

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	3 (1908)
<b>Artikel:</b>	Die indirekte Methode zur Berechnung der Anwartschaft auf Witwenrente
<b>Autor:</b>	Schaertlin, G.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-967417">https://doi.org/10.5169/seals-967417</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die indirekte Methode zur Berechnung der Anwartschaft auf Witwenrente.

Von Dr. G. Schaertlin.

1. Seitdem Behm<sup>1)</sup> und Zillmer<sup>2)</sup> und andere Autoren in Deutschland, Ralph P. Hardy<sup>3)</sup>, Meikle<sup>3)</sup>, King<sup>4)</sup>, Manly<sup>5)</sup>, Allin<sup>6)</sup> und E. C. Thomas<sup>7)</sup> in England zur Berechnung der Anwartschaft auf Witwenrente die Wahrscheinlichkeit, verheiratet zu sein, also das Verhältnis der Zahl der verheirateten Männer eines bestimmten Alters zu der Zahl der Männer desselben Alters überhaupt, eingeführt haben, ist von der neuen Methode vielfach Gebrauch gemacht worden<sup>8)</sup>.

Das Verfahren, als indirekte Methode bekannt, von den englischen Autoren „Collective method“ genannt, scheint um so mehr Aussicht zu haben, sich

<sup>1)</sup> G. Behm, Entwurf eines Gesetzes betreffend die Unfallversicherung der Arbeiter nebst Begründung, sowie eine Denkschrift, betreffend die Gefahrenklassen, Berlin 1882.

<sup>2)</sup> Zillmer, Assekuranz-Jahrbuch von A. Ehrenzweig, XII. Jahrgang,

<sup>3)</sup> Man vergleiche J. I. A., XXXVIII, S. 163.

<sup>4)</sup> J. I. A., XXX, S. 291.

<sup>5)</sup> J. I. A., XXXVI, S. 209, XXXVIII, S. 101 und XLII, S. 1.

<sup>6)</sup> J. I. A., XXXIX, S. 337.

<sup>7)</sup> J. I. A., XL, S. 188.

<sup>8)</sup> Auch die Arbeit von O. Schjøll, Christiania 1892, von der ein Auszug im J. I. A., XL, S. 200 enthalten ist, behandelt diesen Gegenstand.

allgemein einzubürgern, als sorgfältige Untersuchungen gezeigt haben, dass dessen Ergebnisse sehr gut mit denen der komplizierteren direkten Methode, die mit den Sterbenswahrscheinlichkeiten der Frauen in der Ehe und der Wahrscheinlichkeit des Heiratens der ledigen und der verwitweten Aktiven rechnet, übereinstimmen<sup>1)</sup>. Ratsam ist es freilich, wie schon Zillmer es verlangt, die Wahrscheinlichkeiten, verheiratet zu sein, aus den Beobachtungen der Kasse, deren Belastung zu ermitteln ist, abzuleiten, also nicht auf fremde Erfahrungen abzustellen. Ferner ist die Methode noch einer wesentlichen Verbesserung fähig. Statt die Wahrscheinlichkeiten, verheiratet zu sein, aus den Beobachtungen an den lebenden Männern herzuleiten, empfiehlt es sich, den Zivilstand der Männer zur Zeit des Ablebens aufzuzeichnen. Handelt es sich um eine Pensionskasse, so ist auf die Zeit der Invalidierung oder des Ablebens als Aktiver abzustellen<sup>2)</sup>. Denn es ist nicht erwiesen und auch nicht zu erwarten, dass die Wahrscheinlichkeiten, verheiratet zu sein und, worauf es weiter ankommt, die Altersverhältnisse der Männer und Frauen bei gesunden und bei kranken oder gebrechlichen Männern übereinstimmen. Mit andern Worten, es darf die Wahrscheinlichkeit, dass ein gestorbener Aktiver oder ein zu den Invaliden übertretender verheiratet war oder ist, nicht gleichgesetzt werden mit der Wahrscheinlichkeit, dass ein gleichaltriger Aktiver verheiratet ist. Über-

---

<sup>1)</sup> J. Karup, die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät. S. 61.

<sup>2)</sup> Befinden über die Pensions- und Hülfskassen der schweizerischen Bundesbahnen von J. Rebstein und G. Schaerlin. S. 30. Bern 1904. Neukomm & Zimmermann.

Anderer Meinung scheint King zu sein. Vergl. in dieser Beziehung J. I. A., XXXVIII, S. 165.

einstimmung ist nur dann zu erwarten, wenn die Ursache des Ausscheidens aus der Aktivität in keinem oder nur in einem entfernten Zusammenhang mit dem Gesundheitszustand des Aktiven steht, beispielsweise dann, wenn ein Unfall die Ursache des Ausscheidens ist.

Man hat im allgemeinen um so eher Veranlassung, auf die Beobachtungen an Ausscheidenden abzustellen, als Aufzeichnungen darüber so wie so bei den Pensionskassen gemacht werden müssen und infolgedessen viele dieser Kassen auch schon ausreichende Beobachtungen besitzen.

Eine weitere Fehlerquelle der indirekten Methode, so wie sie bisher gehandhabt wurde, ist von geringerem Belang. Karup<sup>1)</sup> macht mit Recht darauf aufmerksam, dass die Wahrscheinlichkeit, verheiratet zu sein, nicht nur vom Alter, sondern auch von der Dienstdauer abhängig ist. Diese Abhängigkeit besteht aber, ohne besonders berücksichtigt zu werden, auch für die Wahrscheinlichkeit des Heiratens. Allerdings ist der Einfluss dieser Tatsache bei der direkten Methode weniger bedeutend als der entsprechende bei der indirekten. Immerhin wird man auch bei dieser die Tragweite dieses Zusammenhangs nicht hoch anzu schlagen haben. Ihn zu berücksichtigen wird dann an der Zeit sein, wenn auch der noch wichtigeren Abhängigkeit der Invaliditäts-<sup>2)</sup> und Sterbenswahrscheinlichkeiten der Aktiven von der Dienstdauer einerseits, der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Invaliden von der Invaliditätsdauer anderseits, Rechnung getragen werden kann.

<sup>1)</sup> J. Karup, a. a. O., S. 59.

<sup>2)</sup> E. Blaschke, Internationaler Arbeiterversicherungskongress, Wien. II. Band, S. 129.

Die bereits hervorgehobene Bedeutung der indirekten Methode rechtfertigt das Bestreben, sie für die Praxis so handlich als möglich zu gestalten. Was zurzeit besonders vermisst wird, ist der Einblick in den Zusammenhang der verschiedenen Anwartschaften, verschieden, je nachdem die Rente vorschüssig oder nachschüssig, in ganzjährigen oder unterjährigen Raten, mit oder ohne Schlussrente im Todesfall gewährt wird. Eine genaue Untersuchung der verschiedenen Methoden zur Herleitung von Anwartschaften scheint uns auch darum erwünscht, weil die von verschiedenen Autoren gegebenen Berechnungsmethoden von einander abweichen<sup>1)</sup>, manchmal auch der genaueren Begründung entbehren.

Wem der Aufwand zur Feststellung genauer Beziehungen und der Voraussetzungen, unter welchen sie gelten, in keinem Verhältnis zur Zuverlässigkeit des vorhandenen statistischen Materials zu stehen scheint, möge bedenken, dass die mathematische Theorie durch solche Erwägungen sich nicht davon abhalten lassen darf, die ihr zukommenden Aufgaben zu lösen.

**2.** Die folgenden Entwicklungen erfordern die Kenntnis von Spezialwerten des allgemeinen Integrals

$$J = \int_{t=0}^{t=1} \frac{(1 - \alpha t) (1 - \beta t)}{(1 - at) (1 - bt)} dt,$$

wo  $\alpha, \beta, a, b$  Konstante bezeichnen.

Nach den Regeln der Integralrechnung findet man

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

---

<sup>1)</sup> Hugo Meyer, Beiträge zur Pensionsversicherung. 1903.  
Jena. G. Fischer.

wobei

$$J_1 = \frac{\alpha\beta}{ab},$$

$$J_2 = \frac{(\alpha - a)(\beta - a)}{a^2(b - a)} \log(1 - a),$$

$$J_3 = \frac{(\alpha - b)(\beta - b)}{b^2(a - b)} \log(1 - b).$$

Für Werte von  $\varepsilon$ , die wenig von 1 verschieden sind, ist sehr annähernd

$$\log \varepsilon = -2 \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Wir können folglich für kleine Werte von  $a$  und  $b$  setzen

$$\log(1 - a) = -2 \cdot \frac{a}{2 - a}$$

und

$$\log(1 - b) = -2 \cdot \frac{b}{2 - b}.$$

Mit diesen angenäherten Werten von  $\log(1 - a)$  und  $\log(1 - b)$  gehen wir in den Ausdruck für unser Integral ein und erhalten nach gehöriger Reduktion

$$J = \frac{(2 - \alpha)(2 - \beta)}{(2 - a)(2 - b)}. \quad (1)$$

Diese Annäherung hat nur Gültigkeit für kleine Werte von  $a$  und  $b$ .

