die Einnahme am Anfang des Abschnittes ist aufgezinst

$$(139) \qquad E = \left({}_{t+\frac{r-1}{m}}V_x^{aa} + \frac{1}{m}\,{}^{(m)}P_x^{aa}\right)(1+i)^{\frac{m-r+k}{m}+\sigma_1}$$

Die aufgezinste Ausgabe am Ende des Abschnittes ist

$$(140) \qquad A_1 = {}_{t+\frac{r}{m}}V_x^{aa}(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1}$$

Demnach folgt der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung

$$(141) \qquad {}_{\frac{1}{m}}G'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}} = {}_{\frac{1}{m}}R^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}}(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\frac{1}{m}}R'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}}$$

β) Der Versicherte tritt im Laufe des Abschnittes als aktiv aus der Versicherung aus. Die aufgezinste Ausgabe zur Zeit des Austrittes ist

$$(142) \qquad A_2 = \left({}_{t+\frac{r-1}{m}+\sigma_2}V_x^{aa} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right){}^{(m)}P_x^{aa}\right)(1+i)^{\frac{m-r+k}{m}-(\sigma_2-\sigma_1)}$$

so dass der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung

$$(143)\qquad {}_{\sigma_2}G'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}} = {}_{\sigma_2}R^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}}(1+i)^{\frac{k-1}{m}+\sigma_1} = {}_{\sigma_2}R'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}}$$

γ) Der Versicherte stirbt als aktiv im Laufe des Abschnittes. Die Ausgabe ist gleich 0, somit der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung

$$(144)\qquad {}_{\frac{1}{m}}G''^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}} = {}_{\frac{1}{m}}R'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}} + {}_{t+\frac{r}{m}}V^{aa}_{x}(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1}$$

δ) Der Versicherte wird im Laufe des r. Abschnittes invalid und lebt als Invalide am Ende des Abschnittes. Der Versicherte erhält die Rente $\frac{1}{m}$ ausbezahlt und ausserdem ist für ihn das Deckungskapital für eine temporäre Invalidenrente zurückzustellen. Die Ausgabe ist demnach aufgezinst auf Ende des Jahres

$$(145)\qquad A_3 = \left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{r}{m}}V^{i}_{x}\right)(1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung folgt zu

$$(146)\qquad {}_{\frac{1}{m}}G''^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}} = {}_{\frac{1}{m}}R'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}} + \left[{}_{t+\frac{r}{m}}V^{aa}_{x} - \left(\frac{1}{m} + {}_{t+\frac{r}{m}}V^{i}_{x}\right)\right](1+i)^{\frac{m-r+k-1}{m}+\sigma_1}$$

ε) Der Versicherte wird im Laufe des r. Abschnittes invalid und tritt nachher vor dem Ende des Abschnittes infolge freiwilligen Abganges aus der Anstalt. Findet der Austritt nach $t + \frac{r-1}{m} + \sigma_2$ Jahren statt, so muss für den Invaliden das Deckungskapital mehr der aufgelaufenen Rente als Ausgabe eingesetzt werden; diese ist aufgezinst

$$(147)\qquad A_t = \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{r-1}{m}+\sigma_2}V_x^i\right)(1+i)^{\frac{m-r+k}{m}-(\sigma_2-\sigma_1)}$$

Der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung des Aktiven ist

$$(148)\qquad {}_{\sigma_2}G'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}} = {}_{\sigma_2}R'^{aai}_{x+t+\frac{r-1}{m}}$$

$$+\left[{}_{t+\frac{r-1}{m}+\sigma_2}V_x^{aa} + \left(\frac{1}{m} - \sigma_2\right)^{(m)}P_x^{aa}\right.$$

$$\left. - \left(\sigma_2 + {}_{t+\frac{r-1}{m}+\sigma_2}V_x^i\right)\right](1+i)^{\frac{m-r+k}{m}-(\sigma_2-\sigma_1)}$$

φ) Der Versicherte wird im Laufe des Abschnittes invalid und stirbt nachher vor dem Ende des Abschnittes. Die Ausgabe ist gleich 0, so dass sich der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung nach Gleichung (144) bestimmt.

Der Gewinn oder Verlust auf der Invaliditätsversicherung findet sich für die übrigen Abschnitte und Teilabschnitte des Rechnungsjahres nach analogen Formeln.

Zu erwähnen sind noch die am Anfang des Jahres vorhandenen Invaliden, welche während der Zeitstrecke σ_1 des k. Abschnittes invalid erklärt wurden und am Anfang des Jahres noch leben. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ermittelt sich für diese Invaliden nach den Formeln für die einfache Leibrente.

IV. Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität für die Gesamtheit der Versicherten im Rechnungsjahr.

Für eine einzelne Versicherung erhalten wir den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität während dem Lauf eines Jahres, indem wir den Gewinn oder Verlust für die einzelnen Abschnitte und Teilabschnitte vom Anfang des Jahres oder vom Eintritt an bis zum Ende des Jahres resp. bis zum Ablauf der Versicherung zusammenfassen. Dabei ist zu bemerken, dass der Ablauf der Versicherung bei Sterbefällen auf Ende des Sterbeabschnittes, im letzten Teilabschnitt auf Ende des Rechnungsjahres anzusetzen ist. Bei Invaliditätsfällen, sowie bei Sterbefällen von Invaliden im Invalidisierungsabschnitt gilt als Ablauf das Ende des Abschnittes, resp. im letzten Teilabschnitt das Ende des Jahres. Beim freiwilligen Abgang bei Lebzeiten fällt der Ablauf auf den Zeitpunkt des Erlöschens der Versicherung. Für die Gesamtheit der Versicherungen folgt der Gewinn oder Verlust zusammen durch Addition der Ergebnisse der einzelnen Versicherungen.

A. Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

Aus den im Abschnitt III A gegebenen Ableitungen ist ersichtlich, dass der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit für eine grössere Zahl von Kapitalversicherungen auf den Todesfall gefunden wird, indem wir zunächst die Summe der auf Ende des Rechnungsjahres aufgezinsten Risikoprämien für die Abschnitte resp. Teilabschnitte des Jahres festsetzen, während denen die Versicherungen in Kraft bestanden haben.

Zu dieser Summe ist hinzuzufügen die Summe der Deckungskapitalien am Ende der Sterbeabschnitte, aufgezinst auf Ende des Rechnungsjahres, für die Gestorbenen und die durch Tod aufgelösten Paare. Dabei kommt für den letzten Teilabschnitt das Deckungskapital mehr dem Nettoprämienübertrag am Ende des Jahres in Betracht. Das Total der Risikoprämien und der anheimgefallenen Deckungskapitalien ist zu kürzen um die Summe der im Laufe des Jahres fällig gewordenen Sterbesummen; diese sind aufzuzinsen auf Ende des Rechnungsjahres, sofern sie vor dem Beginn des neuen Versicherungsjahres fällig wurden, und zurückzudiskontieren auf Ende des Rechnungsjahres, wenn sie nach dem Beginn des neuen Versicherungsjahres fällig wurden. Dabei ist daran zu erinnern, dass die Sterbesummen als am Ende des Sterbejahres zahlbar vorausgesetzt wurden. Wird bei den verbundenen Versicherungen das Kapital nicht beim Tode der zuerststerbenden Person fällig, so ist für die überlebenden Versicherten die Summe der Deckungskapitalien am Ende der Sterbeabschnitte der zuerst gestorbenen Personen, aufzinst auf Ende des Jahres, resp. der Deckungskapitalien am Ende des Jahres mehr den Nettoprämienüberträgen, zurückzustellen.

Wir bezeichnen für einen grossen Bestand von Versicherten mit ΣR die Summe der auf Ende des Jahres aufgezinsten Risikoprämien von sämtlichen Versicherten für die Zeitabschnitte, während denen die Versicherungen in Kraft bestanden, ΣV_1 die Summe der auf Ende des Jahres aufgezinsten Deckungskapitalien, welche durch Tod von Versicherten oder durch die Auflösung von Paaren frei werden, ΣV_2 die Summe der auf Ende des Jahres aufgezinsten Deckungskapitalien, welche für die überlebenden Versicherten von durch Tod aufgelösten Paaren zurückzustellen sind, $\Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1}$ die Summe der auf Ende des Rechnungsjahres aufgezinsten Sterbesummen, welche vor Beginn der neuen Versicherungsjahre fällig geworden sind, wobei σ_1 die Zeit vom Beginn der neuen Versicherungsjahre bis zum 31. Dezember angibt, $\Sigma S_2 v^{1-\sigma_2}$ die Summe der auf Ende des Jahres zurückdiskontierten Sterbesummen, welche nach Beginn der neuen Versicherungsjahre fällig werden, wobei σ_2 die Zeit vom 31. Dezember bis zum Beginn der neuen Versicherungsjahre im folgenden Jahre bedeutet.

