Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 5 (1910)

Artikel: Beiträge zur Theorie der Intensitätsfunktionen

Autor: Liechti, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967480

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beiträge zur Theorie der Intensitätsfunktionen.

Von **G. Liechti**, Zürich.

Einleitung.

Die in der Lebensversicherungsmathematik gebräuchlichsten Ausdrücke für die rechnerische Ermittlung der Barwerte von verschiedenartigen Versicherungsverpflichtungen sind im allgemeinen unter der Voraussetzung abgeleitet, dass das Absterben einer gleichaltrigen Gruppe von Lebenden innerhalb eines Jahres gleichmässig erfolge. Solange es sich um Versicherungsleistungen handelt, die am Ende eines Jahres fällig werden, ist die Annahme einer solchen Hypothese nicht erforderlich. Anders verhält es sich dagegen bei Barwerten von Kapitalversicherungen und Renten, welche in einem andern Zeitpunkte als am Ende des Jahres zahlbar sind. Die Hypothese des gleichmässigen Absterbens ist durchaus nicht wissenschaftlich; denn es ist nicht anzunehmen, dass die Intensität des Absterbens, der Grad der Verminderung einer Gruppe von Personen gleichen Alters sich für eine noch so kleine Altersstrecke auf gleicher Höhe halte. Der Prozess, welcher die stetige Abnahme einer beobachteten Anzahl von Lebenden bedingt, ist so kompliziert, dass es schwierig ist, denselben innerhalb kleiner Zeitintervalle zu verfolgen und ihn durch ein mathematisches Gesetz auszudrücken.

Die Sterblichkeitsstatistik liefert uns für die ganzzahligen Alter jeweilen die Zahl der Überlebenden, und aus dieser Überlebensordnung ergeben sich dann die in der Praxis gebräuchlichen Werte der Lebenswahrscheinlichkeit und als komplementäre Grösse zu der letzteren die Sterbenswahrscheinlichkeit. Es lassen sich dann mit Hülfe geeigneter Reihenentwicklungen die entsprechenden Zahlwerte auch für Zeitintervalle, welche kleiner als ein Jahr sind, ermitteln, so dass dadurch die Anzahl der Lebenden in einem beliebigen Zeitpunkte fixiert ist.

Zu richtigen Ergebnissen gelangt man allerdings nur dann, wenn das Gesetz, nach welchem das Absterben erfolgt, analytisch darstellbar ist, d. h. wenn die Anzahl der Lebenden explicite als Funktion des Alters berechnet werden kann. Wenn die analytische Struktur des Sterblichkeitsgesetzes bekannt ist, so lassen sich die verschiedenen Probleme der Lebensversicherungsmathematik in ganz eindeutiger Weise lösen; im andern Falle hat man es immer mit Näherungswerten zu tun, welche allerdings für die Praxis hinreichend genaue Resultate ergeben.

Die Behandlung dieser Fragen ist eng verknüpft mit der Eulerschen Summenformel, welche von Woolhouse in die Theorie der Lebensversicherung eingeführt worden ist. In der vorliegenden Arbeit wollen wir versuchen, an Hand einer andern Reihenentwicklung einige einfache Barwerte von Versicherungsleistungen zu ermitteln, und zu zeigen, wie mit Hülfe der Intensitätsfunktionen solche Probleme in einfacher Weise gelöst werden können. Dieselbe hat neben der grossen Einfachheit den Vorteil, dass die rechnerische Ermittlung der in Frage kommenden Ausdrücke mit jeder wünschbaren Genauigkeit durchgeführt werden

kann, und dass sie sich in übersichtlicher Weise nach den verschiedenen Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit spezialisieren lässt.

Es sind nun namentlich die Intensitätsfunktionen, welche wesentlich zur Vertiefung solcher Probleme beitragen. Die richtige Erfassung des Begriffes „Intensität der Veränderung einer Funktion“ ist nicht leicht, und es bedarf dazu der konsequenten Auffassung des unendlich Kleinen. Die Notwendigkeit, bei den mathematischen Entwicklungen das Gebiet der höhern Analysis betreten zu müssen, ist aber kein Grund, den Intensitätsfunktionen nicht dasjenige Interesse entgegenzubringen, das sie in Wirklichkeit verdienen. Da wir bezüglich der Absterbeordnung ein analytisches Gesetz nicht als bekannt voraussetzen, so sind wir behufs Auswertung der vorkommenden bestimmten Integrale auf den Weg der mechanischen Quadratur gewiesen.

I. Kapitel.

Entwicklung von $\int_x^{x+t} f(y)\,dy$ in eine Reihe.

Wir betrachten vorerst ein unbestimmtes Integral von der Form

$$\int F(y)\,dy$$

wobei wir voraussetzen, dass $F(y)$ eine stetige differenzierbare Funktion sei, welche für sämtliche Argumentenwerte eines Intervalles $o - t$ endliche Funktionswerte besitzt. Mit Hülfe sukzessiver partieller Integration gelangen wir zu folgender Reihe:

$$\int F(y)\,dy = y\,F(y) - \frac{y^2}{2!}F'(y)$$

$$+\ldots(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n!}F^{(n-1)}(y) + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\int F^{(n)}(y)\,y^n\,dy. \quad (1$$

Setzen wir in dieser Reihe $y = t$ und $y = 0$, so ergibt sich durch Subtraktion

$$\int_0^t F(y)\,dy = t\,F(t) - \frac{t^2}{2!}F'(t)\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!}F^{(n-1)}(t) + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\int_0^t F^n(y)\,y^n\,dy. \quad (2)$$

Es sei nun

$$F(y) = f(a+t-y)$$
$$F'(y) = -f(a+t-y)$$

u. s. f.

dann wird

$$\int_0^t f(a+t-y)\,dy = t\,f(a) + \frac{t^2}{2!}f'(a)\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\int_0^t f^n(a+t-y)\,y^n\,dy. \quad (3)$$

Machen wir die Substitution

$$a+t-y = y'$$

so wird

$$-\int_{a+t}^{a} f(a+t-y)\,dy = \int_a^{a+t} f(y)\,dy$$

und Gleichung (3) geht über in

$$\int_a^{a+t} f(y)\,dy = t \cdot f(a) + \frac{t^2}{2!}f'(a) + \ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^{a+t} f^{(n)}(y)\,(a+t-y)^n \cdot dy. \quad (4)$$

Zu Gleichung (4) ist zu bemerken, dass sich aus derselben sehr leicht die Taylorsche Reihe ableiten lässt. Man braucht nur $f(y)$ zu ersetzen durch $f'(y)$ und dementsprechend $f(a)$ durch $f'(a)$ etc.

Das Restglied ist

$$R = \frac{1}{n!}\int_a^{a+t} f^{(n)}(y)\,(a+t-y)^n\,dy.$$

Die in Gleichung (2) und (4) gegebenen Entwicklungen sind die Darstellung bestimmter Integrale, welche nach der Methode der mechanischen Quadratur ausgewertet werden.

Dem Ausdrucke für das Restglied R soll noch eine andere Form gegeben werden, welche für die Abschätzung wesentliche Erleichterungen gewährt. Es ist $f^{(n)}(y)$ eine stetige Funktion im Intervall $o - t$. Der Ausdruck $(a+t-y)^n$ variert im Intervall a bis $a+t$ von t^n bis o, hat also konstantes Vorzeichen. Wir können demzufolge den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden.

Bezeichnet $f^{(n)}(\eta)$ einen Funktionswert, der zwischen dem grössten und kleinsten Werte liegt, welchen $f^{(n)}(y)$ im betrachteten Intervall annimmt, so wird

$$R = \frac{1}{n!} f^n(\eta)\int_a^{a+t}(a+t-y)^n\,dy$$

oder

$$R = \frac{1}{(n+1)!}\cdot t^n \cdot f^{(n)}(\eta) = \frac{1}{(n+1)!}\,t^n f^{(n)}(a+\vartheta t) \tag{5}$$

dabei ist $\vartheta < 1$ und t die Länge des Intervalles.

Da wir die Reihenentwicklung (4) speziell für Probleme der Lebensversicherungsmathematik verwenden wollen, so wählen wir, um mit der gebräuchlichen

Bezeichnungsweise in Übereinstimmung zu bleiben, als untere Grenze des Integrationsintervalles das Alter x einer Gruppe gleichaltriger Lebenden.