## I. Die Aktiven-Witwenrente.

**3. Die Anwartschaft auf die lebenslängliche Witwenrente 1, zu beziehen, nachdem der Mann als Aktiver gestorben ist, erstmals zu Beginn des auf das Todesjahr folgenden Versicherungsjahres.**

Wir gehen aus von der Aktivitätsordnung der Männer. Die Zahl der Aktiven des Alters  $x$  sei  $\bar{l}_x^{aa}$ . Das Ausscheiden der Aktiven erfolge durch Tod und Invalidität; die Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven sei nach der Beobachtung  $\bar{q}_x^{aa}$ .

Die Erfahrung an einer grossen Anzahl von Männern, die im Alter  $x$  als Aktive gestorben, habe als Wahrscheinlichkeit, verheiratet zu sein, den Wert  $h_x$  ergeben.

Insbesondere sei die Wahrscheinlichkeit, mit einer Frau des Alters  $y$  verheiratet zu sein,  $h_{xy}$ <sup>1)</sup>, so dass

$$h_x = \sum h_{xy},$$

wo die Summation vom niedrigsten Alter der Frauen bis zum höchsten gehen soll, was wir der Einfachheit wegen andeuten wollen mit

$$h_x = \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy}.$$

Wir setzen voraus, dass  $h_{x+t:y+t}$ , die Wahrscheinlichkeit, dass der  $x+t$ -jährige Aktive mit einer Frau des Alters  $y+t$  verheiratet ist, sich mit  $t$  stetig ändere.

Unser nächstes Ziel ist nun die Bestimmung von  $a_{x|y}$ <sup>2)</sup>, des Barwertes der Belastung mit Witwenrente auf einen Aktiven ( $x$ ) der Aktivengruppe  $\bar{l}_x^{aa}$ , herrührend von den Ehefrauen mit dem Altersunterschied  $x-y$ .

Dabei soll einmal der Umstand berücksichtigt werden, dass von der Aktivengruppe nur ein Teil, nämlich  $\bar{l}_x^{aa} h_{xy}$ , mit Frauen des Alters  $y$  verheiratet

<sup>1)</sup> Solehe Wahrscheinlichkeiten lassen sich unter anderem aus den Daten herleiten, welche Leubin in seiner Arbeit „Versicherungstechnische Orientierung“, Bern 1903, in Tabelle II gegeben hat.

<sup>2)</sup> In der Schreibschrift verwenden wir dafür das  $\alpha$  der deutschen Kurrentschrift.

ist, und ferner, dass der Bestand der verheirateten Aktiven, deren Frauen den Altersunterschied  $x - y$  aufweisen, durch das Ausscheiden der Aktiven zufolge Todes oder Invalidität, durch Verheiratung und weiter durch das Absterben der Frauen verändert wird.

Nach Ablauf des  $n$ . Versicherungsjahres setzt sich der in Betracht fallende Bestand zusammen aus den Aktiven, die mit Frauen des Alters  $y + n$  verheiratet sind; ihre Zahl ist  $\bar{l}_{x+n}^{aa} h_{x+n:y+n}$ .

Entsprechend ist die Zahl der anrechenbaren Aktiven des Alters  $x + n + t$

$$\bar{l}_{x+n+t}^{aa} h_{x+n+t:y+n+t}.$$

Ist  $\bar{\mu}_x^{aa}$  die Sterbensintensität<sup>1)</sup> der Aktiven ( $x$ ), so sterben von den Aktiven im Alter  $x + n + t$  bis  $x + n + t + dt$  (kurz ausgedrückt: im Alter  $x + n + t$ ) verheiratet

$$\bar{l}_{x+n+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+n+t}^{aa} h_{x+n+t:y+n+t} dt.$$

Die Gestorbenen hinterlassen ebensoviele Witwen des Alters  $y + n + t$ .

Von diesen Witwen erleben das Alter  $y + n + 1$

$$\bar{l}_{x+n+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+n+t}^{aa} h_{x+n+t:y+n+t} \frac{\bar{l}_{y+n+1}^{ww}}{\bar{l}_{y+n+t}^{ww}} dt.$$

Hierin bedeutet  $\bar{l}_y^{ww}$  die Zahl der Witwen des Alters  $y$  der Ausscheideordnung<sup>2)</sup> der Witwen.

Dabei hat es die Meinung, dass bei der Ableitung der Ausscheideordnung der Witwen diejenigen, die

---

<sup>1)</sup> Vergleiche Heft 1, S. 54, der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

<sup>2)</sup> Amtmann und Pfaffenberger, Zur Mathematik der Pensionsversicherung. 1907. G. Fischer, Jena.

eine weitere Ehe eingegangen, wie die Gestorbenen behandelt worden seien.

Eine solehe Ausscheideordnung kann entweder direkt aus den statistischen Beobachtungen hergeleitet oder aus einer Sterbetafel für Witwen und der Heiratswahrscheinlichkeit für Witwen nach bekannten Verfahren bestimmt werden.

Um die gesamte Zahl der Witwen mit dem Altersunterschied  $x - y$  zu finden, welche nach dem Alter  $y + n$  Witwen geworden und das Alter  $y + n + 1$  als Witwen erleben, ist die Summe der Werte zu bilden, welche das letzte Produkt für alle Werte von  $t = 0$  bis  $t = 1$  annimmt.

Die Zahl der das Alter  $y + n + 1$  erlebenden Witwen ist also

$$\int_{t=0}^{t=1} l_{x+n+t}^{\overline{aa}} \mu_{x+n+t}^{\overline{aa}} h_{x+n+t:y+n+t} \frac{l_{y+n+1}^{\overline{ww}}}{l_{y+n+t}^{\overline{ww}}} dt.$$

Bezieht jede dieser Witwen vom Ende des Sterbjahres des Mannes ab eine vorschüssige Rente, so belastet jede die Kasse am Ende des Sterbjahres des Mannes mit  $1 + a_{y+n+1}^{\overline{ww}}$ . Die Belastung für jene Zeit ist also

$$\int_{t=0}^{t=1} l_{x+n+t}^{\overline{aa}} \mu_{x+n+t}^{\overline{aa}} h_{x+n+t:y+n+t} \frac{l_{y+n+1}^{\overline{ww}}}{l_{y+n+t}^{\overline{ww}}} (1 + a_{y+n+1}^{\overline{ww}}) dt.$$

Diskontiert man auf das Alter Null der Aktiven zurück, so erhält man

$$v^{x+n+1} \int_{t=0}^{t=1} l_{x+n+t}^{\overline{aa}} \mu_{x+n+t}^{\overline{aa}} h_{x+n+t:y+n+t} \frac{l_{y+n+1}^{\overline{ww}}}{l_{y+n+t}^{\overline{ww}}} (1 + a_{y+n+1}^{\overline{ww}}) dt.$$

$$\begin{aligned} & \frac{v^{x+n+1} l_{x+n}^{\overline{aa}} \mu_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n:y+n} l_{y+n+1}^{\overline{ww}}}{l_{y+n}^{\overline{ww}}} \\ & \quad \frac{v^{x+n+1} l_{x+n}^{\overline{aa}} \mu_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n:y+n} l_{y+n+1}^{\overline{ww}}}{l_{y+n}^{\overline{ww}}} \end{aligned}$$

Zur Auswertung des Integrales sind bestimmte Annahmen über den Verlauf der auftretenden Funktionen dienlich.