Dann ist der gesamte Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit, welcher mit ΣG bezeichnet sei, gegeben durch die Formel

$$\Sigma G = \Sigma R + \Sigma V_1 - \Sigma V_2 - \Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1} - \Sigma S_2 v^{1-\sigma_2} \tag{149}$$

Hier lassen sich die aufgezinsten Deckungskapitalien ΣV_1 der Gestorbenen und der aufgelösten Paare, sowie die aufgezinsten Deckungskapitalien ΣV_2, welche für die überlebenden Versicherten zurückzustellen sind, entsprechend den Versicherungsarten, den Altern beim Eintritt, den Vertragsdauern, der Zahl der Versicherungsjahre und der Versicherungssummen berechnen. Ebenso lassen sich die diskontierten Sterbesummen leicht ermitteln. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit lässt sich somit finden, sobald die auf Ende des Rechnungsjahres aufgezinste Risikoprämien-Einnahme gegeben ist.

Für die Formel (149) lässt sich noch eine Näherungsformel ableiten. Nehmen wir eine gleichmässige Verteilung der Versicherungen und der Sterbefälle über den Lauf des Jahres an, so kann, wie dies allgemein üblich ist, der durchschnittliche Eintrittstag der Versicherungen auf den 1. Juli angesetzt, und es können in beiden Hälften des Rechnungsjahres, d. h. vor und nach Beginn der neuen Versicherungsjahre, dieselben Summen als durch Tod abgegangen vorausgesetzt werden. Bezeichnet ΣS die gesamte Sterbesumme des Rechnungsjahres, so ist die eine Hälfte hiervon am 1. Juli des Jahres, die andere Hälfte am 1. Juli des folgenden Jahres zahlbar, so dass die Zahlung an Sterbesummen, auf Ende des Jahres bezogen, gleich ist

$$(150)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma S\left[(1+i)^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}\right]=\tfrac{1}{2}\Sigma S\left(1+\tfrac{1}{2}i+1-\tfrac{1}{2}i\right)$$
$$=\Sigma S$$

Es genügt deshalb, wenn näherungsweise statt der auf Ende des Jahres diskontierten Sterbesumme einfach die Sterbesumme eingesetzt wird, so dass der Sterblichkeitsgewinn oder Verlust sich nach der Formel berechnet

$$(151)\qquad \Sigma G=\Sigma R+\Sigma V_1-\Sigma V_2-\Sigma S$$

B. Kapitalversicherungen auf den Lebensfall.

Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ist für einen grösseren Bestand an Kapitalversicherungen auf den Lebensfall zufolge der Ableitungen im Abschnitt III *b* gleich der Summe der Deckungskapitalien, aufgezinst auf Ende des Rechnungsjahres, welche durch den Tod von Versicherten und für die durch Tod aufgelösten Paare am Ende des Sterbeabschnittes frei werden, wobei für die im letzten Teilabschnitt Gestorbenen das Deckungskapital mehr dem Nettoprämienübertrag am Ende des Jahres in Betracht kommt. Diese Summe ist zu vermindern um die Summe aller Risikoprämien für die Abschnitte resp. Teilabschnitte des Jahres, während denen die Versicherungen in Kraft bestanden haben. Ferner ist abzuziehen die Summe der durch Tod fällig gewordenen Rückfallssummen, aufgezinst auf Ende des Jahres für die Sterbefälle, welche vor dem Beginn der neuen Versicherungsjahre eintraten und zurückdiskontiert auf Ende des Jahres für die Sterbefälle, welche sich nach dem Beginn der neuen Versicherungsjahre ereigneten. Ausserdem ist noch abzuziehen die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien, welche am Ende der Sterbeabschnitte für die überlebenden Versicherten von durch Tod aufgelösten Paaren zurückzustellen sind.

Bezeichnet deshalb für einen grossen Bestand von Versicherten ΣV_1 die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien, welche durch den Tod von Versicherten oder durch die Auflösung von Paaren frei werden, ΣR die Summe aller aufgezinsten Risikoprämien für die Abschnitte resp. Teilabschnitte, während denen die Versicherungen im Laufe des Jahres in Kraft bestanden, $\Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1}$ die Summe der aufgezinsten Rückfallssummen, welche vor dem Beginn der neuen Versicherungsjahre fällig wurden, $\Sigma S_2 v^{1-\sigma_2}$ die Summe der auf Ende des Jahres zurückdiskontierten Rückfallssummen fällig für die Sterbefälle, welche nach Beginn der neuen Versicherungsjahre eintraten, ΣV_2 die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien, welche für die überlebenden Versicherten von durch Tod aufgelösten Paaren zurückzustellen sind, so ist der gesamte Gewinn oder Verlust ΣG auf der Sterblichkeit

$$(152) \qquad \Sigma G = \Sigma V_1 - \Sigma R - \Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1} - \Sigma S_2 v^{1-\sigma_2} - \Sigma V_2$$

Hierbei lässt sich die Summe ΣV_1 der aufgezinsten freiwerdenden Deckungskapitalien und die Summe

ΣV_2 der aufgezinsten zurückzustellenden Deckungskapitalien berechnen. Die Rückfallssummen ΣS_1 und ΣS_2 sind gegebene Werte, so dass der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit sich ermitteln lässt, sobald die Risikoprämieneinnahme gegeben ist.

In Gleichung (152) lässt sich zufolge Formel (150) näherungsweise

$$\Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1} + \Sigma S_2 v^{1-\sigma_2} = \Sigma S \tag{153}$$

setzen, wenn ΣS die gesamte im Laufe des Jahres fällig gewordene Rückfallssumme angibt. Demnach ist näherungsweise

$$\Sigma G = \Sigma V_1 - \Sigma R - \Sigma S - \Sigma V_2 \tag{154}$$

C. Renten.

Haben wir einen grossen Bestand der verschiedensten Rentenversicherungen, so ergibt sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit für denselben, gestützt auf die Ableitungen im Abschnitt III C, nach der folgenden Regel: Wir bilden die Summe der freiwerdenden aufgezinsten Deckungskapitalien, mehr den verfallenen Renten am Ende der Abschnitte, eventuell der Teilabschnitte, in deren Lauf die Versicherten gestorben sind oder die Paare durch den Tod aufgelöst wurden. Ferner bilden wir die Summe aller aufgezinsten Risikoprämien für die Abschnitte und Teilabschnitte, während denen die Versicherungen im Laufe des Jahres in Kraft bestanden. Dann haben wir für die Versicherungen mit Rückgewähr der Einlagen die Summe der Rückfallssummen zu ermitteln, welche durch Tod fällig geworden sind, auf- oder rückgezinst auf Ende des Jahres. Zum Schlusse haben wir noch für die verbundenen Versicherungen die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien mehr verfallenen Renten der überlebenden Versicherten von durch Tod getrennten Paaren zu berechnen.

Für den vorhandenen Versicherungsbestand bezeichnen wir mit ΣV_1 die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien mehr verfallenen Renten, welche durch den Tod von Versicherten oder durch die Auflösung von Paaren frei werden, ΣR die Summe aller aufgezinsten Risikoprämien berechnet für die Abschnitte und Teilabschnitte des Rechnungsjahres, während denen die Versicherungen im Laufe des Jahres in Kraft bestanden, $\Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1}$ die Summe der aufgezinsten Rückfallssummen, welche bei den Versicherungen mit Rückgewähr vor dem Beginn der neuen Versicherungsjahre fällig wurden, $\Sigma S_2 v^{1-\sigma_2}$ die Summe der rückgezinsten Rückfallssummen, welche nach Beginn der neuen Versicherungsjahre fällig wurden, ΣV_2 die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien mehr verfallenen Renten, welche für die überlebenden Versicherten bei den durch Tod aufgelösten Paare zurückzustellen sind. Alsdann ist der gesamte Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit ΣG gegeben durch die Formel

$$\Sigma G = \Sigma V_1 - \Sigma R - \Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1} - \Sigma S_2 v^{1-\sigma_2} - \Sigma V_2 \tag{155}$$

oder näherungsweise durch die Formel

$$\Sigma G = \Sigma V_1 - \Sigma R - \Sigma S - \Sigma V_2 \tag{156}$$

Hier lassen sich die aufgezinsten Deckungskapitalien ΣV_1 und ΣV_2 berechnen; der Betrag der Rückfallssummen ΣS ist gegeben. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit lässt sich also wieder ermitteln, sobald die Summe der Risikoprämien bekannt ist.

