

# Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung

Autor(en): **Du Pasquier, L. Gustav**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **7 (1912)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967470>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

(Separatabdruck aus der „Zeitschrift für schweiz. Statistik“, 48. Jahrgang, 1912.)

## Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung.

Von Dr. L. Gustav Du Pasquier,  
Professor an der Universität in Neuenburg.

I. Eine aus  $l_n^{aa} = z_n$  gleichaltrigen aktiven Personen bestehende Versicherungsgemeinschaft  $B_a$  verändere sich aus drei Ursachen: 1. durch Absterben der Mitglieder; 2. durch Invalidwerden derselben; 3. infolge Reaktivierung der Invaliden. Die invalid Gewordenen bilden mit der Zeit eine zweite Versicherungsgemeinschaft  $B_i$ , deren Mitgliederanzahl anfänglich  $l_n^{ii} = \zeta_n = 0$  ist. Dieser zweite Bestand  $B_i$  möge sich ebenfalls aus drei Ursachen verändern: 1. weil er fortwährend aus den Reihen der Aktiven Zuwachs erhält; 2. durch Absterben der Mitglieder; 3. infolge Reaktivierung derselben. Der Inbegriff der zwei Bestände  $B_a$  und  $B_i$  soll eine geschlossene, d. h. von Ein- und Auswanderungen freie, Gesamtheit bilden.

Nach Ablauf einer bestimmten Zeit bestehe die erste Versicherungsgemeinschaft  $B_a$  aus  $l_x^{aa} = z_x$  Mitgliedern, die zweite,  $B_i$ , aus  $l_x^{ii} = \zeta_x$  Personen. Es ist der Zusammenhang zwischen den betreffenden Anzahlen zu untersuchen.

II. Die mathematisch strenge Behandlung dieses Problems erheischt die Einführung folgender sechs Ausscheideordnungen:

a) für den Versicherungsbestand  $B_a$  der Aktiven:

1. die tatsächlich sich einstellende Reihe

$$\bar{l}_n^{aa}, \bar{l}_{n+1}^{aa}, \dots, l_x^{aa}, \dots, 0 \quad (\text{Reihe der } z_x);$$

2. diejenige Ausscheideordnung, die sich ergeben würde, wenn nur die Sterblichkeit einwirkte, wenn also jedes invalid werdende Mitglied des Bestandes sofort durch ein neues, gleichaltriges, aktives ersetzt würde:

$$l_n^{aa}, l_{n+1}^{aa^{(\mu)}}, \dots, l_x^{aa^{(\mu)}}, \dots, 0 \\ (\text{Reihe der } z_x^{(\mu)});$$

3. diejenige Ausscheideordnung, die sich einstellen würde, wenn nur die Invalidierungsursachen auf den Bestand einwirkten, wenn also jedes mit Tod abgehende Mitglied sofort durch ein neues, gleichaltriges, aktives Mitglied ersetzt würde:

$$l_n^{aa}, l_{n+1}^{aa^{(\nu)}}, \dots, l_x^{aa^{(\nu)}}, \dots, 0 \quad (\text{Reihe der } z_x^{(\nu)});$$

b) für den Versicherungsbestand  $B_i$  der Invaliden:

4. die tatsächlich sich einstellende Reihe

$$l_n^{ii} = 0, l_{n+1}^{ii}, \dots, l_x^{ii}, \dots, 0 \\ (\text{Reihe der } \zeta_x);$$

5. diejenige Ausscheideordnung, die sich ergeben würde, wenn auf den betreffenden Bestand von Invaliden nur die Sterblichkeit einwirkte, wenn also jedes wieder in die Reihen der Aktiven übertretende Mitglied sofort durch ein neues, gleichaltriges, invalides ersetzt würde:

$$l_x^{ii^{(\mu)}}, l_{x+1}^{ii^{(\mu)}}, \dots, 0 \quad (\text{Reihe der } \zeta_x^{(\mu)});$$

6. die Ausscheideordnung, die eintreten würde, wenn ausschliesslich Reaktivierung auf den Bestand einwirkte, was man sich dadurch realisiert denken kann, dass jeder mit Tod abgehende Invalide sofort durch einen neuen gleichaltrigen Invaliden ersetzt wird:

$${}'l_x^{\bar{ii}(\varrho)}, {}'l_{x+1}^{\bar{ii}(\varrho)}, \dots \dots 0 \quad (\text{Reihe der } \zeta_x^{(\varrho)}).$$