Es mögen sich die Todesfälle der Aktiven in den Grenzen  $t = 0$  bis  $t = 1$  gleichförmig über das Jahr verteilen. Das heisst, es sei

$$\bar{l}_{x+n+t}^{aa} \bar{l}_{x+n+t}^{aa} = \bar{l}_{x+n}^{aa} \bar{l}_{x+n}^{aa}.$$

Die Wahrscheinlichkeit  $h_{x+n+t:y+n+t}$  verlaufe innerhalb derselben Grenzen linear; es sei also

$$h_{x+n+t:y+n+t} = h_{x+n:y+n} - t(h_{x+n:y+n} - h_{x+n+1:y+n+1})$$

und ferner

$$\bar{l}_{y+n+t}^{ww} = \bar{l}_{y+n}^{ww} - t(\bar{l}_{y+n}^{ww} - \bar{l}_{y+n+1}^{ww}).$$

Dann kann der auszuwertende Ausdruck geschrieben werden

$$v \cdot D_{x+n}^{aa} \bar{q}_{x+n}^{aa} \bar{l}_{y+n+1}^{ww} (1 + a_{y+n+1}^{ww}) \\ \int_{t=0}^{t=1} \frac{h_{x+n:y+n} - t(h_{x+n:y+n} - h_{x+n+1:y+n+1})}{\bar{l}_{y+n}^{ww} - t(\bar{l}_{y+n}^{ww} - \bar{l}_{y+n+1}^{ww})} dt.$$

Wegen Gleichung (1) hat das in diesem Produkte vorkommende Integral  $J$  den Wert

$$J = \frac{h_{x+n:y+n} + h_{x+n+1:y+n+1}}{\bar{l}_{y+n}^{ww} + \bar{l}_{y+n+1}^{ww}},$$

oder

$$J = 2 \cdot \frac{h_{x+n+\frac{1}{2}:y+n+\frac{1}{2}}}{\bar{l}_{y+n}^{ww} + \bar{l}_{y+n+1}^{ww}}.$$

Unser Produkt nimmt daher die Form an

$$v \cdot D_{x+n}^{aa} \bar{q}_{x+n}^{aa} h_{x+n+\frac{1}{2}:y+n+\frac{1}{2}} \frac{2 \bar{p}_{y+n}^{ww}}{1 + \bar{p}_{y+n}^{ww}} (1 + a_{y+n+1}^{ww}),$$

wo  $p_{y+n}^{\overline{ww}}$  die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass die Witwe  $(y+n)$  im nächsten Jahr weder stirbt noch heiratet.

Das Produkt gibt die auf das Alter 0 der Aktiven diskontierte Belastung aus den Sterbefällen des  $(n+1)$ . Versicherungsjahrs.

Für einen Aktiven  $(x)$  ist die auf das Alter  $x$  bezogene Belastung aller Versicherungsjahre oder  $\mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{aa}}$

$$\mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{aa}} = \frac{v}{D_x^{\overline{aa}}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n+\frac{1}{2}: y+n+\frac{1}{2}} \frac{2 p_{y+n}^{\overline{ww}}}{1 + p_{y+n}^{\overline{ww}}} \cdot (1 + a_{y+n+1}^{\overline{ww}}).$$

Legt man  $y$  der Reihe nach alle Werte vom niedrigsten bis zum höchsten Alter bei und addiert die sämtlichen Belastungen, so ergibt sich für einen Aktiven  $(x)$  der Gruppe  $\mathfrak{l}_x^{\overline{aa}}$  die erwartungsmässige Gesamtbelaistung mit Witwenrenten. Die Summe bezeichnen wir mit  $\mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}}$ , so dass wir haben

$$\mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}} = \sum_{y=0}^{y=\infty} \mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{aa}}.$$

Führen wir die Bezeichnung

$$B_x^{\overline{aa}} = \sum_{y=0}^{\infty} h_{x+\frac{1}{2}: y+\frac{1}{2}} \frac{2 p_y^{\overline{ww}}}{1 + p_y^{\overline{ww}}} (1 + a_{y+1}^{\overline{ww}}) \quad (2)$$

ein, wobei  $B_x^{\overline{aa}}$  die erwartungsmässige Belastung mit Witwenrente durch den Todesfall eines Aktiven im  $(x+1)$ . Lebensjahr, bezogen auf das Alter  $x+1$ , bedeutet, so können wir durch die Veränderung der Reihenfolge der Summation auch schreiben

$$\mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}} = \frac{v}{D_x^{\overline{aa}}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} B_{x+n}^{\overline{aa}}. \quad (3)$$

**4. Die Anwartschaft auf kontinuierliche Witwenrente, beginnend mit dem Tode des Aktiven.**

Obgleich der Anwendung der Beziehung (3) nichts im Wege steht, empfiehlt es sich, dem Vorgehen der Praxis folgend, eine etwas einfachere Berechnungsmethode zu suchen. Dies kann dadurch geschehen, dass man annimmt, die beim Tod eines Aktiven in Anschlag zu bringende Belastung  $h_{x+t:y+t} \bar{a}_{y+t}^{ww}$  verlaufe in jedem Versicherungsjahr linear.

Die Belastung durch die Witwen des Alters  $y+n+t$ , welche Witwen durch die Todesfälle der Aktiven des Alters  $x+n+t$  entstanden sind, ist, auf die Geburtszeit der Aktiven bezogen,

$$v^{x+n+t} l_{x+n+t}^{\bar{aa}} \mu_{x+n+t}^{\bar{aa}} h_{x+n+t:y+n+t} \bar{a}_{y+n+t}^{ww} dt.$$

Setzt man

$$l_{x+n+t}^{\bar{aa}} \mu_{x+n+t}^{\bar{aa}} = l_{x+n}^{\bar{aa}} q_{x+n}^{\bar{aa}}$$

und

$$h_{x+n+t:y+n+t} \bar{a}_{y+n+t}^{ww} = h_{x+n:y+n} \bar{a}_{y+n}^{ww} - t(h_{x+n:y+n} \bar{a}_{y+n}^{ww} - h_{x+n+1:y+n+1} \bar{a}_{y+n+1}^{ww}),$$

so kann die auf die Geburtszeit der Aktiven diskontierte Belastung, welche durch diese im Alter  $y+n$  bis  $y+n+1$  entstandenen Witwen hervorgerufen wird, geschrieben werden:

$$l_{x+n}^{\bar{aa}} q_{x+n}^{\bar{aa}} v^{x+n} \int_{t=0}^{t=1} v^t \{ h_{x+n:y+n} \bar{a}_{y+n}^{ww} - t(h_{x+n:y+n} \bar{a}_{y+n}^{ww} - h_{x+n+1:y+n+1} \bar{a}_{y+n+1}^{ww}) \} dt.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{h_{x+n:y+n} \bar{a}_{y+n}^{ww} - h_{x+n+1:y+n+1} \bar{a}_{y+n+1}^{ww}}{h_{x+n:y+n} \bar{a}_{y+n}^{ww}},$$

so ist auszuwerten der Ausdruck

$$J = l_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} v^{x+n} h_{x+n; y+n} \bar{a}_{y+n}^{\overline{ww}} \int_{t=0}^{t=1} v^t (1 - \alpha t) dt.$$

Nun ist aber

$$\int_{t=0}^{t=1} v^t dt = \frac{iv}{\delta} = \frac{d}{\delta}$$

und

$$\int_{t=0}^{t=1} t v^t dt = \frac{v}{\delta^2} (i - \delta),$$

wobei

$$\delta = \log(1 + i).$$

Da angenähert

$$\frac{i - \delta}{\delta} = \frac{i}{2},$$

kann man schreiben

$$\int_{t=0}^{t=1} t v^t dt = \frac{iv}{2\delta} = \frac{d}{2\delta}.$$

Das Integral im Ausdruck für  $J$  kann daher geschrieben werden

$$\frac{d}{\delta} \left( 1 - \frac{i}{2} \right).$$

oder wegen der Bedeutung von  $\alpha$

$$\frac{d}{2\delta} \frac{h_{x+n; y+n} \bar{a}_{y+n}^{\overline{ww}} + h_{x+n+1; y+n+1} \bar{a}_{y+n+1}^{\overline{ww}}}{h_{x+n; y+n} \bar{a}_{y+n}^{\overline{ww}}}.$$

Der auszuwertende Ausdruck nimmt nun die Form an

$$\frac{d}{2\delta} l_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} v^{x+n} (h_{x+n; y+n} \bar{a}_{y+n}^{\overline{ww}} + h_{x+n+1; y+n+1} \bar{a}_{y+n+1}^{\overline{ww}}).$$

Infolge dessen ist

$$\bar{a}_{x|y}^{aa} = \frac{d}{2\delta} \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{aa} q_{x+n}^{aa} (h_{x+n:y+n} \bar{a}_{y+n}^{ww} + h_{x+n+1:y+n+1} \bar{a}_{y+n+1}^{ww})$$

und

$$\bar{a}_{x|}^{aa} = \sum_{y=0}^{\infty} \bar{a}_{x|y}^{aa}.$$

Führen wir die Bezeichnung ein

$$\bar{B}_x^{aa} = \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy} \bar{a}_y^{ww}, \quad (4)$$

so können wir dem gesuchten Barwert die Form geben

$$\bar{a}_{x|}^{aa} = \frac{d}{2\delta} \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{aa} q_{x+n}^{aa} (\bar{B}_{x+n}^{aa} + \bar{B}_{x+n+1}^{aa}). \quad (5)$$

Will man, was sich empfiehlt, bei der Bestimmung der Anwartschaft auf kontinuierliche Witwenrente von Hypothesen über den Verlauf der in Betracht fallenden Funktionen abssehen, so wird man die Euler-, Mae Laurinsche Summenformel<sup>1)</sup> benützen und unter der Annahme der Stetigkeit der erwähnten Funktionen die folgende Überlegung anstellen.