D. Invaliditätsversicherungen.

Haben wir einen grösseren Bestand von Versicherungen auf den Invaliditätsfall, so ergibt sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität der Aktiven, sowie auf der Sterblichkeit der Invaliden im Invalidisierungsabschnitt, nach den Ableitungen im Kapitel III D, durch die folgende Regel: Wir bestimmen die Summe der Risikoprämien der Aktiven, auf Ende des Jahres aufgezinst, für die Abschnitte oder Teilabschnitte des Jahres, während denen die Versicherungen in Kraft bestanden. Zu dieser Summe haben wir hinzuzufügen die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien, eventuell mehr nicht verbrauchten Nettoprämien der Aktiven am Ende der Abschnitte oder Teilabschnitte, in deren Lauf sie als aktiv sterben oder invalid werden. Beim Austritt eines Invaliden kommt das Deckungskapital zur Zeit des Austrittes in Betracht. Hinzuzufügen ist ferner das aufgezinste Deckungskapital mehr der aufgelaufenen Rente am Ende des ersten Teilabschnittes für die am Anfang des Jahres lebenden aus dem k. Abschnitt stammenden und im Laufe des ersten Teilabschnittes gestorbenen Invaliden. Hiervon ist abzuziehen die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien für die vorschussweisen temporären Invalidenrenten (Deckungskapitalien mehr aufgelaufenen Renten) auf Ende des Invalidisierungsabschnittes oder den Zeitpunkt des Austrittes berechnet für die lebenden oder ausgetretenen Invaliden. Ausserdem haben wir abzuziehen die Summe der Risikoprämien für die am Anfang des Jahres lebenden aus dem k. Abschnitt stammenden Invaliden für die Zeit, während welcher sie im ersten Teilabschnitte versichert waren.

Für den vorhandenen Versicherungsbestand bezeichnen wir mit ΣR^a die Summe der auf Ende des Jahres aufgezinsten Risikoprämien der Aktiven für die Abschnitte und Teilabschnitte des Jahres ermittelt, während denen sie unter Risiko standen, ΣR^i die Summe der Risikoprämien der am Anfang des Jahres lebenden aus dem k. Abschnitt stammenden Invaliden für die Zeit eingesetzt, während der ihre Versicherungen im Laufe des ersten Teilabschnittes in Kraft waren, ΣV^a die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien der Aktiven, welche durch den Tod oder die Invalidität derselben frei werden, ΣV_1^i die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien der Invaliden aus dem ersten Teilabschnitt, welche im Laufe desselben sterben, ΣV_2^i die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien mehr aufgelaufenen Renten der Invaliden, welche am Ende des Invalidisierungsabschnittes leben, resp. im Laufe desselben austreten. Der gesamte Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität der Aktiven und der Sterblichkeit der Invaliden im ersten Teilabschnitt des Jahres ist dann gleich

$$(157) \quad \Sigma G^a = \Sigma R^a + \Sigma V^a + \Sigma V_1^i - \Sigma R^i - \Sigma V_2^i$$

Hier können die aufgezinsten Deckungskapitalien ΣV^a, ΣV_1^i und ΣV_2^i leicht durch direkte Berechnung gefunden werden. Der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität der Aktiven, sowie der Sterblichkeit der Invaliden im Invalidisierungsabschnitt lässt sich ermitteln, sobald die Risikoprämieneinnahme bekannt ist.

Das hier gegebene Verfahren bezweckt die Ermittlung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität der Aktiven und der Sterblichkeit der Invaliden im Invalidisierungsabschnitt. Soll der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit der Invaliden überhaupt mit einbezogen werden, so haben wir unter ΣV_1^i die Summe der aufgezinsten Deckungskapitalien mehr verfallenen Renten zu verstehen, welche durch den Tod der sämtlichen Invaliden im Laufe des Jahres frei werden und unter ΣR^i die Summe der Risikoprämien für alle Invaliden. In diesem Falle erhalten wir ausser dem Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität der Aktiven auch noch den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit der Invaliden. Bezeichnen wir die Summe beider mit $\Sigma G^a + \Sigma G^i$, so wird

$$(158) \quad \Sigma G^a + \Sigma G^i = \Sigma R^a + \Sigma V^a + \Sigma V_1^i - \Sigma R^i - \Sigma V_2^i$$

Unter dieser Voraussetzung brauchen wir die Invaliden am Ende des Invalidisierungsabschnittes nicht in eine besondere Gruppe überzutragen, wir lassen vielmehr die Aktiven und Invaliden in einer Gruppe zusammen und erhalten so den Gewinn oder Verlust auf der Invalidität überhaupt.

V. Berechnung der Risikoprämien für die Gesamtheit der Versicherten im Rechnungsjahr.

Im vorhergehenden Kapitel haben wir nachgewiesen, dass sich der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität berechnen lässt, sobald die auf Ende des Rechnungsjahres aufgezinste Risikoprämie bekannt ist. Umgekehrt lässt sich die Risikoprämie ermitteln, sobald der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität gegeben ist. Nach den Formeln des vorigen Kapitels und unter Benutzung der dort gegebenen Bezeichnungen ist demzufolge die aufgezinste Risikoprämie für die Kapitalversicherungen auf den Todesfall

$$(159)\quad \Sigma R = \Sigma G + \Sigma V_2 + \Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1} + \Sigma S_2 v^{1-\sigma_2} - \Sigma V_1$$

oder näherungsweise

$$(160)\quad \Sigma R = \Sigma G + \Sigma V_2 + \Sigma S - \Sigma V_1$$

für die Kapitalversicherungen auf den Lebensfall

$$(161)\quad \Sigma R = \Sigma V_1 - \Sigma G - \Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1} - \Sigma S_2 v^{1-\sigma_2} - \Sigma V_2$$

oder näherungsweise

$$(162)\quad \Sigma R = \Sigma V_1 - \Sigma G - \Sigma S - \Sigma V_2$$

für die Renten

$$(163)\quad \Sigma R = \Sigma V_1 - \Sigma G - \Sigma S_1 (1+i)^{\sigma_1} - \Sigma S_2 v^{1-\sigma_2} - \Sigma V_2$$

oder näherungsweise

$$(164)\quad \Sigma R = \Sigma V_1 - \Sigma G - \Sigma S - \Sigma V_2$$

und für die Invaliditätsversicherungen

$$(165)\quad \Sigma R^a - \Sigma R^i = \Sigma G^a + \Sigma G^i - \Sigma V^a - \Sigma V_1^i + \Sigma V_2^i$$

Im nachfolgenden Abschnitt geben wir eine Methode zur direkten Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität, welche sich der Hauptsache nach an die Methoden von Landree und Bohlmann anschliesst.

Im Laufe des Jahres 1895 hat der unterzeichnete Verfasser unter Mitwirkung von Herrn Direktor Schaertlin eine Methode aufgestellt zur Zerlegung des Jahresgewinnes einer Lebensversicherungsgesellschaft in seine einzelnen Bestandteile, den Gewinn auf der Sterblichkeit, den Zuschlägen, den Zinsen und dem

Abgang bei Lebzeiten. Seit diesem Jahre hat die Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt die Zerlegung des erzielten Jahresgewinnes in seine einzelnen Bestandteile nach der aufgestellten Methode vorgenommen.

VI. Methode zur Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität für die Gesamtheit der Versicherten im Rechnungsjahr.

Die Methode zur Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität ist eine Netto-Gewinn- und Verlustrechnung. Die hier zu entwickelnde Methode kann mit wenigen Abweichungen für die in den vorhergehenden Abschnitten besprochenen vier Versicherungsformen: Die Kapitalversicherungen auf den Todesfall, die Kapitalversicherungen auf den Lebensfall, die Renten und die Invaliditätsversicherungen, angewandt werden. Die Abweichungen werden jeweilen für die betreffenden Versicherungsformen angeführt. Die Methode lässt sich auch mit den entsprechenden Modifikationen für alle in der Praxis gebräuchlichen Zahlungsarten der Prämien und Renten (jährlich, halbjährlich, vierteljährlich, monatlich und wöchentlich) verwenden. Die in Frage kommenden Modifikationen werden jeweilen besonders hervorgehoben. Bei unterjähriger Zahlung der Prämien und Renten soll, wenn nicht eine Ausnahme erwähnt ist, wie in den vorangehenden Ableitungen die Voraussetzung getroffen werden, dass die einzelnen Raten der Prämien und Renten nicht gestundete Teile sind, welche also nur geschuldet werden, wenn der Versicherte den Zahlungstermin erlebt.

Bei der zur Anwendung gelangenden Gewinn- und Verlustrechnung schreiben wir den verschiedenen Versicherungsformen die ihnen zukommenden unten näher zu bezeichnenden Einnahmen gut, belasten sie dagegen mit den auf sie entfallenden Ausgaben. Die Differenz zwischen Einnahmen und Ausgaben gibt den Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit und der Invalidität.