Es wird dann

$$\int_x^{x+t} f(y)\,dy = t\,f(x) + \frac{t^2}{2!} f'(x) + \ldots \frac{t^n}{n!} f^{(n-1)}(x) + R \tag{6}$$

Für jeden der Funktionswerte $f(x)$, $f'(x)$ ... seien nun deren Intensitätsfunktionen bestimmt. Dieselben seien bezeichnet mit ${}_0\nu_{(x)}$, ${}_1\nu_{(x)}$ ... Es ist bekanntlich, wenn wir vom Vorzeichen absehen

$$\begin{aligned} {}_0\nu_{(x)} &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d\,Lg\,f(x)}{dx} \\ {}_1\nu_{(x)} &= \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{d\,Lg\,f'(x)}{dx} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aus diesem System folgt nun

$$\begin{aligned} f'(x) &= {}_0\nu_{(x)} \cdot f(x) \\ f''(x) &= {}_0\nu_{(x)} \cdot {}_1\nu_{(x)} \cdot f(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Durch diese Substitution geht Gleichung (6) über in

$$\int_x^{x+t} f(y)\,dy = f(x) \left\{ t + \frac{t^2}{2!}\,{}_0\nu_{(x)} + \frac{t^3}{3!}\,{}_0\nu_{(x)}\,{}_1\nu_{(x)} + \ldots \right\} + R. \tag{7}$$

Ist t speziell $= 1$, so folgt

$$\int_x^{x+1} f(y)\,dy = f(x) \left\{ 1 + \frac{1}{2!}\,{}_0\nu_{(x)} + \frac{1}{3!}\,{}_0\nu_{(x)}\,{}_1\nu_{(x)} + \ldots \right\} + R. \tag{8}$$

Diese Reihe schreitet also fort nach den Produkten der Intensitätsfunktionen von $f(y)$, $f'(y)$ . . . an der untern Grenze des Integrationsintervalles. Da $f(y)$ als stetige und differenzierbare Funktion vorausgesetzt ist, so ist diese Entwicklung vollständig eindeutig. Je nach der Natur der Funktion $f(y)$ sind die Reihenentwicklungen (7) und (8) unendliche oder im Endlichen abbrechende. Ist z. B. $f(y)$ eine rationale Funktion vom Grade k, so verschwinden vom $(k+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten ab sämtliche höhern Ableitungen und ${}_k\nu_{(x)}$ wird 0. Die Konvergenz der Reihe ist ebenfalls bedingt durch die analytische Struktur von $f(y)$, und es lässt sich nur in jedem speziellen Falle untersuchen, wie weit die Entwicklung praktisch verwertbar ist.

In der Lebensversicherung hat man es meistens mit Funktionen zu tun, deren algebraisches Gesetz nicht bekannt ist. Die Zahl der Lebenden einer Sterbetafel explicite als Funktion des Alters ausgedrückt ist für die wenigsten der gebräuchlichen Sterbetafeln gegeben. Man begnügt sich oft damit, die Anzahl der Lebenden über einer bestimmten Altersstrecke durch eine rationale Funktion höheren Grades auszudrücken, ohne dass dadurch die ganze Sterbetafel einer bestimmten algebraischen Gesetzmässigkeit unterworfen wird. Wenn wir aber unsere Reihenentwicklung auf solche Funktionen anwenden wollen, so sind wir genötigt, mit Hülfe eines Näherungsverfahrens zu den Differentialquotienten und deren Intensitätsfunktionen zu gelangen.

II. Kapitel.

Berechnung der Differentialquotienten erster und höherer Ordnung.

Die im folgenden entwickelte Methode deckt sich im wesentlichen mit der im Text-Book, Kap. XXIII, Art. 38—39, gegebenen.

Aus dem Differenzenschema möge die gewählte Bezeichnungsweise entnommen werden.

$$
\begin{array}{lcccc}
\vdots & & & & \\
 & \vdots & & & \\
f(x-2) & & & & \\
 & \Delta^{I}_{-\frac{3}{2}} & \vdots & & \\
f(x-1) & & \Delta^{II}_{-1} & \vdots & \\
 & \Delta^{I}_{-\frac{1}{2}} & & \Delta^{III}_{-\frac{1}{2}} & \vdots \\
f(x) & & \Delta^{II}_{0} & & \Delta^{IV}_{0} \quad \cdot\,\cdot \\
 & \Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} & & \Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} & \vdots \\
f(x+1) & & \Delta^{II}_{+1} & \vdots & \\
 & \Delta^{I}_{+\frac{3}{2}} & \vdots & & \\
f(x+2) & \vdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Bekanntlich ist nun

$$
f(x+t) = f(x) + \binom{t}{1} \Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} + \binom{t}{2} \Delta^{II}_{1}
$$

$$
+ \binom{t}{3} \Delta^{III}_{+\frac{3}{2}} + \binom{t}{4} \Delta^{IV}_{+2} \qquad (9)
$$

Aus obigem Schema folgt

$$\Delta^{I}_{+1} = \Delta^{II}_{0} + \Delta^{III}_{+\frac{1}{2}}$$

$$\Delta^{III}_{+\frac{3}{2}} = \Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{IV}_{1} = \Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{IV}_{0} + \Delta^{V}_{+\frac{1}{2}}$$

$$\Delta^{IV}_{+2} = \Delta^{IV}_{0} + 2\Delta^{V}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{VI}_{0} + \Delta^{VII}_{\frac{1}{2}}$$

$$\vdots$$

Somit

$$f(x+t) = f(x) + \binom{t}{1}\Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} + \binom{t}{2}\left\{\Delta^{II}_{0} + \Delta^{III}_{+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$+ \binom{t}{3}\left\{\Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{IV}_{0} + \Delta^{V}_{+\frac{1}{2}}\right\} \cdots$$

$$= f(x) + \binom{t}{1}\Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} + \binom{t}{2}\Delta^{II}_{0}$$

$$+ \left\{\binom{t}{2} + \binom{t}{3}\right\}\Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} + \left\{\binom{t}{3} + \binom{t}{4}\right\}\Delta^{IV}_{0} \cdots$$

$$f(x+t) = f(x) + \binom{t}{1}\Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} + \binom{t}{2}\Delta^{II}_{0} + \binom{t+1}{3}\Delta^{III}_{+\frac{1}{2}}$$

$$+ \binom{t+1}{4}\Delta^{IV}_{0} \cdots \qquad (10)$$

Ferner ist

$$\Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} = \Delta^{I}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{II}_{0}$$

$$\Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} = \Delta^{III}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{IV}_{0}$$

$$\vdots$$

Folglich

$$f(x+t) = f(x) + \binom{t}{1}\Delta^{I}_{-\frac{1}{2}} + \left\{\binom{t}{1} + \binom{t}{2}\right\}\Delta^{II}_{0}$$

$$+ \binom{t+1}{3}\Delta^{III}_{-\frac{1}{2}} + \left\{\binom{t+1}{3} + \binom{t+1}{4}\right\}\Delta^{IV}_{0} \cdots$$

$$f(x+t) = f(x) + \binom{t}{1} \Delta^{I}_{-\frac{1}{2}} + \binom{t+1}{2} \Delta^{II}_{0}$$

$$+ \binom{t+1}{3} \Delta^{III}_{-\frac{1}{2}} + \binom{t+2}{4} \Delta^{IV}_{0} \ldots \qquad (11)$$

Das arithmetische Mittel aus (10) und (11) liefert die Form

$$f(x+t) = f(x) + \frac{1}{2} \binom{t}{1} \left\{ \Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{I}_{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \binom{t}{2} + \binom{t+1}{2} \right\} \Delta^{II}_{0} + \frac{1}{2} \binom{t+1}{3} \left\{ \Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{III}_{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \binom{t+1}{4} + \binom{t+2}{4} \right\} \Delta^{IV}_{0}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta^{I}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{I}_{-\frac{1}{2}} \right\} = \delta^{I}_{0}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta^{III}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{III}_{-\frac{1}{2}} \right\} = \delta^{III}_{0}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta^{V}_{+\frac{1}{2}} + \Delta^{V}_{-\frac{1}{2}} \right\} = \delta^{V}_{0}$$

$$\vdots$$

so erhalten wir nach Entwicklung der Koeffizienten:

$$f(x+t) = f(x) + t\,\delta^{I}_{0} + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \Delta^{II}_{0} + \frac{t\,(t^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta^{III}_{0}$$

$$+ \frac{t^2\,(t^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^{IV}_{0} + \frac{t\,(t^2 - 1^2)\,(t^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \delta^{V}_{0} + \ldots \qquad (12)$$

Von dieser Reihe ausgehend gelangen wir nun leicht zu einem Werte für den ersten Differentialquotienten. Derselbe ist nämlich gegeben durch:

$$\lim_{t=0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} = f'(x)$$

$$= \delta_0^I - \frac{1}{3!}\delta_0^{III} + \frac{2^2}{5!}\delta_0^V \ldots \qquad (13)$$

Für die praktische Rechnung mag es genügen, die Reihe bei dem Gliede $\frac{1}{3!}\delta_0^{III}$ abzubrechen.

