

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 9 (1914)

**Artikel:** Der Zeichenwechselsatz : über das Verhalten der Reserven bei einer  
im Verlaufe der Versicherung in umgrenztem Altersgebiete auftretenden  
Änderung der Sterblichkeit

**Autor:** Moser, C.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-967441>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

---

### Der Zeichenwechselsatz.

(Über das Verhalten der Reserven bei einer im Verlaufe der Versicherung in umgrenztem Altersgebiete auftretenden Änderung der Sterblichkeit.)

Von Prof. Dr. **Chr. Moser**,  
Direktor des eidgenössischen Versicherungsamtes.

---

Die vorliegende gedrängte Darstellung wird auf geäusserten Wunsch hin hier veröffentlicht. Trotz ihrer Allgemeinheit möchte sie immerhin bloss als eine anspruchslose angesehen werden. Sie bildet einen Ausschnitt aus umfangreichern Untersuchungen (Vorlesung, W.-S. 1910/11).

Man gestatte, in Anlehnung an die internationale Bezeichnungsweise, folgende Benennungen einzuführen: Das Alter in Jahren sei mit  $x$  und die zugehörige Zahl der Lebenden mit  $l_x$  bezeichnet. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass  $l_x$  als analytische Funktion darstellbar sei. Für das Alter  $x$  wird dann bekanntlich die Sterblichkeitsintensität

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{dx} \quad (1)$$

Der Zinsfuss sei  $i$  und der Wert des Kapitals, das in einem Jahr zu 1 anwächst, gleich  $v$ , also:

$$v = \frac{1}{1+i} \quad (2)$$

Der durchschnittliche Barwert der temporären, kontinuierlichen Leibrente von jährlich 1 beträgt, wenn sie im Alter  $x+t$  beginnt und höchstens bis zum Alter  $x+n$  währt:

$$\bar{a}_{x+t:n-t} = \frac{1}{l_{x+t}} \int_t^n v^{\tau-t} l_{x+\tau} d\tau \quad (3)$$

Bei der Integration wird hier  $\tau$  von  $t$  bis  $n$  geführt;  $t$  selbst kann eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl zwischen 0 und  $n$  bedeuten. Für die gemischte Versicherung 1, die im Alter  $x$  mit einer Versicherungsdauer von höchstens  $n$  Jahren abgeschlossen wird, beträgt somit nach  $t$  Jahren die Reserve, die der Einfachheit wegen lediglich mit  ${}_t V$  bezeichnet sein möge:

$${}_t V = 1 - \frac{\frac{1}{l_{x+t}} \int_t^n v^{\tau-t} l_{x+\tau} d\tau}{\frac{1}{l_x} \int_0^n v^{\tau} l_{x+\tau} d\tau} \quad (4)$$

Heben wir nun, im Verlaufe der Versicherung, ein bestimmtes Intervall, das zwischen den Werten  $\theta$  und  $T$  für  $\tau$  liegen möge, heraus ( $0 < \theta < T < n$ ), so teilen wir damit die ganze Versicherungsdauer  $n$  in die drei Abschnitte 0 bis  $\theta$ ,  $\theta$  bis  $T$  und  $T$  bis  $n$ . Jedes dieser drei Gebiete möge der Reihe nach durch die Zahlen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  charakterisiert sein, indem wir setzen:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \alpha \leq \theta \\ \theta < \beta \leq T \\ T < \gamma \leq n \end{array} \right\} \quad (5)$$

Während des Verlaufs der Versicherung der beim Eintritte  $x$ -jährigen Personen wächst also die Variable  $\tau$  zunächst im  $\alpha$ -Gebiet bis  $\theta$ , dann im  $\beta$ -Gebiet bis  $T$  und endlich im  $\gamma$ -Gebiet bis  $n$  an. Die Intensität der Sterblichkeit  $\mu_{x+\tau}$  durchläuft dabei die Werte von  $\mu_x$  bis  $\mu_{x+n}$ , und zwar der Reihe nach kontinuierlich alle Werte  $\mu_{x+\alpha}$ ,  $\mu_{x+\beta}$  und  $\mu_{x+\gamma}$ , wo  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  den Beziehungen (5) genügen.