1. Als *Einnahmen* haben wir aufzuführen:

a) Das *Deckungskapital* der am Ende des Vorjahres bestehenden Versicherungen einschliesslich Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss für ein ganzes Jahr berechnet.

Bei den Invaliditätsversicherungen kann das Deckungskapital der Invaliden mit dem der Aktiven zusammengefasst werden, wenn es sich nur darum handelt, den Gewinn oder Verlust auf der Invalidität überhaupt zu ermitteln.

Das Deckungskapital zur Zeit der Bilanz sollte nach den im Abschnitt I mitgeteilten Formeln, entsprechend den alsdann in Betracht fallenden Versicherungsdauern berechnet werden, indem die für die Ermittlung von Gewinn oder Verlust, sowie der Risikoprämie abgeleiteten Beziehungen nur unter dieser Voraussetzung genaue Resultate geben. Die Formeln zur Berechnung des Deckungskapitals können aber nur praktische Anwendung finden, wenn über den Verlauf der Sterblichkeit und der Invalidität während dem Laufe eines Jahres bestimmte Annahmen getroffen werden. Wir haben es unterlassen, solche Formeln abzuleiten, verweisen vielmehr auf den Aufsatz von H. Köppler in der Österreichischen Revue, Jahrgang 1908, Nrn. 50 und 51, Jahrgang 1909, Nrn. 1 und 2: „Eine

Normalmethode zur Berechnung der Bilanzreserven und der Risikoprämie des Geschäftsjahres."

Für die praktischen Bedürfnisse wird es in den meisten Fällen genügen, wenn das Deckungskapital am Ende des Jahres nach der allgemein gebräuchlichen Methode als das arithmetische Mittel der Deckungskapitalien nach t und $t+1$ Jahren eingesetzt wird, so dass also

$$(166) \qquad {}_{t+\frac{1}{2}}V = \frac{1}{2}\left({}_tV + {}_{t+1}V\right)$$

b) Ferner kommt die *Verwaltungskostenreserve* am Ende des Vorjahres in Betracht, welche einzelne Anstalten bei den prämienfreien Kapitalversicherungen und Renten, den Kapitalversicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung und den Altersrenten während der Aufschubszeit zurückstellen. Die Zinsen sind zum rechnungsmässigen Zinsfuss für ein Jahr einzusetzen.

c) Bei den Kapitalversicherungen auf den Todesfall ist ausserdem noch das *Deckungskapital* zu berücksichtigen, welches bei einzelnen Gesellschaften *für die Zuschlagsprämien der anormalen Risiken* reserviert wird. Der Betrag desselben ist am Anfang des Jahres mehr Zinsen für ein Jahr als Einnahme aufzunehmen.

d) Der *Netto-Prämienübertrag* am Ende des Vorjahres vermehrt um die Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss für ein Jahr.

Prämienüberträge kommen bei allen Versicherungen in Betracht, für welche Prämien bezahlt werden, und bei denen das Versicherungsjahr mit dem Datum des Eintrittstages beginnt. Die Prämienüberträge, also die am 31. Dezember nicht verbrauchten Teile der Nettoprämien sind pro rata der Anzahl von Tagen vom Ende des Jahres bis zum Verfalltag der nächsten

Prämienrate einzusetzen. In der Regel werden die Prämienüberträge nicht nach dieser genauen Formel ermittelt, indem nach derselben die Berechnung des Übertrages für jede einzelne Versicherung erforderlich ist. Einen Näherungswert für den gesamten Übertrag erhalten wir durch die Annahme einer gleichmässigen Verteilung der Versicherungen über den Lauf eines Jahres, so dass der Prämienübertrag gleich ist der halben Summe an Prämien, welche für die am 31. Dezember bestehenden Versicherungen am Anfang der Abschnitte fällig werden, in deren Lauf der 31. Dezember fällt. Der Netto-Prämienübertrag ist, sofern die Prämien sämtlich in m gleichen Raten im Laufe eines Jahres zu zahlen sind, gleich

$$(167) \qquad \frac{1}{2m} \Sigma^{(m)} P_x$$

wobei $\Sigma^{(m)} P_x$ die jährliche Netto-Prämiensumme der am 31. Dezember noch in Kraft bestehenden Versicherungen angibt.

Der Netto-Prämienübertrag ist nicht nur für die eigentlichen Versicherungsprämien einzusetzen, sondern auch für die Prämien zur Bestellung der Verwaltungskosten und für die Zuschlagsprämien der anormalen Risiken.

e) Der *Rentenübertrag* am Ende des Vorjahres vermehrt um die Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss für ein Jahr berechnet.

Rentenüberträge sind für alle im Rentenbezug befindlichen Renten und Invaliditätsversicherungen einzustellen. Der Rentenübertrag ist pro rata der Anzahl von Tagen seit der Einlage, resp. seit Verfall der letzten Rente oder Rentenrate zu berechnen. Wenn eine gleichmässige Verteilung der Eintritte über den

Lauf eines Jahres stattfindet und sämtliche Renten in gleich vielen Raten im Laufe eines Jahres zu zahlen sind, so berechnet sich der gesamte Rentenübertrag für alle Renten näherungsweise wie der Prämienübertrag zu

$$\frac{1}{2m} \Sigma r \tag{168}$$

wobei Σr die Summe aller jährlichen Renten der Rentenbezüger bedeutet.

f) Der *Verwaltungskostenübertrag* am Ende des Vorjahres einschliesslich den Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss für ein Jahr. Die Überträge sind für alle prämienfreien Kapitalversicherungen und Renten einzusetzen, für welche eine Verwaltungskostenreserve zurückgestellt wird. Der Verwaltungskostenübertrag berechnet sich bei den prämienfreien Kapitalversicherungen vorschussweise gleich einem halben Jahresbeitrag der Versicherungen. Bei den Renten im Rentenbezug ist er gleich einem bestimmten Prozentsatz des Rentenübertrages, indem die Versicherung von Verwaltungskostenbeiträgen als eine Rentenversicherung zu betrachten ist, bei der die fälligen Renten zur Bestreitung der Verwaltungskosten dienen. Bei den prämienfreien Altersrenten ist der Übertrag während der Aufschubszeit vorschussweise gleich einem halben Jahresbeitrag.

g) Das *Deckungskapital* mehr dem *Nettoprämienübertrag* am Ende des Vorjahres, einschliesslich den rechnungsmässigen Zinsen für ein Jahr, für alle im Laufe des Jahres *reaktivierten Versicherungen.* Bei der Reaktivierung von im Vorjahre mangels Prämienzahlung erloschenen oder prämienfrei gewordenen Versicherungen sind die rückständigen Prämienraten inkl.

Zinsen nachzuzahlen, wodurch die Versicherungen in ihrer ursprünglichen Höhe wieder in Kraft treten. Das Risiko für die Gesellschaft läuft zwar erst von der Reaktivierung an, so dass eigentlich das Deckungskapital zur Zeit der Reaktivierung mehr den Zinsen bis zum Ende des Jahres einzusetzen wäre. Es ist aber für die Rechnung bequemer, wenn angenommen wird, die Reaktivierungen erfolgen mit Beginn des Jahres, so dass auch der Gewinn oder Verlust auf der Sterblichkeit der wieder in Kraft gesetzten Versicherungen für ein ganzes Jahr in Betracht fällt.

h) Die *Nettoprämieneinnahme*, vermehrt um die Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss vom Tage der Fälligkeit der Nettoprämien oder Raten an bis zum Ende des Jahres gerechnet.

Bei der Berechnung der Nettoprämieneinnahme tritt folgendes Verfahren in Kraft. Sämtliche Versicherungen, ausgenommen die mit wöchentlicher Zahlung der Prämien werden, in

$$\frac{12}{m}$$

Gruppen eingeteilt, so dass bei

α)	jährlicher	Zahlung	der	Prämien	12	Gruppen,
β)	halbjährlicher	„	„	„	6	„
γ)	vierteljährlicher	„	„	„	3	„
δ)	monatlicher	„	„	„	1	Gruppe

gebildet werden.

ε) Bei wöchentlicher Zahlung der Prämien teilen wir die Versicherungen in 52 Gruppen ein.