Die Anwartschaft auf kontinuierliche Witwenrente für Witwen mit der Altersdifferenz  $x - y$  wird gegeben durch

$$\bar{a}_{x|y}^{aa} = \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} h_{x+t:y+t} \bar{a}_{y+t}^{ww} dt.$$

<sup>1)</sup> Über die Zulässigkeit ihrer Anwendung ohne Schätzung des Restgliedes vergleiche Karup, a. a. O., S. 91.

Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung ein

$$\bar{B}_{xy}^{aa} = h_{xy} \bar{a}_y^{ww},$$

so ist

$$\bar{a}_{x|y}^{aa} = \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} \bar{B}_{x+t:y+t}^{aa} dt.$$

Bezeichnen wir ferner

$$\Sigma F(z) = F(z) + F(z+1) + F(z+2) + \dots,$$

so ist nach der Eulerschen Summenformel

$$\Sigma F(z) = \int_z^\infty F(z) dz + \frac{1}{2} F(z) - \frac{1}{12} F'(z) + \dots$$

Für  $z = 0$  wird

$$\Sigma F(0) = F(0) + F(1) + F(2) + \dots$$

und

$$\Sigma F(0) = \int_{z=0}^\infty F(z) dz + \frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0).$$

In unserem Falle ist

$$F(z) = F(t) = D_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} \bar{B}_{x+t:y+t}^{aa},$$

$$F(0) = D_x^{aa} \mu_x^{aa} \bar{B}_{xy}^{aa}.$$

Nun ist näherungsweise

$$F'(t) = -\frac{1}{2} (D_{x+t-1}^{aa} \mu_{x+t-1}^{aa} \bar{B}_{x+t-1:y+t-1}^{aa}$$

$$- D_{x+t+1}^{aa} \mu_{x+t+1}^{aa} \bar{B}_{x+t+1:y+t+1}^{aa})$$

und

$$F'(0) = -\frac{1}{2} (D_{x-1}^{aa} \mu_{x-1}^{aa} \bar{B}_{x-1:y-1}^{aa} - D_{x+1}^{aa} \mu_{x+1}^{aa} \bar{B}_{x+1:y+1}^{aa}).$$

Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x|y}^{aa} &= \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+t}^{aa} \bar{B}_{x+t:y+t}^{aa} - \frac{1}{2} \bar{\mu}_x^{aa} \bar{B}_{xy}^{aa} \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{D_{x-1}^{aa} \bar{\mu}_{x-1}^{aa} \bar{B}_{x-1:y-1}^{aa} - D_{x+1}^{aa} \bar{\mu}_{x+1}^{aa} \bar{B}_{x+1:y+1}^{aa}}{D_x^{aa}},\end{aligned}$$

oder, wenn wir den letzten Bruch mit  $R_{xy}^{aa}$  bezeichnen und  $t$  durch  $n$  ersetzen,

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x|y}^{aa} &= \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{aa} \bar{\mu}_{x+n}^{aa} \bar{B}_{x+n:y+n}^{aa} - \frac{1}{2} \bar{\mu}_x^{aa} \bar{B}_{xy}^{aa} \\ &= \frac{1}{24} R_{xy}^{aa}.\end{aligned}$$

Bilden wir dieselbe Beziehung für alle Werte von  $y$ , addieren, und setzen wieder

$$\bar{B}_x^{aa} = \sum_{y=0}^{\infty} \bar{B}_{xy}^{aa} = \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy} \bar{a}_y^{ww},$$

so erhalten wir

$$\bar{a}_{x|}^{aa} = \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{aa} \bar{\mu}_{x+n}^{aa} \bar{B}_{x+n}^{aa} - \frac{1}{2} \bar{\mu}_x^{aa} \bar{B}_x^{aa} - \frac{1}{24} R_x^{aa}, \quad (6)$$

wo

$$R_x^{aa} = \frac{D_{x-1}^{aa} \bar{\mu}_{x-1}^{aa} \bar{B}_{x-1}^{aa} - D_{x+1}^{aa} \bar{\mu}_{x+1}^{aa} \bar{B}_{x+1}^{aa}}{D_x^{aa}}.$$

Der Berechnung von  $\bar{a}_{x|}^{aa}$  nach der Formel (6) steht praktisch kein Hindernis entgegen. Für die Bestimmung von  $\bar{\mu}_x^{aa}$  ziehe man unsere Arbeit im ersten Hefte dieser Mitteilungen zu Rate.

### 5. Die in Raten zahlbare Überlebensrente.

Von  $\bar{l}_x^{aa}$  Aktiven sterben im Alter  $x+t$  und hinterlassen Witwen des Alters  $y+t \dots \bar{l}_{x+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+t}^{aa} h_{x+t:y+t} dt$ .

Von diesen Witwen erleben das Alter  $y+n$  als Witwen

$$\overline{l_x^{aa}} \overline{\mu_{x+t}^{aa}} h_{x+t:y+t} \frac{\overline{l_{y+t}^{ww}}}{\overline{l_{y+t}^{ww}}} dt.$$

Die Zahl der Frauen, die im Alter  $y$  bis  $y+n$  Witwen werden und das Alter  $y+n$  erleben, wird gefunden, indem man in diesem Produkt  $t$  alle Werte von 0 bis  $n$  beilegt und die erhaltenen Ausdrücke summiert.

Ihre Zahl ist also

$$g(n) = \int_{t=0}^{t=n} \overline{l_x^{aa}} \overline{\mu_{x+t}^{aa}} h_{x+t:y+t} \frac{\overline{l_{y+t}^{ww}}}{\overline{l_{y+t}^{ww}}} dt.$$

Nun ist offenbar

$$\overline{l_x^{aa}} \overline{\alpha_{x|y}^{aa}} = v g(1) + v^2 g(2) + v^3 g(3) + \dots$$

Für die in Raten zahlbare Überlebensrente gilt die Beziehung

$$\overline{l_x^{aa}} \overline{\alpha_{x|y}^{aa}} \stackrel{(m)}{=} \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} g\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} g\left(\frac{2}{m}\right) + \frac{1}{m} v^{\frac{3}{m}} g\left(\frac{3}{m}\right) + \dots$$

Um den Unterschied der Anwartschaften zu bestimmen, stellen wir auf die Eulersche Summenformel ab.

Bezeichnen wir die Reihe

$$F(z) + F(z+1) + F(z+2) + \dots \text{ mit } \Sigma F(z)$$

und

$$\frac{1}{m} \left\{ F(z) + F(z + \frac{1}{m}) + F(z + \frac{2}{m}) + \dots \right\} \text{ mit } \Sigma^m F(z),$$

so ist nach der Eulerschen Summenformel

$$\Sigma^m F(z) - \Sigma F(z) = -\frac{m-1}{2m} F(z) + \frac{m^2-1}{12m^2} F'(z) + \dots$$

In unserm Falle entspricht dem  $F(z)$  der Wert, den die Funktion  $v^n \varphi(n)$  für  $n=0$  annimmt, also Null; dem  $F'(z)$  entspricht der Wert, in welchen die Ableitung von  $v^n \varphi(n)$  nach  $n$  für  $n=0$  übergeht.