III. Jede dieser sechs Ausscheideordnungen gibt Anlass zur Einführung bestimmter Intensitätsfunktionen und bestimmter Wahrscheinlichkeitsgrössen. Aus der Reihe der  $z_x$  leitet man in bekannter Weise ab:

$$\mu_x^{\bar{aa}}, \nu_x, p_x^{\bar{aa}}, q_x^{\bar{aa}}, \text{ usw.}$$

$$\text{Aus der Reihe der } z_x^{(\mu)} : {}'\mu_x^{\bar{aa}}, {}'p_x^{\bar{aa}(\mu)}, {}'q_x^{\bar{aa}(\mu)}, \dots \dots$$

$$" \quad " \quad " \quad " \quad z_x^{(\nu)} : {}'\nu_x, {}'p_x^{\bar{aa}(\nu)}, {}'i_x, \dots \dots$$

$$" \quad " \quad " \quad " \quad \zeta_x : \mu_x^{\bar{ii}}, \varrho_x, p_x^{\bar{ii}}, q_x^{\bar{ii}}, \dots \dots$$

$$" \quad " \quad " \quad " \quad \zeta_x^{(\mu)} : {}'\mu_x^{\bar{ii}}, {}'p_x^{\bar{ii}(\mu)}, {}'q_x^{\bar{ii}(\mu)}, \dots \dots$$

$$" \quad " \quad " \quad " \quad \zeta_x^{(\varrho)} : {}'\varrho_x, {}'p_x^{\bar{ii}(\varrho)}, {}'r_x, \dots \dots$$

(Die „partiellen Grössen“ [von Karup und andern Autoren „unabhängige“ Grössen genannt] sollen stets durch einen Akzent links oben gekennzeichnet werden.)

IV. Setzt man jede der 6 Funktionen  $z_x, z_x^{(\mu)}, z_x^{(\nu)}, \zeta_x, \zeta_x^{(\mu)}, \zeta_x^{(\varrho)}$  als differenzierbar voraus (Kontinuitätshypothese), so lässt sich beweisen, dass  $'\mu_x^{\bar{aa}} = \mu_x^{\bar{aa}}, {}'\mu_x^{\bar{ii}} = \mu_x^{\bar{ii}},$  usw.

In Worten: Die einem bestimmten Alter entsprechende Sterbeintensität ist unabhängig davon, ob

ein Zugang oder ein Abgang von Mitgliedern aus irgendwelchen Ursachen erfolgt, solange die Kontinuitätshypothese gilt; und ganz allgemein: die Differenzierbarkeit obiger Funktionen ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass jede der Intensitätsfunktionen  $\bar{\mu}_x^{aa}$ ,  $\bar{\mu}_x^{ii}$ ,  $\nu_x$ ,  $\varrho_x$ , bei festgehaltenem  $x$ , auch dann unverändert bleibt, wenn die gleichzeitige Wirkung aller drei Veränderungsursachen (Sterben, Invalidierung, Reaktivierung) berücksichtigt wird. Ein ähnlicher Satz gilt aber nicht von den „partiellen Wahrscheinlichkeiten“:  $\bar{p}_x^{aa}$ ,  $\bar{p}_x^{aa(\nu)}$ , usw.

V. Setzt man die Differenzierbarkeit der Funktionen  $\bar{l}_x^{aa}$  und  $\bar{l}_x^{ii}$  voraus, so wird die Wechselwirkung der beiden Versicherungsbestände  $B_a$  und  $B_i$  aufeinander durch folgendes System von simultanen Differentialgleichungen ausgedrückt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{l}_x^{aa}}{dx} &= \bar{l}_x^{ii} \cdot \varrho_x - \bar{l}_x^{aa} (\bar{\mu}_x^{aa} + \nu_x) \\ \frac{d\bar{l}_x^{ii}}{dx} &= \bar{l}_x^{aa} \cdot \nu_x - \bar{l}_x^{ii} (\bar{\mu}_x^{ii} + \varrho_x) \end{aligned} \right\} (1)$$

Es gilt also, zwei Funktionen  $z$  und  $\zeta$  derart zu bestimmen, dass

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \zeta \cdot \Phi(x) - z(f(x) + F(x)) \\ \frac{d\zeta}{dx} &= z \cdot F(x) - \zeta(\varphi(x) + \Phi(x)) \end{aligned} \right\} (1)$$

(erste Ausdrucksform);

oder eine Funktion  $z$ , welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \cdot k_1(x) + z \cdot k_2(x)$$

genügt (zweite Ausdrucksform); oder eine Funktion  $v$  von der Eigenschaft, dass

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + g(x),$$

unter  $g(x)$  eine beliebige Funktion verstanden (dritte Ausdrucksform).

**VI.** Die obigen Gleichungen sind im allgemeinen, mit Hilfe der bekannten elementaren Funktionen, nicht in geschlossener Form integrierbar.