Ad *α*. Bei jährlicher Prämienzahlung werden die Versicherungen, welche in denselben Monaten der verschiedenen Jahre eingetreten sind, je als eine besondere Gruppe betrachtet und die Prämiensummen einer jeden dieser 12 Gruppen auf Ende des Vorjahres festgesetzt. Zu der Summe einer Gruppe wird die Prämiensumme der dazu gehörigen reaktivierten Versicherungen, sowie der in demselben Monat neu abgeschlossenen Versicherungen, abzüglich der nicht eingelösten, hinzugefügt und die Prämiensumme der vor Verfall der neuen Prämie weggefallenen Versicherungen abgezogen. Der Rest gibt die Nettoprämiensumme einer Gruppe, welche für das Rechnungsjahr in Betracht fällt. Ist für einen Monat s_0 die Prämiensumme am am Anfang des Jahres, s' die Prämiensumme der dazu gehörigen reaktivierten Versicherungen, e die Prämiensumme der neu eingetretenen Versicherungen abz. nicht eingelöste und a die Prämiensumme der vor Verfall der Prämie weggefallenen Versicherungen, so ist die Prämieneinnahme dieses Monates, resp. die in diesem Monat fällige Prämiensumme

$$s_0 + s' + e - a \tag{169}$$

Werden die Prämien jeweilen mit dem Datum des Eintrittstages fällig, so hat die Verzinsung für $12\frac{1}{2} - n$ Monate zu erfolgen, wenn es sich um den *nten* Monat des Jahres handelt, und sich die Eintritte gleichmässig über den Lauf des Monates verteilen. Sind die Erneuerungsprämien dagegen am 1. des Monats fällig, so ist die Verzinsung des Betrages $s_0 + s' - a$ für $13 - n$ Monate, der Eintrittsprämien für $12\frac{1}{2} - n$ Monate vorzunehmen.

Dieses Verfahren muss Platz greifen, wenn die in den einzelnen Monaten fälligen Prämiensummen erheblich von einander verschieden sind. Wenn dagegen die fälligen Prämiensummen der einzelnen Monate nur wenig von einander abweichen, so kann das ganze Jahr auch als eine Gruppe betrachtet werden.

Bezeichnet alsdann Σs_0 die Prämiensumme der am 1. Januar bestehenden Versicherungen, $\Sigma s'$ die Prämiensumme der reaktivierten Versicherungen, Σe die Prämiensumme der im Laufe des Jahres neu eingetretenen Versicherungen abzüglich die nicht eingelösten, Σa die Prämiensumme der zwischen dem 1. Januar und dem Verfalltermin der Prämien weggefallenen Versicherungen, so ist

$$\Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e - \Sigma a \tag{170}$$

die im Laufe des Jahres fällig werdende Prämiensumme. Dieser Betrag ist näherungsweise für ein halbes Jahr zu verzinsen.

Erfolgt die Zahlung der Prämien in zwei oder mehr Raten im Laufe eines Jahres, wobei die einzelnen Raten gestundeste Teile der Prämien darstellen, so müssen solche Versicherungen dieselben Beiträge zum Sterblichkeitsgewinn liefern wie Versicherungen mit Jahresprämien. Fällt eine Versicherung mit ratenweiser Zahlung der Prämien durch Tod weg, so werden die gestundeten Raten von der Versicherungssumme abgezogen. Wenn eine solche Versicherung durch freiwilligen Abgang bei Lebzeiten erlischt, und einzelne Raten des laufenden Versicherungsjahres noch nicht bezahlt sind, so werden diese für die Ermittlung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität als eingegangen betrachtet. Dagegen sind die nicht eingegangenen Raten der Prämien bei der Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf dem Abgang bei Lebzeiten in der Weise zu verrechnen, dass dieser um die nicht eingegangenen Raten gekürzt wird. Besteht eine Versicherung mit ratenweiser Prämienzahlung am Ende des Jahres noch in Kraft, so haben wir bei der Ermittlung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität die dem Rechnungsjahr zugehörige Prämieneinnahme einzusetzen. Diese finden wir, indem wir entweder für alle Versicherungen eine ganze Prämie verrechnen, oder indem wir zu der im Laufe des Jahres eingegangenen Prämie die gestundeten Raten am Ende des Jahres zufügen, die gestundeten Raten am Anfang des Jahres abziehen.

Ad β. Werden die Prämien in halbjährlichen nicht gestundeten Raten bezahlt, so haben wir sechs verschiedene Gruppen zu bilden, und zwar sind die Versicherungen eingetreten in den Monaten

Januar	Juli
Februar	August
März	September
April	Oktober
Mai	November
Juni	Dezember

je in eine Gruppe zu vereinigen. Für jede dieser Gruppen wird der Stand der jährlichen Nettoprämien am 1. Januar gebildet und zu deren Summe die Nettoprämiensumme der zugehörigen im Laufe des Jahres reaktivierten Versicherungen hinzugefügt.

Die Nettoprämieneinnahme des Jahres ergibt sich durch das folgende Verfahren: Für die Gruppe der in den Monaten Januar und Juli eingetretenen Versicherungen: Sei s_0 die Summe der Jahresprämien am 1. Januar, s' die Prämiensumme der im Laufe des Jahres reaktivierten zu dieser Gruppe gehörigen Versicherungen, a_0 die Prämiensumme der Versicherungen, welche vor dem Verfalltag der Rate im Januar wegfallen,

$$s_1 = s_0 + s' - a_0 \tag{171}$$

die Prämiensumme der Versicherungen, für welche die Semesterraten im Januar fällig werden und e_1 die

Prämiensumme der im Januar neu eingetretenen Versicherungen, abzüglich nicht eingelöste, dann ist

$$(172) \qquad \frac{1}{2}(s_1 + e_1)$$

die im Laufe des Monates Januar fällig werdende Summe an Semesterprämien. Diese Summe ist für $11\frac{1}{2}$ Monate zu verzinsen, wenn eine gleichmässige Verteilung der Eintritte über den Monat stattfindet, und die einzelnen Raten am Datum des Eintrittstages, resp. ein halbes Jahr nachher, geschuldet werden.

Bezeichnet a_1 die Summe der Jahresprämien der Versicherungen, welche zwischen dem Prämientermin im Januar und Juli wegfallen, dann ist

$$(173) \qquad s_2 = s_1 + e_1 - a_1$$

die Prämiensumme aller Versicherungen, für welche die Semesterprämien im Juli fällig werden. Ist e_2 die Prämiensumme der im Juli eingetretenen Versicherungen, ausschliesslich die nicht eingelösten, so wird im Juli der Betrag

$$(174) \qquad \frac{1}{2}(s_2 + e_2)$$

fällig, und dieser ist für $5\frac{1}{2}$ Monate zu verzinsen.

Wird die Prämiensumme der Versicherungen, welche vom Prämientermin im Juli bis zum 31. Dezember wegfallen, mit a_2 bezeichnet, so ist der Stand der Nettoprämiensumme dieser Gruppe am 31. Dezember gleich

$$(175) \qquad s_3 = s_2 + e_2 - a_2$$

Die übrigen fünf Gruppen erfahren eine analoge Behandlung. Die Berechnung der Einnahmen an Nettoprämien und Zinsen für das ganze Jahr ist aus dem folgenden Schema ersichtlich.

Schema zur Berechnung der Einnahmen an Prämien

	Versicherungen			
	Januar und Juli			
	Monate	Jahres-Netto-prämien	Netto-prämien-einnahme	Zins für Monate
Nettoprämiensumme am 1. Januar . .		s_0		
Nettoprämiensumme am 1. Januar von reaktivierten Versicherungen . . .		s'		
Abgang an Nettoprämien vom 1. Januar bis zum Prämientermin im Monat .	I	a_0		
Nettoprämiensumme der Versicherungen deren Erneuerungsraten fällig sind im Monat	I	s_1		
Nettoprämiensumme der Eintritte im .	I	e_1		
Summe		$s_1 + e_1$	$\frac{1}{2}(s_1+e_1)$	$11\frac{1}{2}$
Abgang an Nettoprämien zwischen den beiden Prämienterminen	I-VII	a_1		
Nettoprämiensumme der Versicherungen deren Erneuerungsraten fällig sind im Monat	VII	s_2		
Nettoprämiensumme der Eintritte im .	VII	e_2		
Summe		$s_2 + e_2$	$\frac{1}{2}(s_2+e_2)$	$5\frac{1}{2}$
Abgang an Nettoprämien vom letzten Prämientermin bis zum 31. Dezember	VII-XII	a_2		
Nettoprämiensumme am 31. Dezember .		s_3		
Summe				

und Zinsen bei halbjährlicher Zahlung der Prämien.

eingetreten in den Monaten								
Februar und August				usw.	Juni und Dezember			
Monate	Jahres-Netto-prämien	Netto-prämien-einnahme	Zins für Monate		Monate	Jahres-Netto-prämien	Netto-prämien-einnahme	Zins für Monate
	s_0					s_0		
	s'					s'		
II	a_0				VI	a_0		
II	s_1				VI	s_1		
II	e_1				VI	e_1		
	s_1+e_1	$\frac{1}{2}(s_1+e_1)$	$10\frac{1}{2}$			s_1+e_1	$\frac{1}{2}(s_1+e_1)$	$6\frac{1}{2}$
II-VIII	a_1				VI-XII	a_1		
VIII	s_2				XII	s_2		
VIII	e_2				XII	e_2		
	s_2+e_2	$\frac{1}{2}(s_2+e_2)$	$4\frac{1}{2}$			s_2+e_2	$\frac{1}{2}(s_2+e_2)$	$\frac{1}{2}$
VIII-XII	a_2				XII	a_2		
	s_3					s_3		

Sind die Erneuerungsprämien jeweilen am Ersten des Verfallmonates fällig, so ändert sich das angegebene Verfahren in der Weise, dass die Verzinsung der Erneuerungsprämien vom Anfang des Monates an, der Eintrittsprämien von der Mitte des Monates an zu erfolgen hat.