Nun ist

$$\frac{dv^n \varphi(n)}{dn} = v^n \varphi(n) \log v + v^n \frac{d\varphi(n)}{dn}.$$

Da aber

$$\varphi(n) = l_{y+n}^{\overline{w}w} \int_{t=0}^{t=n} l_x^{\overline{aa}} \mu_x^{\overline{aa}} h_{x+t:y+t} \frac{1}{l_{y+t}^{\overline{w}w}} dt,$$

so ist

$$\frac{d\varphi(n)}{dn} = \varphi(n) \frac{d l_{y+n}^{\overline{w}w}}{l_{y+n}^{\overline{w}w}} + l_{x+n}^{\overline{aa}} \mu_x^{\overline{aa}} h_{x+n:y+n}.$$

Folglich ist

$$\left[ \frac{d v^n \varphi(n)}{dn} \right]_{n=0} = l_x^{\overline{aa}} \mu_x^{\overline{aa}} h_{xy}.$$

Infolge dessen ist mit grosser Annäherung

$$l_x^{\overline{aa}} \mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{aa}} - l_x^{\overline{aa}} \mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{aa}} = \frac{m^2-1}{12m^2} l_x^{\overline{aa}} \mu_x^{\overline{aa}} h_{xy}$$

und also

$$\mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{aa}} - \mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{aa}} = \frac{m^2-1}{12m^2} \mu_x^{\overline{aa}} h_{xy}. \quad (7)$$

Da diese Beziehung für jedes der verschiedenen Alter der Frauen gilt, hat man

$$\mathfrak{a}_{x|}^{(m)} - \mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}} = \frac{m^2 - 1}{12 m^2} \mu_x^{\overline{aa}} \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy},$$

oder, da

$$\begin{aligned} h_x &= \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy}, \\ \mathfrak{a}_{x|}^{(m)} - \mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}} &= \frac{m^2 - 1}{12 m^2} \mu_x^{\overline{aa}} h_x. \end{aligned} \quad (8)$$

Hieraus folgt für  $m = \infty$

$$\mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}} - \mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}} = \frac{1}{12} \mu_x^{\overline{aa}} h_x \quad (9)$$

und

$$\mathfrak{a}_{x|}^{\overline{aa}} - \mathfrak{a}_{x|}^{aa} = \frac{1}{12 m^2} \mu_x^{\overline{aa}} h_x. \quad (10)$$

Man beachte, dass diese Gleichungen unabhängig von Hypothesen über den Verlauf der in Betracht fallenden Funktionen sind; Voraussetzung ist, dass  $g(t)$  und dessen Ableitungen stetige Funktionen von  $t$  sind, was der Natur der Verhältnisse durchaus entspricht.

Die Gleichungen (8) bis (10) gestatten nun, wenn eine der Anwartschaften berechnet worden ist, die andern Anwartschaften zu bestimmen.

## 6. Die Kapitalversicherung auf den Überlebensfall.

a) Der Barwert der Versicherung 1, fällig, wenn der Aktive ( $x$ ) als Aktiver stirbt und eine Witwe hinterlässt.

Von  $\bar{l}_x^{aa}$  Aktiven sterben im  $(n+1)$ . Versicherungsjahr und hinterlassen Witwen, die gegenüber ihren

Ehemännern den Altersunterschied  $x - y$  aufweisen,

$$\int_{t=0}^{t=1} l_{x+n+t}^{\overline{aa}} \mu_{x+n+t}^{\overline{aa}} h_{x+n+t: y+n+t} dt.$$

Der Barwert der an sie zu leistenden Zahlungen ist, auf die Geburtszeit der Aktiven bezogen,

$$J = \int_{t=0}^{t=1} v^{x+n+t} l_{x+n+t}^{\overline{aa}} \mu_{x+n+t}^{\overline{aa}} h_{x+n+t: y+n+t} dt.$$

Verlaufen  $l_{x+n+t}^{\overline{aa}}$  und  $h_{x+n+t: y+n+t}$  in den Grenzen  $t = 0$  bis  $t = 1$  linear, so ist

$$J = D_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n: y+n} \int_{t=0}^{t=1} v^t (1 - Ht) dt,$$

wo

$$H = \frac{h_{x+n: y+n} - h_{x+n+1: y+n+1}}{h_{x+n: y+n}}.$$

Nun ist nach Abschnitt 4

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=1} v^t (1 - Ht) dt &= \frac{iv}{\delta} \left(1 - \frac{H}{2}\right) = \frac{d}{\delta} \left(1 - \frac{H}{2}\right) \\ &= \frac{d}{2\delta} \frac{h_{x+n: y+n} + h_{x+n+1: y+n+1}}{h_{x+n: y+n}} = \frac{d}{\delta} \frac{h_{x+n+\frac{1}{2}: y+n+\frac{1}{2}}}{h_{x+n: y+n}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$J = \frac{d}{\delta} D_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n+\frac{1}{2}: y+n+\frac{1}{2}}.$$

Demnach ist der Barwert  $\bar{A}_{xy}^{\overline{aa}}$  der Überlebenskapitalversicherung<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> In der Schreibschrift verwenden wir das  $\mathfrak{A}$  der deutschen Kurrentschrift.

$$\bar{A}_{xy}^{\overline{aa}} = \frac{d}{\delta} \frac{1}{D_x^{\overline{aa}}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n+\frac{1}{2}; y+n+\frac{1}{2}}.$$

Bildet man diesen Ausdruck für die verschiedenen  $y$  und addiert, so erhält man, da

$$h_x = \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy},$$

als Barwert der gesuchten Kapitalversicherung

$$\bar{A}_x^{\overline{aa}} = \frac{d}{\delta} \frac{1}{D_x^{\overline{aa}}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{\overline{aa}} q_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n+\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Will man von einer Hypothese über den Verlauf der in Betracht fallenden Funktionen abssehen, so erhält man, da

$$\bar{A}_{xy}^{\overline{aa}} = \frac{1}{D_x^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{\overline{aa}} \mu_{x+t}^{\overline{aa}} h_{x+t; y+t} dt, \quad (11a)$$

nach der Eulerschen Summenformel

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy}^{\overline{aa}} &= \frac{1}{D_x^{\overline{aa}}} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{\overline{aa}} \mu_{x+t}^{\overline{aa}} h_{x+t; y+t} - \frac{1}{2} \mu_x^{\overline{aa}} h_{xy} \\ &- \frac{1}{24} \frac{D_{x-1}^{\overline{aa}} \mu_{x-1}^{\overline{aa}} h_{x-1; y-1} - D_{x+1}^{\overline{aa}} \mu_{x+1}^{\overline{aa}} h_{x+1; y+1}}{D_x^{\overline{aa}}}. \end{aligned}$$

Bildet man dieselbe Beziehung für jeden der verschiedenen Werte von  $y$  und addiert, so ergibt sich, nachdem man  $t$  durch  $n$  ersetzt hat,

$$\begin{aligned} \bar{A}_x^{\overline{aa}} &= \frac{1}{D_x^{\overline{aa}}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{\overline{aa}} \mu_{x+n}^{\overline{aa}} h_{x+n} - \frac{1}{2} \mu_x^{\overline{aa}} h_x \\ &- \frac{1}{24} \frac{D_{x-1}^{\overline{aa}} \mu_{x-1}^{\overline{aa}} h_{x-1} - D_{x+1}^{\overline{aa}} \mu_{x+1}^{\overline{aa}} h_{x+1}}{D_x^{\overline{aa}}}. \quad (12) \end{aligned}$$

b) Der Barwert der Überlebenskapitalversicherung für den Fall, dass die Witwe stirbt oder sich verheiratet.

Für die Witwen mit dem Altersunterschied  $x-y$  ist dieser Barwert

$$\bar{\mathfrak{A}}_{xy}^{aa} = \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} \bar{D}_{x+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+t}^{aa} h_{x+t; y+t} \bar{A}_{y+t}^w dt.$$

Dabei bedeutet  $\bar{A}_{y+t}^w$  den Barwert der Versicherung 1, zahlbar, wenn die Witwe  $(y+t)$  aus dem Witwenstande durch Tod oder Heirat ausscheidet.

Da

$$\bar{A}_{y+t}^w = 1 - \delta \bar{a}_{y+t}^{ww},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{A}}_{xy}^{aa} &= \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} \bar{D}_{x+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+t}^{aa} h_{x+t; y+t} dt \\ &= \frac{\delta}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} \bar{D}_{x+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+t}^{aa} h_{x+t; y+t} \bar{a}_{y+t}^{ww} dt. \end{aligned}$$

Das erste Glied rechts ist  $\bar{\mathfrak{A}}_{xy}^1$ , das zweite ist der Barwert der kontinuierlichen Überlebensrente  $\delta$  auf das Leben der Witwe. Wir bezeichnen ihn nach Abschnitt 4 mit  $\delta \mathfrak{a}_{x|y}^{aa}$  und haben dann

$$\bar{\mathfrak{A}}_{xy}^{aa} = \bar{\mathfrak{A}}_{xy}^1 + \delta \mathfrak{a}_{x|y}^{aa}.$$

Diese Beziehung sagt, was ohne weiteres einleuchtet, dass man der Witwe das Kapital 1 schon beim Ableben des aktiven Ehemannes einhändigen kann, wenn dafür der Zins bis zum Ausscheiden der Witwe aus dem Witwenstand vergütet wird.