**VII.** In einigen Spezialfällen kann man das obige Gleichungssystem (1) in geschlossener Form integrieren. Unter den von mir behandelten Spezialfällen seien hier nur die zwei folgenden erwähnt:

1. Der Fall, in welchem keine Reaktivierung stattfindet. Es ergeben sich dabei teils schon bekannte Beziehungen, z. B. die zuerst von J. Karup in anderer Bezeichnung aufgestellte Formel:

$$p_x^{\bar{a}\bar{a}} = {}'p_x^{\bar{a}\bar{a}(\mu)} \cdot {}'p_x^{\bar{a}\bar{a}(v)},$$

teils solche, die bis jetzt noch nicht aufgestellt wurden und die von den Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit und der Invalidität abhängig sind und auch vom angestrebten Genauigkeitsgrad, z. B.:

$$l_{x+1}^{\bar{i}\bar{i}} = l_x^{\bar{i}\bar{i}} \cdot {}'p_x^{\bar{i}\bar{i}(\mu)} + l_x^{\bar{a}\bar{a}} \cdot v_x \cdot {}'p_x^{\bar{i}\bar{i}(\mu)} \cdot \frac{1 + {}'p_x^{\bar{a}\bar{a}(\mu)}}{1 + {}'p_x^{\bar{i}\bar{i}(\mu)}},$$

oder:

$$l_{x+1}^{\bar{i}\bar{i}} = {}'p_x^{\bar{i}\bar{i}(\mu)} \cdot \left\{ l_x^{\bar{i}\bar{i}} + l_x^{\bar{a}\bar{a}} \cdot v_x \cdot \left( 1 + \frac{\mu_x^{\bar{i}\bar{i}} - \mu_x^{\bar{a}\bar{a}} - v_x}{2} \right) \right\}$$

2. Der Fall, in welchem die vier Intensitätsfunktionen  $\mu_x^{\bar{a}\bar{a}}$ ,  $\mu_x^{\bar{i}\bar{i}}$ ,  $v_x$ ,  $q_x$  als während der Dauer eines

Jahres konstant angesehen werden. Der Zusammenhang zwischen  $\bar{l}_x^{aa}$  und  $\bar{l}_x^{ii}$  lässt sich dann mit Hilfe der Hyperbelfunktionen in einfacher Weise darstellen. Aus den strengen Formeln leitet man leicht Näherungsformeln ab, je nach dem erstrebten Genauigkeitsgrade. Als zu den einfachsten gehörend zitiere ich z. B. die folgenden:

$$\bar{l}_{x+1}^{ii} = \bar{l}_x^{ii} \cdot (1 - \sigma) \left(1 + \frac{1}{x - n}\right).$$

Dabei ist  $\sigma = \frac{1}{2} \left(\mu_x^{aa} + \mu_x^{ii} + \nu_x + \varrho_x\right)$ , und  $n$  bedeutet das niedrigste Alter, in welchem der Eintritt von Erwerbsunfähigkeit im betrachteten Versicherungsbestande überhaupt konstatiert wird; mit andern Worten:  $n$  bedeutet dasjenige Alter, in welchem alle Versicherten noch aktiv sind.

$$\bar{l}_{x+1}^{aa} = \bar{l}_x^{aa} \cdot (1 - \sigma) (1 + k),$$

$$\text{wobei } k = \sigma - \mu_n^{aa} - \nu_n.$$

Letztere Formel liefert zwar für die Anzahlen  $\bar{l}_x^{aa}$  der Aktiven eine geometrische Progression, solange man  $\sigma$  und  $k$  konstant hält. Man kann ihnen aber sehr wohl von Jahr zu Jahr wechselnde Werte beilegen und so dem tatsächlichen Verlauf möglichst nahe kommen. Für die jüngeren Alter wird man diese Konstanz, ohne erheblichen Fehler, auf einen längeren Zeitraum ausdehnen können und das Produkt  $(1 - \sigma) (1 + k)$  nur für Zeitabschnitte von z. B. fünf Jahren neu berechnen. Die entsprechende Aktivitätsordnung setzt sich dann aus einer Serie von geometrischen Progressionen zusammen.

Auch für den Fall, dass die Intensitätsfunktionen  $\mu_x^{\bar{aa}}$ ,  $\mu_x^{\bar{ii}}$ ,  $\nu_x$ ,  $Q_x$  nicht als konstant angesehen werden, habe ich Integrabilitätsfälle des Gleichungssystems (1) gefunden und behandelt.

In einem zweiten Teile sollen mit Hülfe der gefundenen Beziehungen Formeln abgeleitet werden, die es gestatten, Rentenbarwerte und Prämien zu berechnen.