Nun möge eine zweite Überlebensordnung vorliegen, die sich von der ersten dadurch unterscheidet, dass im  $\beta$ -Gebiet, und nur in diesem, die Sterblichkeitsintensität überall eine andere sei. Nehmen wir an, sie weise eine Zunahme auf. Dann haben wir nacheinander, wenn die Größen, die der zweiten Überlebensordnung entsprechen, mit einem Akzent bezeichnet werden:

$$\left. \begin{array}{l} \mu'_{x+\alpha} = \mu_{x+\alpha} \\ \mu'_{x+\beta} > \mu_{x+\beta} \\ \mu'_{x+\gamma} = \mu_{x+\gamma} \end{array} \right\} \quad (6)$$

Im  $\alpha$ -Gebiet erfahren die Zahlen der Lebenden keine Veränderung. Es ist also

$$l'_{x+\alpha} = l_{x+\alpha} \quad (7)$$

Soweit die Grenzen in Betracht fallen, haben wir ebenfalls

$$l'_x = l_x \quad (7^a)$$

und

$$l'_{x+\theta} = l_{x+\theta} \quad (7^b)$$

Für das  $\beta$ -Gebiet folgt dagegen, weil die Intensität der Sterblichkeit überall grösser geworden ist:

$$l'_{x+\beta} < l_{x+\beta} \quad (8)$$

Die Beziehung (8) gilt für alle Werte  $\beta$ ,

$$\theta < \beta \leq T,$$

also speziell auch für  $\beta = T$ :

$$l'_{x+T} < l_{x+T} \quad (8^a)$$

Setzen wir daher

$$l'_{x+T} = C l_{x+T} \quad (9)$$

so ist  $C$  ein echter Bruch.

Die Intensität der Sterblichkeit ist nach beiden Überlebensordnungen im  $\gamma$ -Gebiet die nämliche, aber wegen (8<sup>a</sup>) wird überall

$$l'_{x+\gamma} < l_{x+\gamma} \quad (10)$$

nämlich, zufolge Gleichung (9):

$$l'_{x+\gamma} = C l_{x+\gamma} \quad (11)$$

sein.

Gehen wir jetzt zur Reserve  $tV'$  über, und zwar zunächst für das  $\alpha$ -Gebiet. Hier haben wir, analog Gleichung (4):

$${}_t V = 1 - \frac{\frac{1}{l'_{x+t}} \int_t^n v^{\tau-t} l'_{x+\tau} d\tau}{\frac{1}{l'_x} \int_0^n v^\tau l'_{x+\tau} d\tau} \quad (12)$$

also unter Berücksichtigung der Gleichungen (7) und (7<sup>a</sup>) und, indem wir den Subtrahend in zwei Faktoren trennen:

$${}_t V = 1 - \frac{\frac{1}{v^t l'_{x+t}}}{\frac{1}{l'_x}} \cdot \frac{\int_t^n v^\tau l'_{x+\tau} d\tau}{\int_0^n v^\tau l'_{x+\tau} d\tau} \quad (12^a)$$

Da sowohl im  $\beta$ -Gebiet, als auch im  $\gamma$ -Gebiet  $l'_{x+\tau} < l_{x+\tau}$  ist, so ist in

$$\int_t^n v^\tau l'_{x+\tau} d\tau = \int_t^n v^\tau l_{x+\tau} d\tau - \varphi \quad (13)$$

die Grösse  $\varphi$  positiv. Auch die Differenz auf der rechten Seite von Gleichung (13) ist positiv. Es kann ebenfalls gesetzt werden:

$$\int_0^n v^\tau l'_{x+\tau} d\tau = \int_0^n v^\tau l_{x+\tau} d\tau - \varphi \quad (14)$$

weil, nach Gleichung (7),

$$\int_0^t v^\tau l'_{x+\tau} d\tau = \int_0^t v^\tau l_{x+\tau} d\tau$$

sein muss. Folglich lässt sich Gleichung (12<sup>a</sup>) schreiben:

$${}_t V' = 1 - \frac{\frac{1}{v^t l_{x+t}}}{\frac{1}{l_x}} \cdot \frac{\int_t^n v^r l_{x+r} d\tau - \varphi}{\int_0^n v^r l_{x+r} d\tau - \varphi} \quad (12^b)$$