Bilden wir dieselbe Beziehung für sämtliche Alter  $y$  und addieren, so erhalten wir für den Barwert der Überlebenskapitalversicherung der Witwe, fällig bei ihrem Ausscheiden,

$$\bar{A}_x^{aa} - \bar{A}_{x(y)}^{aa} = \delta \bar{a}_{x(y)}^{aa}. \quad (13)$$

Wir setzen das  $y$  in Klammern nur bei, um den Index 2 darüber andeuten zu können. Die Beziehung ist für jeden Aktiven des Alters  $x$  gültig, unabhängig davon, ob er ledig oder verheiratet und welches in diesem Falle das Alter der Frau ist.

**7. Die Witwenabfindung im Verhältnis der im Todesabschnitt des aktiven Mannes von diesem durchlebten Zeit.** Von  $\bar{l}_x^{aa}$  Aktiven sterben im Alter  $x + n$  und hinterlassen Witwen des Alters  $y + n$

$$\Phi(n) dn = \bar{l}_{x+n}^{aa} \mu_{x+n}^{aa} h_{x+n: y+n} dn.$$

Entsprechend dieser Feststellung ist die Zahl der Todesfälle des Alters  $x + n + t$  gleich  $\Phi(n+t) dt$ .

Ist  $n$  ein ganzes Vielfaches des Versicherungsabschnittes  $\frac{1}{m}$ , so gibt, wenn  $t < \frac{1}{m}$ ,  $t$  die im Todesabschnitt verlebte Zeit an. Der Barwert der Versicherungsleistung ist für diese Todesfälle

$$tv^{x+n+t} \Phi(n+t) dt.$$

Der Barwert der Versicherungsleistungen für den  $(n+1)$ . Versicherungsabschnitt ist demnach

$$f(x+n) = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} tv^{x+n+t} \Phi(n+t) dt.$$

Um den Wert der Versicherungsleistung für sämtliche Abschnitte zu bestimmen, haben wir für  $n$  der Reihe nach  $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots$  zu setzen und die sämtlichen Integrale zu addieren.

Zu diesem Zwecke führen wir die Funktion

$$F(x+t) = \int_t^\infty v^{x+t} \Phi(t) dt$$

ein, wobei nach Abschnitt 6, Gleichung (11a),

$$F(x) = \int_{t=0}^\infty v^{x+t} \Phi(t) dt = D_x^{\overline{a}} \bar{A}_{xy}^{\overline{a}}.$$

Der Definition von  $F(x+t)$  entsprechend ist

$$\frac{dF(x+t)}{dt} = -v^{x+t} \Phi(t)$$

und folglich

$$\frac{dF(x+n+t)}{dt} = -v^{x+n+t} \Phi(n+t).$$

Infolge dessen können wir setzen

$$f(x+n) = - \int_{t=0}^{\frac{1}{m}} t \frac{dF(x+n+t)}{dt} dt.$$

Durch partielle Integration folgt

$$f(x+n) = -\frac{1}{m} F(x+n+\frac{1}{m}) + \int_{t=0}^{\frac{1}{m}} F(x+n+t) dt.$$

Hier haben wir, wie schon erwähnt, der Reihe nach  $n = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots$  zu setzen und die erhaltenen Ausdrücke zu addieren.

Es ergibt sich

$$f(x) = -\frac{1}{m} F(x + \frac{1}{m}) + \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} F(x + 0 + t) dt,$$

$$f(x + \frac{1}{m}) = -\frac{1}{m} F(x + \frac{2}{m}) + \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} F(x + \frac{1}{m} + t) dt,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Der gesuchte Barwert ist also

$$-\frac{1}{m} \left\{ F(x + \frac{1}{m}) + F(x + \frac{2}{m}) + \dots \right\} + \int_{t=0}^{t=\infty} F(x + t) dt,$$

oder in der Schreibweise des Abschnittes 5

$$-\Sigma^m F(x) + \frac{F(x)}{m} + \int_{t=0}^{t=\infty} F(x + t) dt.$$

Nun ist nach der Eulerschen Summenformel

$$\begin{aligned} \Sigma^m F(x) &= \int_x^\infty F(x) dx + \frac{1}{2} \frac{1}{m} F(x) - \frac{1}{12} \frac{1}{m^2} F'(x) \\ &= \int_{t=0}^{t=\infty} F(x + t) dt + \frac{1}{2} \frac{1}{m} F(x) - \frac{1}{12} \frac{1}{m^2} F'(x). \end{aligned}$$

Folglich ist der gesuchte Barwert

$$\frac{1}{2} \frac{1}{m} F(x) + \frac{1}{12} \frac{1}{m^2} F'(x).$$

Nun ist aber

$$F(x) = D_x^{\overline{aa}} \bar{A}_{xy}^{\overline{aa}}$$

und

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[ \frac{dF(x+t)}{dt} \right]_{t=0} = -v^x \Phi(0) = -v^x l_x^{\bar{a}a} \mu_x^{\bar{a}a} h_{xy} \\ &= -D_x^{\bar{a}a} \mu_x^{\bar{a}a} h_{xy}, \end{aligned}$$

so dass der Barwert geschrieben werden kann

$$\frac{1}{2m} D_x^{\bar{a}a} \bar{A}_{xy}^{\bar{a}a} = \frac{1}{12m^2} D_x^{\bar{a}a} \mu_x^{\bar{a}a} h_{xy}.$$

Auf einen Aktiven und auf das Alter  $x$  bezogen, ergibt sich

$$\frac{1}{2m} \bar{A}_{xy}^{\bar{a}a} = \frac{1}{12m^2} \mu_x^{\bar{a}a} h_{xy}.$$

Bilden wir diesen Ausdruck für sämtliche Frauen der verschiedenen Alter und addieren, so erhalten wir als gesuchten Barwert

$$\frac{1}{2m} \bar{A}_x^{\bar{a}a} = \frac{1}{12m^2} \mu_x^{\bar{a}a} h_x.$$

Diesen Hälftswert werden wir im Abschnitt 9 benützen.

**8.** Wird der überlebenden Witwe beim Ausscheiden durch Ableben oder Heirat noch eine Schlussrente im Verhältnis der im Witwenstand während des Ausscheidungsabschnittes verlebten Zeit gewährt, so kann man den Wert der Schlussrente auf  $\frac{1}{2m} \bar{A}_{x(y)}^{\bar{a}a}$  schätzen.

Zur genauen Bestimmung hat man die folgende Überlegung anzustellen:

Von den  $\overline{l}_{x+t}^{aa}$  Aktiven sterben im Alter  $x+t$ , verheiratet mit Frauen des Alters  $y+t$ ,

$$\overline{l}_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} h_{x+t:y+t} dt.$$

Von den hinterlassenen Witwen erreichen das Alter  $y+n$  als Witwen

$$\overline{l}_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} h_{x+t:y+t} \frac{\overline{l}_{y+n}^{ww}}{\overline{l}_{y+t}^{ww}} dt.$$

Von diesen scheiden im Alter  $y+n$  aus

$$\overline{l}_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} h_{x+t:y+t} \frac{\overline{l}_{y+n}^{ww}}{\overline{l}_{y+t}^{ww}} \mu_{y+n}^w dt dn,$$

wo  $\mu_y^w$  die Ausscheidungsintensität der Witwen des Alters  $y$  bedeutet.

Die Zahl aller Ausscheidungsfälle im Alter  $y+n$  ist also

$$\Psi(n) dn = \int_{t=0}^{t=n} \overline{l}_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} h_{x+t:y+t} \frac{\overline{l}_{y+n}^{ww}}{\overline{l}_{y+t}^{ww}} \mu_{y+t}^w dt dn.$$

Entsprechend ist die Zahl der Ausscheidungsfälle im Alter  $x+n+t$

$$\Psi(n+t) dt.$$

Ist  $n$  ein ganzes Vielfaches der Zeitdauer  $\frac{1}{m}$  eines Versicherungsabschnittes, so ist der Barwert  $f(x+n)$  der Versicherungsleistungen im  $(n+1)$ . Versicherungsabschnitt

$$f(x+n) = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} tv^{x+n+t} \Psi(x+t) dt.$$

In diesem Ausdrucke ist der Reihe nach  $n = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots$  zu setzen; die erhaltenen Ausdrücke sind zu addieren.