Somit wird angenähert

$$f'(x) = \delta_0^I - \frac{1}{6}\delta_0^{III} \qquad (14)$$

Sind nun, wie wir voraussetzen, die Funktionswerte von $f(x)$ in äquidistanten Punkten des Argumentes bekannt, so lassen sich die δ_0^I und δ_0^{III} leicht ausdrücken. Es wird nämlich

$$\delta_0^I = \frac{1}{2}\{f(x-1)-f(x+1)\}$$

$$\delta_0^{III} = f(x+1)-f(x-1)+\frac{1}{2}\{f(x-2)-f(x+2)\}$$

und daraus

$$f'(x) = \frac{8\{f(x-1)-f(x+1)\}-\{f(x-2)-f(x+2)\}}{12} \qquad (15)$$

ferner folgt

$$_0\nu_{(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{8\{f(x-1)-f(x+1)\}-\{f(x-2)-f(x+2)\}}{12\,f(x)} \qquad (16)$$

Identifizieren wir $f(x)$ mit den Lebenden einer Sterbetafel, so gibt uns Gleichung (16) den angenäherten Wert der Sterbeintensität für einen $x$jährigen [1]).

---

[1]) Text-Book Kap. II, Gleichung (21).

Die Form, wie sie in Gleichung (16) gegeben ist, kann Anfang und am Ende des Intervalles nicht angewendet am werden, weil sie die Kenntnis symmetrischer Funktionswerte voraussetzt. Es lässt sich aber, unter Anwendung der weniger konvergenten Entwicklung (10) auch diese Schwierigkeit beseitigen.

Die Ermittlung der Differentialquotienten höherer Ordnung geschieht am besten so, dass man die durch Gleichung (15) dargestellte Operation successive auf die Reihen der $f'(x)$, $f''(x)$ . . . anwendet.

Wir geben in der folgenden Tabelle die Werte von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ sowie der zugehörigen Intensitätsfunktionen unter der Annahme, dass $f(x)$ die Anzahl der Lebenden nach der Sterbetafel RF bedeute. Die Werte für die Sterbeintensität $\mu_{(x)}$, die gemäss dem Gompertz-Makehamschen Gesetze berechnet sind, geben uns in ihrer Vergleichung mit den ${}_0\nu_{(x)}$ einen Masstab für die Verwendbarkeit der Gleichung (16).

Alter x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	${}_0\nu_{(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$	${}_1\nu_{(x)} = \frac{f''x}{f'(x)}$	Sterbeintensität μ_x	$u_x = \frac{f''(x)}{f(x)}$
				10^{-3}.	10^{-3}.	10^{-3}.	10^{-5}.
30	771 681	- 5 103.00	+ 41.89	6.6128	8.2089	6.6128	5.4284
35	745 508	- 5 396.42	+ 78.71	7.2386	14.5856	7,2391	10.5579
40	717 338	- 5 916.75	+133.62	8.2482	22.5831	8.2482	18.6272
45	685 784	- 6 771.83	+213.49	9.8746	31.5262	9.8743	31.1308
50	648 823	- 8 106.67	+326.90	12.4944	40.3248	12.4945	50.3835
55	603 634	-10 090.67	+472.24	16.7165	46.7997	16.7164	78.2328
60	546 604	-12 856.00	+632.38	23.5198	49.1895	23.5194	115.6925
65	473 851	-16 339.00	+743.06	34.4813	45.4777	34.4814	156.8193
70	382 919	-19 967.83	+842.78	52.1464	42.2069	52.1450	220.0940
80	166 162	-21 013.75	+853.74	126.4654	40.6277	126.4689	513.7998

III. Kapitel.

1. Die Intensität der Verzinsung.

Ein Kapital 1 werde zu einem Zinsfusse i an Zins gelegt. Dasselbe wächst in der Zeit t an auf

$$(1+i)^t = f(t).$$

Die Intensität der Zunahme des Kapitals bei kontinuierlicher Verzinsung ist dargestellt durch

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = Lg\,(1+i) = \delta. \tag{1}$$

Die Intensität der Verzinsung ist somit konstant für jeden effektiven Zinsfuss i.

Es sei nun $\varphi(x+t)$ der Wert eines Kapitales im Zeitpunkt $(x+t)$, dann ist der Zinsertrag für das Zeitintervall $0-1$ dargestellt durch

$$\int_0^1 \varphi(x+t)\,\delta_{x+t}\,dt$$

und bezogen auf das Kapital 1

$$\frac{\int_0^1 \varphi(x+t)\,\delta_{x+t}\,dt}{\varphi(x)}. \tag{2}$$

Dieser Ausdruck ist nichts anderes als der Wert des effektiven Zinsfusses i. Zu Gleichung (2) wollen wir noch bemerken, dass δ_{x+t} als konstant anzusehen ist. Wir wollen aber obige Form bestehen lassen, weil sie in Übereinstimmung steht mit gewissen Ausdrücken, welche in der Lebensversicherungsmathematik eine grosse Rolle spielen. Identifizieren wir nämlich $\varphi(x+t)$ mit der Anzahl der Lebenden des Alters $x+t$, δ_{x+t} mit

der Sterbeintensität, so gibt uns Gleichung (2) die Abnahme der Gesamtheit der Lebenden infolge der Sterblichkeit in der Altersstrecke x bis $(x+1)$, bezogen auf einen Lebenden, oder mit andern Worten, die Sterbenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen.

Setzen wir in Gleichung (2)

$$\varphi(x+t) = (1+i)^t$$
$$\varphi(x) = 1$$

so erhalten wir zwischen den Grenzen 0 und 1

$$\int_0^1 (1+i)^t \, \delta_t \, dt = \delta \int_0^1 (1+i)^t \, dt.$$

Dies muss gleich dem effektiven Zinsfusse i sein. Das Integral können wir geschlossen auswerten. Wenn wir aber die durch Gleichung (8), Kap. I, gegebene Formel anwenden, so gelangen wir, unter Berücksichtigung, dass

$${}_0\nu_{(0)} = {}_1\nu_{(0)} = \ldots \quad {}_n\nu_{(0)} = \delta$$

zu folgender Reihe

$$\delta \int_0^1 (1+i)^t \, dt = \delta \left\{ 1 + \frac{\delta}{2!} + \frac{\delta^2}{3!} + \ldots \text{ in inf.} \right\} = e^\delta - 1$$

$$e^\delta = e^{Lg(1+i)} = (1+i).$$

Somit

$$\delta \int_0^1 (1+i)^t \, dt = i \qquad \text{q. e. d.} \tag{3}$$

Das Kapital 1 am Anfang des Jahres ist bis ans Ende des Jahres angewachsen auf

$$\int_0^1 (1+i)^t \, dt = \frac{i}{\delta} \tag{4}$$

und folglich ist der Zinsertrag bei kontinuierlicher Verzinsung

$$\left(\frac{i}{\delta} - 1\right)$$

Wir wollen noch den Fall betrachten, dass der Zins m Mal im Jahre entrichtet, aber nicht kapitalisiert werde.

Der Zinsertrag in einem Zeitabschnitt $\frac{1}{m}$ ist dargestellt durch

$$\int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t)\, \delta_{x+t}\, dt$$

und für die Zeit eines Jahres somit

$$m \int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t)\, \delta_{x+t}\, dt.$$

Der Ausdruck

$$\frac{m \int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t)\, \delta_{x+t}\, dt}{\varphi(x)} \tag{5}$$

gibt uns den sogenannten nominellen Zinsfuss, welcher also der m maligen Verzinsung im Laufe eines Jahres entspricht.

Die gebräuchliche Bezeichnung dafür ist $j^{(m)}$. In der Grenze, d. h. für $m = \infty$ wird

$$\lim_{m=\infty} j^{(m)} = \delta$$

Wenn $\varphi(x)$ die Anzahl der Lebenden, δ_{x+t} die Sterbeintensität bedeutet, so gibt uns

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t)\, \delta_{x+t}\, dt}{\varphi(x)}$$

die Wahrscheinlichkeit für einen $x$jährigen, im Zeitabschnit $0 - \frac{1}{m}$ zu sterben, oder die Sterblichkeitsrate für die Altersstrecke $0 - \frac{1}{m}$.