Wenn wir im Zähler und Nenner eines echten Bruches  $\frac{a}{b}$ , wo  $a$  das Integral im Zähler und  $b$  dasjenige im Nenner von Gleichung (12<sup>b</sup>) bedeuten, die nämliche positive Grösse  $\varphi$ , die kleiner als  $a$  und damit auch kleiner als  $b$  ist, subtrahieren, so verkleinern wir den Bruch. Es ist also

$$\frac{\int_t^n v^r l_{x+r} d\tau - \varphi}{\int_0^n v^r l_{x+r} d\tau - \varphi} < \frac{\int_t^n v^r l_{x+r} d\tau}{\int_0^n v^r l_{x+r} d\tau}$$

folglich

$${}_t V' > {}_t V,$$

das heisst: Im  $a$ -Gebiet ist  ${}_t V' - {}_t V$  positiv:

$${}_a V' - {}_a V > 0 \quad (15)$$

Gehen wir nun zur Beurteilung der Reservendifferenz im  $\gamma$ -Gebiete über. Zu diesem Zwecke haben wir die Werte

$${}_t V = 1 - \frac{\bar{a}_{x+\gamma: \bar{n}-\gamma}}{\bar{a}_{x: \bar{n}}}$$

und

$${}_t V = 1 - \frac{\bar{a}'_{x+\gamma: \bar{n}-\gamma}}{\bar{a}'_{x: \bar{n}}}$$

mit einander zu vergleichen.

Da

$$\bar{a}_{x: \bar{n}} > \bar{a}'_{x: \bar{n}}$$

und, wie schon aus Gleichung (11) hervorgeht,

$$\bar{a}_{x+\gamma: \bar{n}-\gamma} = \bar{a}'_{x+\gamma: \bar{n}-\gamma}$$

ist, so folgt:

$${}_r V' < {}_r V \quad (16)$$

Im  $\gamma$ -Gebiet wird also die Reservendifferenz  ${}_t V - {}_r V$  negativ. Beziehung (16) gilt ebenfalls für die untere Grenze von  $\gamma$ , nämlich  $\gamma = T$ . Bei der oberen Grenze  $\gamma = n$  dagegen endigen beide Reserven mit 1.

Aus den Beziehungen (15) und (16) geht hervor, dass die Differenz

$${}_t V' - {}_t V$$

im  $\alpha$ -Gebiet positiv, im  $\gamma$ -Gebiet negativ ist, dass sie also in dem dazwischen liegenden  $\beta$ -Gebiet das *Vorzeichen ändert*. Es gibt daher wenigstens *einen* Wert  $\beta_0$ , für den die *Reservendifferenz gleich null* ist. Das Eintreten des Zeichenwechsels ist für das  $\beta$ -Gebiet charakteristisch.

Suchen wir das Resultat in einem allgemeinen Satze zusammenzufassen, so können wir etwa sagen:

*Wird die Reserve einer gemischten Versicherung nach zwei Überlebensordnungen gerechnet, von denen die eine für ein im Verlaufe der Versicherung gelegenes Intervall eine grössere Sterblichkeitsintensität angibt als die andere, so weist die Reservendifferenz in jenem Intervall stets einen Zeichenwechsel auf.*

Bei speziellen Annahmen über das Intervall und seine Lage, sowie über den Verlauf der Sterblichkeitsintensität ergeben sich ohne Mühe verschiedene interessante Folgerungen.

---