Zu diesem Behufe führen wir die Funktion ein

$$F(x+t) = \int_t^\infty v^{x+t} \varphi(t) dt,$$

deren Bedeutung durch die Beziehung

$$F(x) = D_x^{\overline{aa}} \bar{A}_{xy}^{\overline{aa}}$$

erklärt wird.

Der Definition von  $F(x+t)$  entsprechend, ist

$$\frac{dF(x+t)}{dt} = -v^{x+t} \varphi(t).$$

Also ist auch

$$\frac{dF(x+n+t)}{dt} = -v^{x+n+t} \varphi(n+t).$$

Demgemäß können wir schreiben

$$f(x+n) = - \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} t \frac{dF(x+n+t)}{dt} dt.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$f(x+n) = -\frac{1}{m} F(x+n+\frac{1}{m}) + \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} F(x+n+t) dt.$$

Setzen wir nun rechts der Reihe nach  $n = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots$  und addieren, so erhalten wir als gesuchten Barwert

$$-\frac{1}{m} \left\{ F(x + \frac{1}{m}) + F(x + \frac{2}{m}) + \dots \right\} + \int_{t=0}^{t=\infty} F(x+t) dt.$$

Analog der Entwicklung des Abschnittes 7 ergibt sich für den gesuchten Barwert

$$\frac{1}{2m} F(x) + \frac{1}{12m^2} F'(x).$$

Nun ist aber

$$F(x) = D_x^{\overline{aa}} \bar{\mathfrak{A}}_{xy}^{\overline{aa}}$$

und

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \left[ \frac{dF(x+t)}{dt} \right]_{t=0} = 0,$$

da

$$\varPhi(0) = 0.$$

Folglich ist der gesuchte Barwert

$$\frac{1}{2m} D_x^{\overline{aa}} \bar{\mathfrak{A}}_{xy}^{\overline{aa}}.$$

Auf einen Aktiven und das Alter  $x$  bezogen, ergibt sich als Barwert

$$\frac{1}{2m} \bar{\mathfrak{A}}_{xy}^{\overline{aa}}.$$

Bilden wir diesen Ausdruck für sämtliche Frauen der verschiedenen Alter und addieren, so finden wir für den gesuchten Barwert

$$\frac{1}{2m} \bar{\mathfrak{A}}_{x(y)}^{\overline{aa}},$$

wo der Index  $(y)$  nur ausgesetzt wird, um das Zeichen 2 für das Überleben anbringen zu können.

9. Die Rente, deren Barwert wir zu  $\mathfrak{a}_{x|}^{aa}$  bestimmt haben, wird in Raten von  $\frac{1}{m}$  der Werteinheit, erstmals zu Beginn des auf den Tod des Aktiven folgenden Zeitabschnittes, gewährt. Soll die erste Rate von  $\frac{1}{m}$  um den Betrag verkürzt werden, welche der vom Ehepaar im Todesabschnitt des Mannes verlebten Zeit entspricht, so kommt ein Betrag in Wegfall, den wir im Abschnitt 7 auf

$$\frac{1}{2m} \bar{\mathfrak{A}}_x^{aa} - \frac{1}{12m^2} \mu_x^{aa} h_x$$

bewertet haben.

Soll anderseits beim Ausscheiden der Witwe ( $y$ ) noch eine Schlussrente im Verhältnis der im Ausscheidungsabschnitt als Witwe verlebten Zeit ausgerichtet werden, so haben wir nach Abschnitt 8 noch zu addieren  $\frac{1}{2m} \bar{\mathfrak{A}}_{x(y)}^{aa}$ . Wir gelangen dann zu einer Rente, deren Barwert wir mit  $\check{\mathfrak{a}}_{x|}^{aa}$  bezeichnen wollen.

Es ist also

$$\check{\mathfrak{a}}_{x|}^{aa} = \mathfrak{a}_{x|}^{aa} - \frac{1}{2m} \bar{\mathfrak{A}}_x^{aa} + \frac{1}{12m^2} \mu_x^{aa} h_x + \frac{1}{2m} \bar{\mathfrak{A}}_{x(y)}^{aa}.$$

Nun ist nach Gleichung (13)

$$\bar{\mathfrak{A}}_x^{aa} - \bar{\mathfrak{A}}_{x(y)}^{aa} = \delta \mathfrak{a}_{x|}^{aa}.$$

Ferner ist nach Gleichung (10)

$$\mathfrak{a}_{x|}^{aa} = \mathfrak{a}_{x|}^{aa} + \frac{1}{12m^2} \mu_x^{aa} h_x.$$

Folglich besteht die einfache Beziehung

$$\begin{aligned}\ddot{\mathfrak{a}}_{x|}^{(m)} &= \overline{\mathfrak{a}_{x|}^{aa}} - \frac{\delta}{2m} \overline{\mathfrak{a}_{x|}^{aa}}, \\ \ddot{\mathfrak{a}}_{x|}^{(m)} &= \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \overline{\mathfrak{a}_{x|}^{aa}}. \quad (14)\end{aligned}$$

Die Witwenrente, deren Barwert durch (14) dargestellt wird, läuft vom Tode des Aktiven bis zum Ausscheiden der Witwe. Die Rentenraten werden nachschüssig zu Beginn der Versicherungsabschnitte, die letzte beim Ausscheiden der Witwe ausgerichtet, je im Verhältnis der während des Versicherungsabschnittes im Witwenstande durchlebten Zeit.

**10.** *Die Witwenrente, bei welcher die Rentenzahlung sich nicht nach den Versicherungsabschnitten, sondern nach der Zeit des Todes des Aktiven ( $x$ ) richtet. Die vom Tode des Aktiven an laufende nachschüssige Rente mit Schlussrente.*

Der Barwert dieser Rente für die Frauen, die gegenüber dem Manne ( $x$ ) die Altersdifferenz  $x-y$  aufweisen, wird gegeben durch

$$\hat{\ddot{\mathfrak{a}}}_{x|y}^{(m)} = \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{aa} \mu_{x+t}^{aa} h_{x+t:y+t} \hat{a}_{y+t}^{(m)} dt.$$

Nun ist aber

$$\hat{a}_y^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \overline{\mathfrak{a}_y^{ww}} + \frac{\delta}{12m^2} \text{<sup>1)</sup>},$$

---

<sup>1)</sup> Vergl. Heft 1, Seite 67, der zitierten Mitteilungen.

Führen wir diesen Wert in das Integral ein, so zerfällt es in 2 Integrale. Der Wert des ersten ist

$$\left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{x|y}^{aa},$$

der des zweiten nach Abschnitt 6 gleich

$$\frac{\delta}{12m^2} \bar{A}_{xy}^{aa}.$$

Folglich ist

$$\hat{\bar{a}}_{x|y}^{aa} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{x|y}^{aa} + \frac{\delta}{12m^2} \bar{A}_{xy}^{aa}.$$

Hieraus folgt, wenn die Frauen jedes Alters in Rechnung gebracht werden,

$$\hat{\bar{a}}_{x|}^{aa} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{x|}^{aa} + \frac{\delta}{12m^2} \bar{A}_x^{aa}, \quad (15)$$

oder sehr angenähert

$$\hat{\bar{a}}_{x|}^{aa} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{x|}^{aa}. \quad (16)$$

Man vergleiche hierzu Beziehung (14).

Soll die Witwenrente, die mit dem Tode des Aktiven zu laufen beginnt, vorschüssig sein, so erhöht sich der Barwert der Anwartschaft noch um

$$\frac{1}{m} \bar{A}_x^{aa}.$$

## II. Die Aktiven-Invalidenwitwenrente.

**11.** *Die Anwartschaft auf Witwenrente, zu beziehen, nachdem der Aktive ( $x$ ) als Invalider gestorben, erstmals zu Anfang des auf das Todesjahr folgenden Jahres.*

Anrecht auf Witwenrente soll hier, wie im folgenden, nur für die Frauen bestehen, deren Ehe während der Dauer der Aktivität des Mannes geschlossen worden ist. Frauen, die invalide Männer heiraten, fallen ausser Betracht.

Die direkte Berechnung dieser Anwartschaft ist für den Fall, dass man auf die Verschiedenheit der Sterblichkeit der verheirateten Frauen und der Witwen Rücksicht zu nehmen hat, nicht einfach und kann um so eher unterlassen werden, als man auf anderem Wege, mittelst der kontinuierlichen Rente, leichter zum Ziele kommt, wie im folgenden gezeigt werden soll.