Setzen wir wiederum $\varphi(x+t) = (1+i)^t$, so wird

$$m \int_0^{\frac{1}{m}} (1+i)^t \delta_t \, dt = m \, \delta \left\{ \frac{1}{m} + \frac{\delta}{2!} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \ldots \text{ in inf.} \right\}$$

$$= m \left\{ e^{\frac{1}{m}\delta} - 1 \right\} = m \left\{ (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\}$$

somit

$$j^{(m)} = m \left\{ (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\} \tag{6}$$

woraus

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{j^{(m)}}{m}$$

und

$$i = \left(1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right)^m - 1. \tag{7}$$

Die Gleichungen (6) und (7) geben uns den bekannten Zusammenhang zwischen dem effektiven und nominellen Zinsfuss.

2. Zeitrenten.

Der Barwert der kontinuierlich während n Jahren zahlbaren Zeitrente 1 ist dargestellt durch

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 v^{\lambda+t} \, dt \tag{8}$$

wobei $v = \frac{1}{1+i}$.

Wie man sich leicht überzeugen kann, werden die Intensitätsfunktionen von $v^{\lambda+t}$ und den Ableitungen konstant, nämlich $Lg\, v$.

Legt man wiederum Gleichung (8) in Kap. I zugrunde, so folgt

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \sum_{\lambda=0}^{(n-1)} v^{\lambda} \left\{ 1 + \frac{1}{2!} Lg\, v + \frac{1}{3!} (Lg\, v)^2 + \ldots \text{ in inf.} \right\}$$

Die Klammer unter den Summenzeichen ist aber

$$\frac{e^{Lg\, v} - 1}{Lg\, v} = \frac{1 - v}{\delta}$$

weil bekanntlich $Lg\, v = -\delta$, somit wird

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v}{\delta} \sum_{\lambda=0}^{n-1} v^{\lambda} = \frac{1-v}{\delta\, v}\, a_{\overline{n}|}$$

Dabei ist $a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots v^n$ der Barwert der jährlich nachschussweise zahlbaren Zeitrente 1.

Da

$$\frac{1-v}{\delta\, v} = \frac{i}{\delta}$$

so wird schliesslich

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\, a_{\overline{n}|} \tag{9}$$

Lassen wir in der letzten Gleichung $n = \infty$ werden, so gelangen wir zum Barwert der ewigen (perpetuellen) kontinuierlichen Zeitrente.

Da

$$a_{\infty} = \frac{1}{i}$$

so wird

$$\bar{a}_{\infty} = \frac{1}{\delta}. \tag{10}$$

Ist die Zeitrente $m$mal jährlich zahlbar, je im Betrage von $\frac{1}{m}$, so wird ihr Barwert

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left\{v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots v^{\frac{m}{m}}\right\} \sum_{\lambda=0}^{n-1} v^{\lambda}$$

Der Ausdruck vor dem Summenzeichen ist aber unter Berücksichtigung von Gleichung (6)

$$v \cdot \frac{i}{m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}} = v \cdot \frac{i}{j^{(m)}}$$

folglich

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} v^{\lambda+1} = \frac{i}{j^{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|} \tag{11}$$

für $n = \infty$ wird

$$a_{\infty}^{(m)} = \frac{1}{j^{(m)}} \tag{12}$$

IV. Kapitel.

Die Sterbeintensität und ihre Anwendungen.

---

1. Die Sterbeintensität und ihre Abhängigkeit von den verschiedenen Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit innerhalb eines Jahres.

Es sei l_x die Anzahl der Lebenden vom Alter x. Die Sterbeintensität wird dann bekanntlich definiert durch den Ausdruck

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\left(\frac{d\,l_x}{dx}\right)$$

Wenn l_x als analytische Funktion des Alters x bekannt ist, so wird die Ermittlung von μ_x keine weiteren Schwierigkeiten bieten. Ist aber das Sterblichkeitsgesetz, auf welchem die Tafel aufgebaut ist, nicht bekannt, so sind wir zur Bestimmung von μ_x auf ein Näherungsverfahren angewiesen. Die Gleichung (16) des Kap. II ist die gebräuchlichste Form, welche zur numerischen Berechnung der Sterbeintensität dient. Die Daten einer Sterbetafel gestatten uns aber die Bestimmung der μ_x nur für ganze Altersjahre, so dass man oft genötigt ist, über den Verlauf innerhalb von Zeitabschnitten kleiner als ein Jahr gewisse Voraussetzungen zu machen.

a) Nehmen wir vorerst an, dass man μ_x während der Dauer eines Jahres als konstant ansehen könne. Die Zahl der Lebenden in einem beliebigen Zeitpunkte innerhalb eines Jahres ergibt sich dann durch Lösung der Differentialgleichung

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}} \frac{d\, l_{x+t}}{d\, t}.$$

Dabei ist $\mu_{x+t} = \mu_x$ konstant.

Integrieren wir über das Intervall $0 - t$, so folgt

$$l_{x+t} = l_x\, e^{-\mu_x t}. \tag{1}$$

Der Verlauf der Lebenden ist also durch eine Exponentialkurve dargestellt.

b) μ_{x+t} verlaufe innerhalb eines Jahres linear, so dass also

$$\mu_{x+t} = \mu_x - t\,(\mu_x - \mu_{x+1}) = \mu_x - t\, \Delta\, \mu_x.$$

Es wird dann die Anzahl der Lebenden im Zeitpunkte $x + t$ gegeben durch

$$(l_{x+t}) = l_x \cdot e^{-\mu_x t + \frac{t^2}{2} \cdot \Delta\, \mu_x} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(l_{x+t}) = e^{\frac{t^2}{2} \Delta \mu_x} \cdot l_{x+t} \tag{3}$$

Diese letzte Gleichung gibt uns ein Mass für die Abweichung, wenn wir die eine oder die andere Voraussetzung über den Verlauf der Sterbeintensität machen.

c) Untersuchen wir zum Schlusse noch die in der Praxis gebräuchliche Annahme, dass die Sterbefälle sich gleichmässig über das Jahr verteilen. In diesem Falle ist die Änderung der Anzahl der Lebenden in der Zeitstrecke d_x dargestellt durch

$$-d\,l_x = (l_x - l_{x+1})\,d_x$$

woraus

$$\mu_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = q_x \tag{4}$$

Es wird also die Sterbeintensität gleich der Sterbenswahrscheinlichkeit. Wenn man aber die zahlenmässige Vergleichung zwischen μ_x und q_x macht, so zeigt sich, dass diese Übereinstimmung eine sehr rohe ist, und daraus können wir rückwärts schliessen, wie wenig die Annahme des gleichmässigen Absterbens innerhalb eines Jahres gerechtfertigt ist. Wenn wir diese letztere Voraussetzung machen, so heisst das nichts anderes, als dass man das Absterben einer gleichaltrigen Gruppe von Lebenden während eines Jahres der Moivreschen Hypothese unterwirft.

2. Die mittlere Lebensdauer.

Die strenge Form derselben ist

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 l_{x+\lambda+t}\,dt \tag{5}$$

Das Integral unter dem Summenzeichen ist der Ausdruck für die Zeit, welche von $l_{x+\lambda}$ am Anfange des Jahres vorhandenen Lebenden im folgenden Jahre durchlebt wird.

Nach den Ausführungen des I. Kapitels ist aber

$$\int_0^1 l_{x+\lambda+t}\, dt = l_{x+\lambda} + \frac{1}{2!} l'_{x+\lambda} + \frac{1}{3!} l''_{x+\lambda} \cdots$$

Nun besteht die Relation

$$l'_{x+\lambda} = - l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda}$$

Setzen wir

$$l''_{x+\lambda} = l_{x+\lambda}\, u_{x+\lambda}$$

so folgt

$$u_{x+\lambda} = \frac{l''_{x+\lambda}}{l_{x+\lambda}} = - \frac{1}{l_{x+\lambda}} \frac{d\, l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}}$$

Da die Kurve der Lebenden im allgemeinen zwei Wendepunkte aufweist, so hat $l''_{x+\lambda}$ im Verlaufe der Sterbetafel nicht überall gleiches Vorzeichen. Eine Summation über einen Ausdruck, welcher $u_{x+\lambda}$ enthält, wird also positiv oder negativ einzuführen sein, je nach dem Alter, von dem ab der Summationsindex läuft. Wir setzen deshalb vor jeden Ausdruck, der $u_{x+\lambda}$ enthält, den Buchstaben ε_x wobei $\varepsilon_x = +1$ oder -1 ist, je nach dem Werte von x.