Die Einnahme an Nettoprämien lässt sich auch auf die folgende Weise finden. Wir bilden für die sechs Gruppen Σs_0, $\Sigma s'$, Σa_0, Σe_1 usw. dann ist

$$\Sigma s_1 = \Sigma s_0 + \Sigma s' - \Sigma a_0 \tag{176}$$

$$\Sigma s_2 = \Sigma s_1 + \Sigma e_1 - \Sigma a_1 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 - \Sigma a_0 - \Sigma a_1$$

so dass

$$\Sigma s_1 + \Sigma s_2 = 2\Sigma s_0 + 2\Sigma s' + \Sigma e_1 - 2\Sigma a_0 - \Sigma a_1 \tag{177}$$

Die Einnahme an Nettoprämien ist nun

$$\frac{1}{2}(\Sigma s_1 + \Sigma s_2 + \Sigma e_1 + \Sigma e_2) \tag{178}$$

$$= \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 - \Sigma a_0 + \frac{1}{2}(\Sigma e_2 - \Sigma a_1)$$

Hier ist Σs_0 die Summe der Nettoprämien für die sämtlichen Versicherungen am Anfang des Jahres, $\Sigma s'$ die Summe der Nettoprämien für die im Laufe des Jahres reaktivierten Versicherungen, Σe_1 die Summe der Nettoprämien für die in der ersten Hälfte des Jahres eingetretenen Versicherungen, Σa_0 die Summe der Nettoprämien für die zwischen dem 1. Januar und dem Verfalltermin der ersten Semesterprämie weggefallenen Versicherungen, Σe_2 die Nettoprämiensumme für die in der zweiten Hälfte des Jahres eingetretenen Versicherungen und Σa_1 die Nettoprämiensumme für die zwischen den beiden Verfallterminen weggefallenen Versicherungen. Dabei lassen sich Σe_1

und Σe_2 leicht finden, während Σa_0 und Σa_1 durch besondere Zusammenstellungen ermittelt werden müssen.

Die Verzinsung der Nettoprämieneinnahme kann näherungsweise für ein halbes Jahr erfolgen.

Die Summe der Nettoprämie am Ende des Jahres ist

$$(179) \quad \Sigma s_3 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 - \Sigma a_0 - \Sigma a_1 - \Sigma a_2$$

wobei Σa_2 die Nettoprämiensumme für die seit dem Verfalltermin der zweiten Semesterraten bis zum 31. Dezember weggefallenen Versicherungen bedeutet.

Ad γ) Bei vierteljährlicher Zahlung der Prämien ordnen wir die Versicherungen in drei Gruppen, nämlich in die Versicherungen eingetreten in den Monaten

Januar	April	Juli	Oktober
Februar	Mai	August	November
März	Juni	September	Dezember

Die Prämien- und Zinseinnahme berechnet sich nach dem folgenden Schema (siehe Seiten 118/119), das ohne weitere Erklärungen verständlich ist.

Die Nettoprämieneinnahme ergibt sich auch durch die folgende Rechnung: Sei Σs_0 der Nettoprämienbestand am Anfang des Jahres, $\Sigma s'$ die Nettoprämiensumme der im Laufe des Jahres reaktivierten Versicherungen, Σe_1, Σe_2, Σe_3, Σe_4 die Nettoprämiensummen der in den vier Kalenderquartalen eingetretenen Versicherungen, abzüglich nicht eingelöste, Σa_0, Σa_1, Σa_2, Σa_3 und Σa_4 die Nettoprämiensummen der zwischen dem 1. Januar und dem Verfalltermin der ersten Quartalrate, respektiv der 1. und 2., der 2. und 3., der

Schema zur Berechnung der Einnahmen an Nettoprämien

	Monate	Versicherungen I, IV, VII, X: Jahres-Netto-prämien	Netto-prämien-einnahme	Zins für Monate
Nettoprämiensumme am 1. Januar . .		s_0		
Nettoprämiensumme am 1. Januar von reaktivierten Versicherungen . . .		s'		
Abgang an Nettoprämien vor Verfall der ersten Quartalrate		a_0		
Nettoprämiensumme der Versicherungen, deren Erneuerungsraten fällig sind im	I	s_1		
Nettoprämiensumme der Eintritte im .	I	e_1		
Summe		$s_1 + e_1$	$\frac{1}{4}(s_1 + e_1)$	$11\frac{1}{2}$
Abgang an Nettoprämien nach Verfall der 1. u. vor Verfall der 2. Quartalrate		a_1		
Nettoprämiensumme der Versicherungen, deren Erneuerungsraten fällig sind im	IV	s_2		
Nettoprämiensumme der Eintritte im .	IV	e_2		
Summe		$s_2 + e_2$	$\frac{1}{4}(s_2 + e_2)$	$8\frac{1}{2}$
Abgang an Nettoprämien nach Verfall der 2. u. vor Verfall der 3. Quartalrate		a_2		
Nettoprämiensumme der Versicherungen, deren Erneuerungsraten fällig sind im	VII	s_3		
Nettoprämiensumme der Eintritte im .	VII	e_3		
Summe		$s_3 + e_3$	$\frac{1}{4}(s_3 + e_3)$	$5\frac{1}{2}$
Abgang an Nettoprämien nach Verfall der 3. u. vor Verfall der 4. Quartalrate		a_3		
Nettoprämiensumme der Versicherungen, deren Erneuerungsraten fällig sind im	X	s_4		
Nettoprämiensumme der Eintritte im .	X	e_4		
Summe		$s_4 + e_4$	$\frac{1}{4}(s_4 + e_4)$	$2\frac{1}{2}$
Abgang an Nettoprämien nach Verfall der 4. Quartalrate u. vor dem 31. Dez.		a_4		
Nettoprämiensumme am 31. Dezember .		s_5		
Summe				

und Zinsen bei vierteljährlicher Zahlung der Prämien.

eingetreten in den Monaten							
II, V, VIII, XI				III, VI, IX, XII			
Monate	Jahres-Netto-prämien	Netto-prämien-einnahme	Zins für Monate	Monate	Jahres-Netto-prämien	Netto-prämien-einnahme	Zins für Monate
	s_6				s_0		
	s'				s'		
	a_0				a_0		
II	s_1			III	s_1		
II	e_1			III	e_1		
	s_1+e_1	$\frac{1}{4}(s_1+e_1)$	$10\frac{1}{2}$		s_1+e_1	$\frac{1}{4}(s_1+e_1)$	$9\frac{1}{2}$
	a_1				a_1		
V	s_2			VI	s_2		
V	e_2			VI	e_2		
	s_2+e_2	$\frac{1}{4}(s_2+e_2)$	$7\frac{1}{2}$		s_2+e_2	$\frac{1}{4}(s_2+e_2)$	$6\frac{1}{2}$
	a_2				a_2		
VIII	s_3			IX	s_3		
VIII	e_3			IX	e_3		
	s_3+e_3	$\frac{1}{4}(s_3+e_3)$	$4\frac{1}{2}$		s_3+e_3	$\frac{1}{4}(s_3+e_3)$	$3\frac{1}{2}$
	a_3				a_3		
XI	s_4			XII	s_4		
XI	e_4			XII	e_4		
	s_4+e_4	$\frac{1}{4}(s_4+e_4)$	$1\frac{1}{2}$		s_4+e_4	$\frac{1}{4}(s_4+e_4)$	$\frac{1}{2}$
	a_4				a_4		
	s_5				s_5		

3. und 4., sowie der vierten Quartalrate und dem 31. Dezember weggefallenen Versicherungen, Σs_1, Σs_2, Σs_3 und Σs_4 die Nettoprämiensummen der Versicherungen, deren Erneuerungsprämien im Laufe der vier Kalenderquartale fällig sind; dann ist

$$\Sigma s_1 = \Sigma s_0 + \Sigma s' - \Sigma a_0 \tag{180}$$

$$\Sigma s_2 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 - \Sigma a_0 - \Sigma a_1$$

$$\Sigma s_3 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 - \Sigma a_0 - \Sigma a_1 - \Sigma a_2$$

$$\Sigma s_4 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 + \Sigma e_3 - \Sigma a_0 - \Sigma a_1$$
$$\Sigma a_2 - \Sigma a_3$$

Die Nettoprämieneinnahme im Laufe des Jahres ist sonach

$$\frac{1}{4}(\Sigma s_1 + \Sigma e_1 + \Sigma s_2 + \Sigma e_2 + \Sigma s_3 + \Sigma e_3 + \Sigma s_4 + \Sigma e_4)$$

$$(181) \quad = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 - \Sigma a_0 + \frac{3}{4}(\Sigma e_2 - \Sigma a_1)$$
$$+ \frac{2}{4}(\Sigma e_3 - \Sigma a_2) + \frac{1}{4}(\Sigma e_4 - \Sigma a_3)$$

Hier ist Σs_0 als gegeben anzunehmen, die Summen $\Sigma s'$, Σe und Σa sind durch besondere Zusammenstellungen zu bilden.