Ferner ist

$$u_{x+\lambda} = - \frac{1}{l_{x+\lambda}} \left\{ l_{x+\lambda} \frac{d\, \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} + \mu_{x+\lambda} \frac{d\, l_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \right\}$$

$$= - \left\{ \frac{d\, \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} - \mu^2_{x+\lambda} \right\}$$

Als Intensitätsfunktion zweiter Ordnung [1]) für die Sterblichkeit werde bezeichnet:

---

[1]) Prof. Dr. *Chr. Moser:* Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktionen. Heft 1 der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

$$\frac{1}{\mu_{x+\lambda}} \frac{d\,\mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} = \mu^{II}_{x+\lambda}$$

Es wird somit

$$u_{x+\lambda} = \mu_{x+\lambda} \{\mu_{x+\lambda} - \mu^{II}_{x+\lambda}\}$$

und folglich

$$\int_0^1 l_{x+\lambda+t}\, dt = l_{x+\lambda} \left\{1 - \frac{1}{2!}\,\mu_{x+\lambda} + \frac{1}{3!}\,\varepsilon_{x+\lambda}\, u_{x+\lambda}\right\}$$

$u_{x+\lambda}$ kann auch folgendermassen geschrieben werden

$$u_{x+\lambda} = \frac{l'_{x+\lambda}}{l_{x+\lambda}} \cdot \frac{l''_{x+\lambda}}{l'_{x+\lambda}}.$$

Dies ist aber nichts anderes als das Produkt der Intensitätsfunktionen der ursprünglichen Funktion $l_{x+\lambda}$ und ihres ersten Differentialquotienten.

Wir wollen die Reihe ihrer starken Konvergenz wegen mit dem dritten Gliede abbrechen; denn aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die folgenden Glieder keinen grossen Einfluss mehr ausüben.

Es wird also schliesslich

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} \left\{1 - \frac{1}{2}\,\mu_{x+\lambda}\right\} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{l_x}\,\varepsilon_x \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda}\, u_{x+\lambda}. \tag{6}$$

Begnügen wir uns mit einer weniger starken Annäherung, so können wir setzen

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} \left\{1 - \frac{1}{2}\,\mu_{x+\lambda}\right\}. \tag{7}$$

Aus Gleichung (7) folgt

$$l_x\, \mathring{e}_x - l_{x+1}\, \mathring{e}_{x+1} = l_x - \frac{1}{2}\, l_x\, \mu_x$$

woraus

$$\mathring{e}_x = \left(1 - \frac{1}{2}\,\mu_x\right) + p_x\, \mathring{e}_{x+1}. \tag{8}$$

Diese Rekursionsformel gestattet uns die Berechnung der vollständigen mittleren Lebensdauer aus den Reihen der p_x und μ_x.

Setzen wir in Gleichung (6) $\mu_x = q_x$, d. h. legen wir ein gleichmässiges Absterben zugrunde, so wird

$$u_{x+\lambda} = 0$$

und da

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda}\, q_{x+\lambda} = l_x$$

so wird

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} - \frac{1}{2} l_x \tag{9}$$

oder

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda+1} = \frac{1}{2} + \frac{L_{x+1}}{l_x} \tag{10}$$

wobei

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda+1} = l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots = L_{x+1}$$

Auf ähnlichem Wege kann man zu der Anzahl von Jahren gelangen, welche l_x Personen durchschnittlich in den nächsten n Jahren durchleben.

Dieser Wert ist dargestellt durch

$$_{|n}\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 l_{x+\lambda+t}\, dt$$

oder

$$_{|n}\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x} \left\{ L_x - L_{x+n} - \frac{1}{2!} \sum_{\lambda=0}^{n-1} l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3!}\, \varepsilon_x \sum_{\lambda=0}^{n-1} l_{x+\lambda}\, u_{x+\lambda} \right. \tag{11}$$

Man wird oft vor die Frage gestellt, namentlich bei der Behandlung der vollständigen Renten, die Zeit

zu ermitteln, welche die in einem gewissen Zeitintervall Gestorbenen durchschnittlich innerhalb demselben noch durchlebt haben.

Nehmen wir als Zeitabschnitt n Jahre.

Die von den Gestorbenen des ersten Jahres durchlebte Zeit ist

$$\int_0^1 t\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt.$$

Für die im zweiten Jahre Gestorbenen ergibt sich als durchlebte Zeit

$$(l_{x+1} - l_{x+2}) + \int_0^1 t\, l_{x+1+t}\, \mu_{x+1+t}\, dt$$

u. s. f.

Für das n^{te} Jahr folgt

$$(n-1)(l_{x+n-1} - l_{x+n}) + \int_0^1 t\, l_{x+n-1+t}\, \mu_{x+n-1+t}\, dt.$$

Es wird also von den innerhalb n Jahren Gestorbenen eine Zeit durchlebt von

$$(l_x - l_{x+n})\,({}_{|n}\mathring{e}_x) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \lambda\,(l_{x+\lambda} - l_{x+\lambda+1})$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 t\, l_{x+\lambda+t}\, \mu_{x+\lambda+t}\, dt.$$

Es ist aber

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} \lambda\,(l_{x+\lambda} - l_{x+\lambda+1}) = L_{x+1} - L_{x+n} - (n-1)\, l_{x+n}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 t\, l_{x+\lambda+t}\, \mu_{x+\lambda+t}\, dt = \sum_{\lambda=0}^{n-1} - l_{x+\lambda+1} + \int_0^1 l_{x+\lambda+t}\, dt$$
$$= - L_{x+1} + L_{x+n+1} + l_x\, {}_{|n}\mathring{e}_x,$$

folglich

$$({}_{|n}\mathring{e}_x) = \frac{l_x \, {}_{|n}\mathring{e}_x - n \cdot l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}} \tag{12}$$

Der Zähler ist offenbar die von sämtlichen zu Beginn des Intervalles vorhandenen l_x Lebenden im Zeitraum von n Jahren durchlebte Zeit, vermindert um die von den l_{x+n} Überlebenden durchlebte Zeit. Das durchschnittliche Alter beim Tode innerhalb der nächsten n Jahre ist somit

$$x + ({}_{|n}\mathring{e}_x).$$

Wir haben in diesem Abschnitt die Fragen, welche an die mittlere Lebensdauer anknüpfen, behandelt, ohne irgendwelche Voraussetzungen über den Verlauf des Absterbens zu machen.

Für den Spezialfall, dass sich die Sterbefälle gleichmässig über das Jahr verteilen, ist in den gefundenen Ausdrücken überall

$$u_{x+\lambda} = 0$$

und

$$\mu_{x+\lambda} = q_{x+\lambda}$$

zu setzen.

3. Die Sterbenswahrscheinlichkeit als Funktion der Sterbeintensität.

Die Anzahl der von l_x Personen im Laufe des folgenden Jahres Gestorbenen ist

$$d_x = \int_0^1 l_{x+t} \, \mu_{x+t} \, dt.$$

Es kann somit die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x dargestellt werden durch

$$q_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \, \mu_{x+t} \, dt}{l_x}.$$

Es ist aber

$$\int_0^1 l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt = l_x\,\mu_x + \frac{1}{2!}\,\frac{d\,l_x\,\mu_x}{d_x} + \cdots$$

$$= l_x\left\{\mu_x - \frac{1}{2}\,\varepsilon_x\,u_x\right\}.$$

Daraus folgt

$$q_x = \mu_x - \frac{1}{2}\,\varepsilon_x\,u_x = \mu_x - \frac{1}{2}\,\varepsilon_x\,(\mu_x^2 - \mu_x\,\mu_x^{II})$$

oder

$$q_x = \mu_x\left\{1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon_x\,(\mu_x - \mu_x^{II})\right\}. \tag{13}$$

(Über den Zusammenhang zwischen q_x und μ_x siehe auch *C. Landré,* Mathematisch-technisches Kapitel zur Lebensversicherung, Abschnitt 41.)

4. Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

a) Barwert der Kapitalversicherung 1, zahlbar am Ende des Jahres, in welchem der Versicherte stirbt.

Der Barwert der Kapitalversicherung 1, zahlbar am Ende des Sterbejahres, ist darstellbar durch

$$A_x = \frac{1}{l_x}\sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1}\int_0^1 l_{x+\lambda+t}\,\mu_{x+\lambda+t}\,dt. \tag{14}$$

Durch die Substitution

$$\mu_{x+\lambda+t} = -\frac{1}{l_{x+\lambda+t}}\,\frac{d\,l_{x+\lambda+t}}{dt}$$

kann der obige Ausdruck umgeformt werden in

$$A_x = \frac{1}{l_x}\sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1}\,\{l_{x+\lambda} - l_{x+\lambda+1}\} = \frac{1}{l_x}\sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1}\,d_{x+\lambda}. \tag{15}$$

Nach früherem können wir aber auch mit grosser Annäherung setzen

$$\int_0^1 l_{x+\lambda+t}\,\mu_{x+\lambda+t}\,dt = l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda} + \frac{1}{2!}\,\frac{d\,l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda}}{d_x}$$

$$= l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{x+\lambda}\,l_{x+\lambda}\,u_{x+\lambda}$$

folglich wird

$$A_x = \frac{1}{l_x}\sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1}\,l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda} - \frac{1}{2!}\,\varepsilon_x\,U_x \qquad (16)$$

Dabei ist

$$U_x = \frac{1}{l_x}\sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1}\,l_{x+\lambda}\,u_{x+\lambda}.$$

b) Barwert der Todesfallversicherung 1, zahlbar am Ende des Sterbeabschnittes $\frac{1}{m}$.

Wir denken uns das Jahr in m gleiche Zeitabschnitte von der Länge $\frac{1}{m}$ eingeteilt.

Der Barwert der Sterbesummen für die im ersten Intervall Gestorbenen ist

$$v^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{m}} l_{x+\lambda+t}\,\mu_{x+\lambda+t}\,dt = v^{\frac{1}{m}}\,l_{x+\lambda}\left\{\frac{1}{m}\,\mu_{x+\lambda} - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{2}\,u_{x+\lambda}\right\}$$

für den zweiten Zeitabschnitt finden wir

$$v^{\frac{2}{m}}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} l_{x+\lambda+t}\,\mu_{x+\lambda+t}\,dt = v^{\frac{2}{m}}\left\{\int_0^{\frac{2}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}}\right\}$$

$$= v^{\frac{2}{m}}\,l_{x+\lambda}\left\{\frac{1}{m}\,\mu_{x+\lambda} - \frac{\left(\frac{2}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{m}\right)^2}{2}\,u_{x+\lambda}\right\}$$

u. s. f.

Analog gestalten sich die Überlegungen für jedes folgende Intervall, so dass, wenn wir vorerst nur das erste Jahr berücksichtigen, der gesuchte Barwert folgende Form annimmt

$$l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m}\,v^{\frac{k}{m}} - l_{x+\lambda}\,u_{x+\lambda}\sum_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2m^2}\,v^{\frac{k}{m}} \quad (17)$$

Die Summe $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m}\,v^{\frac{k}{m}}$ gibt, wie man sich leicht überzeugen kann, $\frac{i\,v}{j^{(m)}}$, wobei $j^{(m)}$ den in Gleichung (6), Kapitel III, ermittelten Wert bedeutet. Gleichung (17) geht dann über in

$$\frac{i}{j^m}\left\{v\,l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda} + \frac{1}{2m}\,v\,l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda}\right\}$$
$$-\frac{1}{m^2}\,l_{x+\lambda}\,u_{x+\lambda}\sum_{K=1}^{m}k\,v^{\frac{k}{m}}.$$

Es ist ferner

$$\frac{1}{m^2}\sum_{K=1}^{m}k\,v^{\frac{k}{m}} = \frac{i\,v}{(j^{(m)})^2}\left(1+\frac{j^{(m)}}{m}\right) - \frac{v}{j^{(m)}}.$$

Summieren wir von $\lambda = 0$ bis ∞, unter Berücksichtigung der Diskontierung und unter Zuhülfenahme von Gleichung (16), so wird

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}}\,A_x + \frac{i}{j^{(m)}}\left\{\frac{1}{i} + \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{j^{(m)}}\right\}\varepsilon_x\,U_x \quad (18)$$

Es ist aber

$$\frac{1}{i} = a_\infty;\quad \frac{1}{j^{(m)}} = a_\infty^{(m)},$$

folglich können wir auch setzen

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x + \frac{i}{j^{(m)}} \left\{ a_\infty - a_\infty^{(m)} + \frac{m-1}{2m} \right\} \varepsilon_x U_x. \quad (19)$$

Wenn wir ein gleichmässiges Absterben innerhalb eines Jahres voraussetzen, so wird

$$U_x = 0,$$

weil dann $l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}$ als konstant anzusehen ist.

Unter dieser Annahme würde dann

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x. \quad (20)$$

(Text-Book Kap. IX, Gl. 10.)

c) Barwert der Todesfallversicherung 1, zahlbar im Momente des Todes.

Der allgemeine Ausdruck für den gesuchten Barwert ist offenbar

$$\bar{A}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} \, dt. \quad (21)$$

Durch die Substitution $l_{x+t} \mu_{x+t} = - d l_{x+t}$ wird obiger Summenausdruck übergeführt in

$$l_x \bar{A}_x = \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^\lambda \{ l_{x+\lambda} - v \, l_{x+\lambda+1} \}$$

$$+ Lg \, v \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} \, dt.$$

Die erste Summe ist

$$l_x \{ \mathfrak{a}_x - a_x \} = l_x$$

die zweite

$$Lg \, v \;\; l_x \bar{a}_x = - \delta \, l_x \bar{a}_x$$

und somit

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\, \bar{a}_x. \tag{22}$$

Wenn wir in den Gleichungen (18) und (19) des vorigen Abschnittes $m = \infty$ setzen, so gelangen wir zu einem angenäherten Werte von $\bar{A}_x$.

Da

$$\lim_{m=\infty} j^{(m)} = \delta$$

so wird

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x + \frac{i}{\delta}\left\{\frac{1}{i} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\right\} \varepsilon_x\, U_x \tag{23}$$

oder

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x + \frac{i}{\delta}\left\{a_\infty + \frac{1}{2} - \bar{a}_\infty\right\} \varepsilon_x\, U_x. \tag{24}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Sterbefälle sich gleichmässig über das Jahr verteilen, wird $U_x = 0$ und folglich

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \tag{25}$$

Für den Barwert von $\bar{A}_x$ wollen wir noch eine Reihe herleiten, welche ihrer Einfachheit wegen einiges Interesse bietet.

Betrachten wir vorerst das Integral

$$\int_0^1 v^t\, \varphi(t)\, dt = \int_0^1 F(t)\, dt.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, wird

$$\begin{aligned} F(o) &= \varphi(o) \\ F'(o) &= \varphi'(o) - \delta\, \varphi(o) \\ F''(o) &= \varphi''(o) - 2\,\delta\, \varphi'(o) + \delta^2 \varphi(o). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz für die Differentialquotienten an der untern Grenze des Intervalles ist leicht ersichtlich.

Nun haben wir gefunden, dass

$$\int_0^1 F_{(t)}\, dt = F_{(o)} + \frac{1}{2!} F'_{(o)} + \frac{1}{3!} F''_{(o)} \ldots$$

Unter Berücksichtigung des vorhergehenden Gleichungssystems wird dann

$$\int_0^1 v^t\, \varphi_{(t)}\, dt = \int_0^1 F_{(t)}\, dt = \varphi_o \left\{1 - \frac{\delta}{2!} + \frac{\delta^2}{3!} - \ldots\right\}$$

$$+ \varphi'_{(o)} \left\{\frac{1}{2!} - \delta \frac{\binom{2}{1}}{3!} + \delta^2 \frac{\binom{3}{2}}{4!} \ldots\right\}$$

$$+ \varphi''_{(o)} \left\{\frac{1}{3!} - \delta \frac{\binom{3}{1}}{4!} + \delta^2 \frac{\binom{4}{2}}{5!} \ldots\right\}$$

Der Koeffizient von $\varphi_{(o)}$ kann gesetzt werden

$$\frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} = \frac{i\,v}{\delta}$$

Zur Ermittlung der zweiten Summe setzen wir die Reihe an

$$R = \frac{\delta}{2!} - \frac{\delta^2}{3!} + \frac{\delta^3}{4!} \ldots$$

Es ist dann offenbar der Koeffizient von $\varphi'_{(o)}$ dargestellt durch $\frac{d\,R}{d\,\delta}$.