Die Verzinsung der Nettoprämieneinnahme kann bei gleichmässiger Verteilung der Eintritte näherungsweise für ein halbes Jahr vorgenommen werden.

Der Nettoprämienbestand am Ende des Jahres ist

$$(182) \quad \Sigma s_5 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 + \Sigma e_3 + \Sigma e_4$$
$$- \Sigma a_0 - \Sigma a_1 - \Sigma a_2 - \Sigma a_3 - \Sigma a_4$$

Wenn die Erneuerungsprämien jeweilen am 1. des Verfallmonates fällig werden, so hat die Verzinsung derselben für 12, 11, 10 bis 1 Monat, die Verzinsung der Eintrittsprämien dagegen für $11\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2}$ Monat zu erfolgen.

Ad δ. Werden die Prämien in monatlichen Raten bezahlt, so wird jeder Monat für sich behandelt und der Prämienbestand auf Ende eines jeden Monates festgestellt. Ist analog wie vorhin Σs_0 der Nettoprämienstand am 1. Januar, $\Sigma s'$ die Nettoprämiensumme der reaktivierten Versicherungen, Σa_0 die Nettoprämiensumme der zwischen dem 1. Januar und dem Verfalltermin der Prämie im Januar weggefallenen Versicherungen, Σe_1, Σe_2, Σe_3 bis Σe_{12} die Nettoprämiensummen der im Laufe der 12 Monate eingetretenen Versicherungen abzüglich nicht eingelöste, Σa_1, Σa_2, Σa_3 bis Σa_{11} die Nettoprämiensummen der zwischen den verschiedenen Verfallterminen weggefallenen Versicherungen, Σs_1, Σs_2, Σs_3 bis Σs_{12} die Nettoprämiensummen der Versicherungen, deren Erneuerungsraten im Laufe der 12 Monate fällig werden, dann ist

$$\Sigma s_1 = \Sigma s_0 + \Sigma s' - \Sigma a_0 \tag{183}$$

$$\Sigma s_2 = \Sigma s_1 + \Sigma e_1 - \Sigma a_1 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 - \Sigma a_0 - \Sigma a_1$$

$$\Sigma s_3 = \Sigma s_2 + \Sigma e_2 - \Sigma a_2 = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 - \Sigma a_0 - \Sigma a_1 - \Sigma a_2$$

$$\vdots$$

$$\Sigma s_{12} = \Sigma s_{11} + \Sigma e_{11} - \Sigma a_{11} = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 + \cdots + \Sigma e_{11} - \Sigma a_0 - \Sigma a_1 - \Sigma a_2 - \cdots - \Sigma a_{11}$$

Die Nettoprämieneinnahme ist

$$\text{(184)} \qquad \text{im Januar} \quad \frac{1}{12}(\Sigma s_1 + \Sigma e_1)$$

$$\text{„ Februar} \quad \frac{1}{12}(\Sigma s_2 + \Sigma e_2)$$

$$\text{„ März} \quad \frac{1}{12}(\Sigma s_3 + \Sigma e_3)$$

$$\vdots$$

$$\text{„ Dezember} \quad \frac{1}{12}(\Sigma s_{12} + \Sigma e_{12})$$

Die Verzinsung dieser Einnahmen hat für $11\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2}$ Monate zu erfolgen.

Die gesamte Einnahme an Nettoprämien während des ganzen Jahres ist

$$\text{(185)} \quad \frac{1}{12}(\Sigma s_1 + \Sigma s_2 + \Sigma s_3 + \cdots + \Sigma s_{12} + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 + \Sigma e_3 + \cdots + \Sigma e_{12}) = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 - \Sigma a_0 + \frac{11}{12}(\Sigma e_2 - \Sigma a_1) + \frac{10}{12}(\Sigma e_3 - \Sigma a_2) + \cdots + \frac{1}{12}(\Sigma e_{12} - \Sigma a_{11})$$

Die Verzinsung dieser Summe kann näherungsweise für ein halbes Jahr vorgenommen werden. Der Nettoprämienbestand am Ende des Jahres ist

$$\text{(186)} \quad \Sigma s_{13} = \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 + \Sigma e_2 + \cdots + \Sigma e_{12} - \Sigma a_0 - \Sigma a_1 - \Sigma a_2 - \cdots - \Sigma a_{12}$$

Ad ε. Bei wöchentlicher Zahlung der Prämien muss der Prämienbestand am Ende einer jeden Woche festgesetzt werden. Die gesamte Einnahme im Laufe des Jahres ist, wenn die in den vorhergehenden

Abschnitten angenommenen Bezeichnungen hier sinngemäss verwendet werden, gleich

$$(187)\quad \Sigma s_0 + \Sigma s' + \Sigma e_1 - \Sigma a_0 + \frac{51}{52}(\Sigma e_2 - \Sigma a_1)$$
$$+ \frac{50}{52}(\Sigma e_3 - \Sigma a_2) + \cdots + \frac{1}{52}(\Sigma e_{52} - \Sigma a_{51})$$

Die Bestimmung der Einnahmen nach dieser Formel würde sich ziemlich kompliziert gestalten. Ein Näherungswert dafür ergibt sich auf die folgende Weise. Es ist

$$(188)\quad \Sigma e_1 + \Sigma e_2 + \Sigma e_3 + \cdots + \Sigma e_{52} = \Sigma e$$

Wird

$$(189)\quad \Sigma e_1 = \Sigma e_2 = \Sigma e_3 = \cdots = \Sigma e_{52} = \frac{\Sigma e}{52}$$

gesetzt, so folgt

$$(190)\quad \Sigma e_1 + \frac{51}{52}\Sigma e_2 + \frac{50}{52}\Sigma e_3 + \cdots + \frac{1}{52}\Sigma e_{52}$$
$$= \frac{1}{52}\,\frac{\Sigma e}{52}\,\frac{53}{2}\,52 = \frac{53}{52}\,\frac{\Sigma e}{2}$$
$$\text{oder angenähert} = \frac{1}{2}\Sigma e$$

Ferner ist

$$(191)\quad \Sigma a_0 + \Sigma a_1 + \Sigma a_2 + \cdots + \Sigma a_{52} = \Sigma a$$

Wenn wir hier

$$(192)\quad \Sigma a_0 + \Sigma a_{52} = \Sigma a_1 = \Sigma a_2 = \cdots = \Sigma a_{51} = \frac{\Sigma a}{52}$$

setzen, so wird der Abzug

$$\Sigma a_0 + \frac{51}{52}\Sigma a_1 + \frac{50}{52}\Sigma a_2 + \cdots + \frac{1}{52}\Sigma a_{51} \tag{193}$$

$$= \Sigma a_0 + \frac{1}{52}\frac{\Sigma a}{52}\frac{52}{2}51 = \Sigma a_0 + \frac{51}{52}\frac{\Sigma a}{2}$$

$$\text{näherungsweise} = \frac{1}{2}\Sigma a$$

Als Näherungswert für die Einnahme im Laufe des Jahres ergibt sich demnach

$$\Sigma s_0 + \Sigma s' + \frac{1}{2}(\Sigma e - \Sigma a) \tag{194}$$

Die Verzinsung dieser Einnahme wird wieder näherungsweise für ein halbes Jahr vorgenommen.

Zu den Nettoprämien für die eigentliche Versicherung sind unter a—ε die Zuschlagsprämien für die anormalen Risiken und die Nettoprämien zur Bildung der Verwaltungskostenreserven hinzuzurechnen.

Jahresprämien oder Rataprämien, welche im Verfallmonat oder innerhalb der Wartefrist nicht eingehen, und später zu einem Verzicht der Versicherung, zum Rückkauf oder zur Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung führen, sind bei der Berechnung des Gewinnes oder Verlustes auf der Sterblichkeit und der Invalidität ebenfalls als eingegangen zu betrachten, da die Gesellschaft das Risiko bis zum Ablauf der Wartefrist getragen hat. Die Versicherung wird auf Ende der Wartefrist als Abgang bei Lebzeiten abgeschrieben und das Deckungskapital mehr der nicht verbrauchten Nettoprämie, eventuell mehr der aufgelaufenen Rente, unter die Ausgaben eingestellt. Bei der Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung wird die reduzierte Versicherung wie ein neuer Eintritt behandelt.

i) Die *Nettoeinmaleinlagen* von neuen und reduzierten Versicherungen mehr Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss vom Tage der Einlagen an bis zum 31. Dezember. In den Einlagen für die prämienfreien Versicherungen sind die Barwerte der künftigen Verwaltungskosten in allen den Fällen, da eine solche zurückgestellt wird, mit enthalten.

Wie schon früher erwähnt wurde, sind bei Umwandlungen in prämienfreie Versicherungen die ursprünglichen Versicherungen wie Abgänge bei Lebzeiten zu behandeln, die reduzierten Versicherungen wie neue Eintritte anzusehen, und die denselben entsprechenden Deckungskapitalien als Einlagen aufzuführen.

Einmaleinlagen von neuen Versicherungen werden bei den sofort beginnenden Renten geleistet; dagegen werden Einlagen weniger häufig bei den aufgeschobenen Renten, den Kapitalversicherungen auf den Todesfall und den Lebensfall bezahlt.

Die Zinsen dieser Einlagen sind vom Tage der Einlagen an bis zum Ende des Jahres einzusetzen. Sind die in den einzelnen Monaten eines Jahres geleisteten Gesamteinlagen stark von einander verschieden, so genügt es, die Einlagen der verschiedenen Monate in einem Posten zusammengefasst von der Mitte derselben an zu verzinsen. Verteilen sich dagegen die Einlagen gleichmässig über den Lauf des Jahres, so ergibt sich ein Näherungswert für die Zinsen, wenn wir die gesamte Einlage des Jahres für ein halbes Jahr verzinsen.

2. Als *Ausgaben* haben wir aufzuführen:

a) Die im Rechnungsjahr fällig gewordenen *Sterbesummen* bei den Kapitalversicherungen auf den Todesfall und die *Rückfallssummen* bei den Versicherungen mit Rückgewähr der Einlagen im Todesfall. Bei den Versicherungen auf den Todesfall mit bestimmter Verfallzeit sind nicht die Versicherungssummen, sondern die auf den Todestag zurückdiskontierten Versicherungssummen unter die Ausgaben aufzunehmen. Wie früher auseinandergesetzt wurde, sind die Versicherungs- und Rückfallssummen ohne Zins einzusetzen. Es ist dies allerdings nur unter der Voraussetzung zutreffend, dass die Sterbesummen am Ende der Versicherungsjahre auszuzahlen sind, in deren Lauf der Tod eintrat.

Aus den Vorjahren übertragene, erst im Rechnungsjahr ausbezahlte Sterbesummen fallen hier nicht in Betracht.

b) Die im Rechnungsjahr fällig gewordenen *Liquidationssummen* bei den Kapitalversicherungen auf den Todesfall und den Lebensfall. Die Verzinsung der einzelnen Posten sollte für die Zeit vom Fälligkeitstage bis zum 31. Dezember zum rechnungsmässigen Zinsfuss vorgenommen werden. Wir erhalten aber genügend genaue Resultate, wenn wir die Ausgabe eines jeden Monates von der Mitte desselben an verzinsen. Bei einer gleichmässigen Verteilung der Liquidationssummen über den Lauf des Jahres genügt die Verzinsung der gesamten Ausgabe des Jahres von der Mitte desselben an.

c) Die im Laufe des Jahres fällig gewordenen, zum Rechnungsjahr gehörigen *Renten* bei den Renten und den Invaliditätsversicherungen, inkl. Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss von den Fälligkeitstagen an bis zum 31. Dezember. Bei den Invaliditätsversicherungen sind Renten an die als Invalid erklärten auszuzahlen, sei es für die Prämienbefreiung oder für diese und die Mitversicherung einer Rente. Die Zinsen berechnen sich, indem wir die in jedem Monat fällig werdenden Renten zusammenstellen. Sind die Renten im Laufe der Monate zahlbar, so erfolgt die Verzinsung entsprechend der Zeit von der Mitte der Monate an bis zum 31. Dezember. Wenn die Renten am Anfang der Monate fällig sind, so haben wir die Zinsen vom Anfang der Monate an bis zum 31. Dezember einzusetzen.

Renten, die in den Vorjahren fällig geworden sind, aber erst im Rechnungsjahr bezogen wurden, fallen hier nicht in Betracht.

d) Die *Beiträge,* welche von den prämienfreien Kapitalversicherungen, den Renten im Rentenbezug und den Altersrenten während der Aufschubszeit *an die Verwaltungskosten* des laufenden Jahres geleistet werden, samt den Zinsen zum rechnungsmässigen Zinsfuss.

Die Beiträge der prämienfreien Kapitalversicherungen auf den Todes- und den Lebensfall sind in der Regel in ‰ der Versicherungssumme bemessen und werden jährlich vorschussweise geleistet. Die Versicherungen, welche das ganze Jahr hindurch in Kraft bestehen, liefern mit Beginn des Versicherungsjahres einen Beitrag für ein Jahr. Die Zinsen sind durchschnittlich für ein halbes Jahr einzusetzen. Dasselbe gilt für neu eingetretene Versicherungen. Für die im Laufe des Jahres vor Beginn der neuen Versicherungsjahre ausgetretenen Versicherungen kommt ein Verwaltungskostenbeitrag nicht in Betracht; für die nach Beginn der neuen Versicherungsjahre weggefallenen Versicherungen ist dagegen ein Beitrag mit Zinsen für ein halbes Jahr einzusetzen.

Bei den Renten sind die Verwaltungskostenbeiträge während dem Rentenbezug in Prozenten der Rente ausgedrückt und werden nachschussweise in denselben

Raten wie die Renten geleistet. Die Verwaltungskostenbeiträge sind somit wie fällige Renten zu behandeln; der Unterschied besteht nur darin, dass sie nicht an die Versicherten, sondern an die Anstalt zu bezahlen sind.

Werden die Verwaltungskostenbeiträge bei den Altersrenten während der Aufschubszeit wie z. B. bei den französischen Gesellschaften in ‰ des nach Ablauf der Aufschubsjahre einzusetzenden Barwertes der Rente bemessen, so sind sie bei den prämienfreien Altersrenten vorschussweise jährlich zu entrichten und wie bei den prämienfreien Kapitalversicherungen zu behandeln. Bei den Altersrenten mit Prämienzahlung sind die Beiträge vorschussweise in denselben Raten wie die Prämien zu zahlen; sie erfahren deshalb dieselbe Behandlung wie die Prämien.

e) Die Deckungskapitalien, Verwaltungskostenreserven und die Deckungskapitalien für die Zuschlagsprämien der anormalen Risiken mehr den nicht verbrauchten Teilen der Nettoprämien, Verwaltungskostenprämien und Zuschlagsprämien der anormalen Risiken, eventuell den aufgelaufenen Renten und Verwaltungskostenbeiträgen *für alle freiwilligen Abgänge im Laufe des Jahres,* berechnet auf den Zeitpunkt des Erlöschens der Versicherung, inklusive Zinsen von der Auflösung an bis zum 31. Dezember. Die im Zeitpunkt der Auflösung der Versicherungen vorhandenen Beträge müssen für jede Versicherung einzeln berechnet werden. Die Zinsen werden ermittelt, indem wir die Ausgaben für die in jedem Monat des Jahres weggefallenen Versicherungen bestimmen und die Verzinsung von der Mitte der Monate an vornehmen. Bei einer gleichmässigen Verteilung der Austritte über den Lauf des Jahres, kann die Verzinsung der Gesamtausgabe näherungsweise für ein halbes Jahr erfolgen.

Die Deckungskapitalien zur Zeit des Abganges sollten nach den früher aufgestellten Formeln unter Annahme eines bestimmten Verlaufes der Sterblichkeit und der Invalidität berechnet werden. Näherungsweise können die Deckungskapitalien, wie dies allgemein üblich ist, unter der Annahme ermittelt werden, dass sie sich geradlinig während dem Laufe eines Versicherungsabschnittes ändern.

Für die am 31. Dezember in Kraft bestehenden Versicherungen sind einzusetzen:

f) Die Deckungskapitalien,
g) Die Verwaltungskostenreserven,
h) Die Deckungskapitalien für die Zuschlagsprämien der anormalen Risiken,
i) Die Nettoprämienüberträge,
k) Die Rentenüberträge,
l) Die Verwaltungskostenüberträge.

3. Der *Gewinn oder Verlust* auf der Sterblichkeit und der Invalidität ist gleich der Differenz zwischen Einnahmen und Ausgaben.

Zürich, Januar 1911.