Nun ist

$$R = \frac{e^{-\delta} - 1 + \delta}{\delta}$$

woraus folgt

$$\frac{d\,R}{d\,\delta} = \frac{i\,v}{\delta^2} - \frac{v}{\delta}.$$

Identifizieren wir nun $\varphi(o)$ mit $l_x \mu_x$, $\varphi'(o)$ mit $\frac{d\, l_x \mu_x}{d_x} = - l_x u_x$, so wird

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} - \frac{1}{\delta} \varepsilon_x U_x\right\} + \frac{1}{\delta} \varepsilon_x U_x.$$

Unter Verwendung von Gleichung (16) ergibt sich schliesslich

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x + \frac{i}{\delta}\left\{\frac{1}{i} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\right\} \varepsilon_x U_x.$$

Diese Form ist mit Gleichung (23) identisch.

5. Barwert der lebenslänglich zahlbaren Leibrente 1.

a) Barwert der jährlich zahlbaren Leibrente 1.

Von l_x zu Anfang des Jahres vorhandenen Personen leben am Ende des Jahres noch

$$l_x - \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t}\, dt.$$

Der Barwert der an sie auszurichtenden Renten ist offenbar

$$v\left\{l_x - \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t}\, dt\right\}.$$

Führen wir diesen Gedankengang für sämtliche folgenden Jahre durch, so kann der gesuchte Barwert in folgender Form geschrieben werden

$$l_x a_x = \{v\, l_x + v^2 l_{x+1} + \ldots\}$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} \int_0^1 l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t}\, dt. \qquad (26)$$

Die hier auftretende Summe ist aber nichts anderes als $l_x A_x$.

Ferner ist

$$v\, l_x + v^2\, l_{x+1} + \ldots = v\,(a_x + 1).$$

Es wird somit

$$a_x = v\,(a_x + 1) - A_x\,,$$

woraus

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v} \tag{27}$$

oder

$$a_x = \frac{1 - (1 + i)\, A_x}{i}. \tag{28}$$

b) Barwert der Leibrente 1, zahlbar in m Raten.

Die Anzahl der Lebenden im Alter $x + \frac{1}{m}$ ist ausgedrückt durch

$$l_x - \int_0^{\frac{1}{m}} l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt,$$

somit der Barwert der an sie auszurichtenden Rentenraten

$$\frac{1}{m}\, v^{\frac{1}{m}} \left\{ l_x - \int_0^{\frac{1}{m}} l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt \right\}.$$

Für den zweiten Zeitabschnitt finden wir analog

$$\frac{1}{m}\, v^{\frac{2}{m}} \left\{ l_x - \int_0^{\frac{2}{m}} l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt \right\}.$$

$$\vdots$$

Für das erste Jahr ergibt sich somit ein Barwert von

$$l_x \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m}\, v^{\frac{k}{m}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m}\, v^{\frac{k}{m}} \int_0^{\frac{k}{m}} l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt.$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} = \frac{i\,v}{j^{(m)}}.$$

Ferner wird

$$\int_0^{\frac{k}{m}} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt = \frac{k}{m}\,l_x\,\mu_x + \frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2}{2}\,\frac{d\,l_x\,\mu_x}{d_x},$$

folglich der zweite Summenausdruck

$$l_x\,\mu_x \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m^2} v^{\frac{k}{m}} + \frac{1}{2}\,\frac{d\,l_x\,\mu_x}{d_x} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^2 v^{\frac{k}{m}}.$$

Die nur vom Abzinsungsfaktor v abhängigen Summen lassen sich ermitteln zu

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m^2} v^{\frac{k}{m}} = \frac{i\,v}{(j^{(m)})^2}\left\{1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right\} - \frac{v}{j^{(m)}}.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\right)^2 \frac{1}{m} =$$

$$\frac{i\,v}{(j^{(m)})^2}\left\{1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right\}\left\{\frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{2m} - \frac{1}{i}\right\} - \frac{v}{2j}.$$

Wenn wir nun die Summation über sämtliche Altersjahre durchführen und die Gleichungen (18), (27) und (28) berücksichtigen, so kann nach geeigneter Anordnung gesetzt werden:

$$a_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}}\,v\,(a_x + 1) - \frac{1}{j^{(m)}}\left(1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right) A_x^{(m)} + \frac{1}{j}\,A_x.$$

Dieser Ausdruck kann aber auch geschrieben werden zu

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{j^{(m)}} - \left(\frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{m}\right) A_x^{(m)} \qquad (29)$$

Es ist dabei $A_x^{(m)}$ nach Gleichung (18) berechnet.

Diese Form für $a_x^{(m)}$ stimmt überein mit derjenigen, welche sich unter der Voraussetzung gleichmässigen Absterbens ergibt (Text-Book, Kap. IX, Gl. 11), nur ist zu berücksichtigen, dass die zugehörigen Werte von $A_x^{(m)}$ nicht als identisch anzusehen sind. Gleichung (29) ist streng.

Stützen wir uns auf die Hypothese der gleichmässigen Verteilung der Sterbefälle über das Jahr, so wird, da nach Gleichung (20)

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x ,$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{j^{(m)}} \left\{ 1 - i A_x \left(\frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{m} \right) \right\}. \tag{30}$$

Zu den gefundenen Gleichungen für $a_x^{(m)}$ wollen wir noch bemerken, dass $\frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{m}$ den Barwert der ewig vorschussweise in Raten von $\frac{1}{m}$ zahlbaren Zeitrente 1 bedeutet.

c) Barwert der kontinuierlich zahlbaren Leibrente 1.

Der Barwert der kontinuierlich zahlbaren Leibrente 1 ist gegeben durch

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 v^{\lambda+t} \, l_{x+\lambda+t} \, dt. \tag{31}$$

Setzen wir in Gleichung (29) des vorigen Abschnittes $m = \infty$, so wird, da

$$\lim_{m=\infty} j^{(m)} = \delta,$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_x) \tag{32}$$

woraus auch folgt

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\, \bar{a}_x. \tag{33}$$

Diese letzten Gleichungen stellen uns den mathematisch genauen Zusammenhang zwischen $\bar{A}_x$ und $\bar{a}_x$ dar (Text-Book, Kap. X, Art. 16).

Setzen wir gleichmässiges Absterben voraus, so wird nach früherem

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$$

und folglich

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta^2} A_x. \tag{34}$$

Für das Integral

$$\int_0^1 v^t\, l_{x+t}\, dt$$

können wir eine Reihenentwicklung herleiten, welche uns gestattet, den Barwert $\bar{a}_x$ auf anderem Wege zu ermitteln.

Substituiert man

$$l_{x+t} = l_x - \int_0^t l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt = l_x - t\, l_x\, \mu_x - \frac{t^2}{2!} \frac{d\, l_x\, \mu_x}{d_x} \ldots$$

so wird

$$\int_0^1 v^t\, l_{x+t}\, dt = l_x \int_0^1 v^t\, dt - l_x\, \mu_x \int_0^1 t\, v^t\, dt$$

$$+ l_x\, \varepsilon_x\, u_x \int_0^1 t^2\, v^t\, dt$$

Die hier auftretenden Integrale lassen sich leicht auswerten. Es ist nämlich

$$\int_0^1 v^t\, dt = \frac{i\,v}{\delta}$$

$$\int_0^1 t\, v^t\, dt = -\frac{v}{\delta} + \frac{i\,v}{\delta^2}$$

$$\int_0^1 t^2\, v^t\, dt = -\frac{v}{\delta} + \frac{2}{\delta}\left\{-\frac{v}{\delta} + \frac{i\,v}{\delta^2}\right\}$$

u. s. f.

Nach durchgeführter Summation über alle Altersjahre erhält man für $\bar{a}_x$ den angenäherten Wert

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta^2} A_x + \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{i}{\delta} - \left(1 + \frac{i}{2}\right)\right] \varepsilon_x\, U_x. \qquad (35)$$

6. Die vollständigen Renten.

a) Die pro rata der im Todesjahre durchlebten Zeit zahlbare Schlussrente sei am Ende desselben zahlbar.

Da bei den vollständigen Renten für die im Sterbejahre durchlebte Zeit noch eine Rate gewährt wird, so ist offenbar für das erste Jahr der Barwert der fällig werdenden Renten

$$v\left\{l_{x+1} + \int_0^1 t\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt\right\} = v \int_0^1 l_{x+t}\, dt.$$

$\int_0^1 l_{x+t}\, dt$ gibt uns die Zeit, welche von l_x am Anfang des Jahres vorhandenen Lebenden im folgenden Jahre durchlebt wird, und der gesuchte Rentenbarwert ist offenbar proportional dieser Zeit.

Es wird somit

$$l_x\, \mathring{a}_x = \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} \int_0^1 l_{x+\lambda+t}\, dt. \qquad (36)$$

Setzen wir

$$\int_0^1 l_{x+\lambda+t}\,dt = l_{x+\lambda} - \frac{1}{2!}\,l_{x+\lambda}\,\mu_{x+\lambda}$$

$$- \frac{1}{3!}\,l_{x+\lambda}\,u_{x+\lambda},$$

so folgt

$$l_x\,\mathring{a}_x = l_x\,(a_x+1)\,v - \frac{1}{2}\,l_x\,A_x - \frac{5}{12}\,\varepsilon_x\,l_x\,U_x$$

oder

$$\mathring{a}_x = a_x + \frac{1}{2}\,A_x - \frac{5}{12}\,\varepsilon_x\,U_x. \tag{37}$$

Im Falle gleichmässigen Ablebens wird das letzte Glied 0 und somit

$$\mathring{a}_x = a_x + \frac{1}{2}\,A_x. \tag{38}$$

b) Die Schlussrente sei zahlbar im Momente des Todes.

Die im vorigen Abschnitt gemachte Annahme, dass die für die Gestorbenen noch auszurichtenden Rentenraten am Ende des Jahres zahlbar seien, ist in der Praxis nicht gebräuchlich, und wir wollen deshalb noch den Fall untersuchen, wenn die Raten im Zeitpunkte des Todes zahlbar sind.

Der Barwert der im ersten Jahre fällig werdenden Renten ist

$$v\,l_{x+1} + \int_0^1 t\,v^t\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$= \int_0^1 v^t\,l_{x+t}\,dt - \delta\int_0^1 t\,v^t\,l_{x+t}\,dt.$$

Der Ausdruck für $\mathring{a}_x$ setzt sich in diesem Falle aus zwei Rentenbarwerten zusammen, nämlich aus dem Barwerte für eine kontinuierlich zahlbare Leibrente und demjenigen für eine steigende kontinuierliche Rente,

letztere multipliziert mit dem negativen Betrage der Verzinsungsintensität. Die zweite Rente hat die Eigenschaft, dass sie zu Anfang eines jeden Jahres mit 0 beginnt und dann proportional der Zeit wächst.

Allgemein ist

$$l_x \mathring{a}_x = l_x a_x + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 t\, v^{\lambda+t}\, l_{x+\lambda+t}\, \mu_{x+\lambda+t}\, dt.$$

Zur Berechnung des Integrals schlagen wir folgenden Weg ein:

Es ist

$$\int_0^1 t\, v^{\lambda+t}\, l_{x+\lambda+t}\, \mu_{x+\lambda+t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\delta} \int_0^1 d\,(t\, v^{\lambda+t})\, l_{x+\lambda+t}\, \mu_{x+\lambda+t}$$

$$+ \frac{1}{\delta} \int_0^1 v^{\lambda+t}\, l_{x+\lambda+t}\, \mu_{x+\lambda+t}\, dt.$$

Das erste Integral kann gesetzt werden

$$-\frac{1}{\delta} \int_0^1 d\,(t\, v^{\lambda+t}) \left\{ l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda} + t\, \frac{d\, l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \ldots \right\}$$

$$= -\frac{1}{\delta} l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda} \int_0^1 d\,(t\, v^t) - \frac{1}{\delta} \frac{d\, l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \int_0^1 t\, d\,(t\, v^t)$$

$$= -\frac{1}{\delta} \left\{ v\, l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda} + v\, \frac{d\, l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \right\}$$

$$+ \frac{v}{\delta} \frac{d\, l_{x+\lambda}\, \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \left(-\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta^2} \right).$$

Summieren wir über sämtliche Altersjahre, so wird unser erstes Integral

$$-\frac{1}{\delta} l_x\, A_x + \left(\frac{1}{2\,\delta} + \frac{1}{\delta^2} - \frac{i}{\delta^3} \right) l_x\, \varepsilon_x\, U_x.$$

Im fernern ist nach durchgeführter Summation

$$\frac{1}{\delta}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\int_0^1 v^{\lambda+t}\, l_{x+\lambda+t}\, \mu_{x+\lambda+t}\, dt = \frac{1}{\delta}\,\bar{A}_x\, l_x\,,$$

somit wird schliesslich

$$\mathring{a}_x = a_x + \frac{1}{\delta}\{\bar{A}_x - A_x\} + \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2} - \frac{i}{\delta^3}\right)\varepsilon_x\, U_x. \tag{39}$$

Unter der Annahme einer gleichförmigen Verteilung der Sterbefälle wird

$$\mathring{a}_x = a_x + \frac{1}{\delta}\{\bar{A}_x - A_x\} \tag{40}$$

oder, da dann

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\, A_x,$$

$$\mathring{a}_x = a_x + \frac{i-\delta}{\delta^2}\, A_x. \tag{41}$$

Substituiert man in (40)

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\, \bar{a}_x\,,$$

so wird auch

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{\delta}(1 - A_x) - (\bar{a}_x - a_x). \tag{42}$$

Schlussbemerkungen.

Durch die Anwendung der im 1. Kapitel entwickelten Methode auf einige einfache Probleme der Lebensversicherungsmathematik glauben wir gezeigt zu haben, wie auf kontinuierlichem Wege sich die verschiedenen Fragen in übersichtlicher Form lösen lassen. Die Eulersche Summenformel, die bei der Be-

handlung solcher Aufgaben gewöhnlich in Anwendung kommt, setzt voraus, dass sich die Funktion $f(x)$ in der Umgebung eines Punktes x in die Form bringen lasse

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

also durch eine beständig konvergierende Potenzreihe darstellbar sei. Das ist aber, funktionentheoretisch gesprochen, nichts anderes, als dass $f(x)$ transcendente ganze Funktion ist. In unseren Entwicklungen haben wir über die analytische Struktur von $f(x)$ absolut keine Voraussetzungen gemacht, und es ist deshalb die in dieser Arbeit niedergelegte Methode als eine ganz allgemeine zu betrachten. Sie bietet auch den Vorteil, dass die Auswertung der verschiedenen vorkommenden Integrale auf mannigfache Weise vorgenommen werden kann, und wir haben mit Absicht nicht überall nach dem gleichen System die mechanische Quadratur vorgenommen.

Die Korrektionsglieder bei Barwerten von Versicherungsleistungen, die zu einem beliebig andern Zeitpunkte als am Ende des Jahres fällig werden, müssen streng genommen eine Summe darstellen, die sich über die ganze Sterbetafel erstreckt. Bei der gewählten Bezeichnungsweise wären die u_x und U_x als Korrekturen anzusehen. Ihre numerische Bestimmung erfordert keinen so grossen Arbeitsaufwand, als dass er sich nicht rechtfertigen liesse.

Gewöhnlich werden die Korrektionsglieder so ermittelt, dass man für die verschiedenen Zeitintervalle von $\frac{1}{m}$ die Gewinne oder Verluste für den Zins und die Sterblichkeit getrennt aufstellt und durch Grenzübergänge zu den kontinuierlichen Barwerten zu gelangen sucht. Diese Betrachtungen sind gewiss sehr instruktiv, aber im

allgemeinen etwas schwerfällig und nicht immer einwandfrei.

Die in der vorliegenden Arbeit niedergelegte Methode, welche eigentlich auf nichts anderem beruht als auf der Entwicklung eines bestimmten Integrales an der untern Grenze des Integrationsweges, ist eine ganz allgemeine. Sie enthebt uns auch der Notwendigkeit, über den Verlauf der Funktion zwischen ganzzahligen Argumentenwerten irgendwelche Annahmen zu machen.

Die in der Lebensversicherung vorkommenden Funktionen haben die angenehme Eigenschaft, dass die Differentialquotienten erster und höherer Ordnung eine rasche Abnahme zeigen, so dass die durchgeführten Reihenentwicklungen sehr konvergent sind. Es ist uns dadurch ein Mittel an die Hand gegeben, diese rein kontinuierliche Methode so weit zur Anwendung zu bringen, dass sie auch in der Praxis den Vergleich mit den bisher angewandten Prinzipien aushalten kann.