**12.** *Die Anwartschaft auf kontinuierliche Invalidenwitwenrente.*

Entsprechend der Entwicklung des Abschnittes 4 finden wir unter der Voraussetzung des linearen Verlaufes von  $h_{xy} a_{x|y}^i$  in jedem Altersjahr

$$\bar{a}_{x|}^{ai} = \frac{d}{2\delta} \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{aa} i_{x+n} (\bar{B}_{x+n}^{ai} + \bar{B}_{x+n+1}^{ai}), \quad (17)$$

wo

$$\bar{B}_x^{ai} = \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy} \bar{a}_{x|y}^i. \quad (18)$$

Hierin bedeutet  $\bar{a}_{x|y}^i$  den Wert der kontinuierlichen Witwenrente 1, zahlbar an ( $y$ ) nach dem Ableben des Invaliden ( $x$ ).  $i_x$  ist die Invaliditätswahrscheinlichkeit.

Dabei hat es die Meinung, dass die Witwenrente mit dem Tod der Witwe oder ihrer Wiederverheiratung aufhören soll. Zur Bestimmung von  $\bar{a}_{x|y}^i$  ist also die Tafel der (verheirateten) Invaliden  $\bar{l}_x^i$  mit einer Ausscheideordnung der Witwen zu verbinden<sup>1)</sup>.

---

Will man von einer Annahme über den Verlauf von  $a_{x|y}^i$  abssehen, so erhält man mit der Eulerschen Summenformel die Beziehung

$$\bar{a}_{x|}^i = \frac{1}{D_x^{\bar{aa}}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{\bar{aa}} r_{x+n} \bar{B}_{x+n}^{\bar{ai}} - \frac{1}{2} r_x \bar{B}_x^{\bar{ai}} - \frac{1}{24} R_x^{\bar{ai}}, \quad (19)$$

wobei

$$R_x^{\bar{ai}} = \frac{D_{x-1}^{\bar{aa}} r_{x-1} \bar{B}_{x-1}^{\bar{ai}} - D_{x+1}^{\bar{aa}} r_{x+1} \bar{B}_{x+1}^{\bar{ai}}}{D_x^{\bar{aa}}}. \quad (20)$$

Hierin bedeutet  $r_x$  die Invaliditätsintensität.

### 13. Die Anwartschaft auf in Raten zahlbare Aktiven - Invalidenwitwenrente.

Von  $\bar{l}_x^{\bar{aa}}$  Aktiven werden im Alter  $x+t$  invalid und sind dann mit Frauen des Alters  $y+t$  verheiratet

$$\bar{l}_{x+t}^{\bar{aa}} r_{x+t} h_{x+t:y+t} d\iota^2).$$

---

<sup>1)</sup> Riethmann, Zur mathematischen Theorie der Versicherung verbundener Leben, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 3, Abschnitt 18.

<sup>2)</sup>  $h_{xy}$  bezieht sich streng genommen hier, wie im ganzen 2. Teil, auf den Invaliden. Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktive, der im Alter  $x$  invalid geworden, mit einer Frau des Alters  $y$  verheiratet ist.

Von diesen Ehepaaren bestehen im Alter  $x+t : y+t$  noch

$$\bar{l}_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+t}^i l_{y+t}^v}{l_{x+t}^i l_{y+t}^v} d\tau^1).$$

Die Werte  $l_y^v$  sind einer Sterbetafel für verheiratete Frauen, die  $l_x^i$  einer Tafel für (verheiratete) Invaliden zu entnehmen.

Von den Ehepaaren lösen sich durch Tod der invaliden Männer im Alter  $x+t$  auf

$$\bar{l}_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+t}^i l_{y+t}^v}{l_{x+t}^i l_{y+t}^v} \mu_{x+t}^i dt dt.$$

Von ihren hinterlassenen Witwen erreichen das Alter  $y+n$  als Witwen

$$\bar{l}_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+t}^i l_{y+t}^v}{l_{x+t}^i l_{y+t}^v} \frac{\bar{l}_{y+n}^{ww}}{\bar{l}_{y+t}^{ww}} \mu_{x+t}^i dt dt.$$

Integriert man von  $t=0$  bis  $t=t$ , so erhält man die sämtlichen Frauen, die im Alter  $y+t$  Witwen geworden. Ihre Zahl ist

$$\int_{t=0}^{t=\infty} \bar{l}_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+t}^i l_{y+t}^v}{l_{x+t}^i l_{y+t}^v} \frac{\bar{l}_{y+n}^{ww}}{\bar{l}_{y+t}^{ww}} \mu_{x+t}^i dt dt.$$

Um die Gesamtzahl  $g(n)$  aller das Alter  $y+n$  erreichenen Witwen zu erhalten, hat man sodann die Integration von  $t=0$  bis  $n$  durchzuführen.

---

<sup>1)</sup> Riethmann, a. a. O., Abschnitt 7.

Es ist also

$$g(n) = \int_{t=0}^{t=n} dt \int_{\tau=0}^{\tau=t} l_{x+\tau}^{\bar{a}a} r_{x+\tau} h_{x+\tau:y+\tau} \frac{l_x^i + t l_y^v}{l_x^i + t l_y^v} \frac{l_{y+n}^{\bar{w}w}}{l_{y+t}^{\bar{w}w}} \mu_{x+t}^i d\tau.$$

Wir wählen im Abschnitt II, ohne die Gefahr einer Verwechslung befürchten zu müssen, dem Abschnitt I analoge Funktionszeichen, hier also das Zeichen  $g$ , obgleich es sich um eine andere Funktion als im Abschnitt I handelt.

Bezeichnen wir nun die Anwartschaft auf kontinuierliche Invalidenwitwenrente für einen Aktiven ( $x$ ) in Ansehung einer künftigen Witwe mit dem Altersunterschied  $x - y$  durch  $\bar{a}_{x|y}^{\bar{a}i}$ , so ist

$$\text{und } l_x^{\bar{a}a} \bar{a}_{x|y}^{\bar{a}i} = vg(1) + v^2 g(2) + v^3 g(3) + \dots$$

$$l_x^{\bar{a}a} \bar{a}_{x|y}^{\bar{a}i} \stackrel{(m)}{=} \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} g\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} g\left(\frac{2}{m}\right) + \frac{1}{m} v^{\frac{3}{m}} g\left(\frac{3}{m}\right) + \dots$$

Entsprechend der Entwicklung des Abschnittes 5 erhalten wir nun für unsern Fall

$$\frac{dv^n g(n)}{dn} = v^n g(n) \log v + v^n \frac{dg(n)}{dn}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{dg(n)}{dn} &= \frac{dl_{y+n}^{\bar{w}w}}{l_{y+n}^{\bar{w}w}} g(n) \\ &+ \int_{\tau=0}^{t=n} l_{x+\tau}^{\bar{a}a} r_{x+\tau} h_{x+\tau:y+\tau} \frac{l_x^i + t l_y^v}{l_x^i + t l_y^v} \frac{l_{y+n}^{\bar{w}w}}{l_{y+t}^{\bar{w}w}} \mu_{x+t}^i d\tau. \end{aligned}$$

Für  $n = 0$  nimmt diese Ableitung den Wert 0 an, folglich ist auch

$$\left[ \frac{dv^n g(n)}{dn} \right]_{n=0} = 0.$$

Es ist daher

$$\overline{l_x^{aa}} \mathfrak{a}_{x|y}^{(m)} - \overline{l_x^{aa}} \mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{ai}} = 0.$$

Also

$$\mathfrak{a}_{x|y}^{(m)} - \mathfrak{a}_{x|y}^{\overline{ai}} = 0.$$

Folglich ist allgemein

$$\mathfrak{a}_{x|}^{(m)} - \mathfrak{a}_{x|}^{\overline{ai}} = 0 \quad (21)$$

und

$$\mathfrak{a}_{x|}^{\overline{ai}} - \mathfrak{a}_{x|}^{(m)} = 0, \quad (22)$$

daher auch

$$\mathfrak{a}_{x|}^{(m)} - \mathfrak{a}_{x|}^{\overline{ai}} = 0. \quad (23)$$

#### 14. Die Kapitalversicherung auf den Überlebensfall.

a) Der Wert  $\overline{A_x^{ai}}$  der Kapitalversicherung 1, fällig, wenn der Aktive ( $x$ ), nachdem er invalid geworden, bei Lebzeiten der Frau stirbt.

Die Praxis bedarf dieses Wertes selten; wir benötigen seiner für die folgenden theoretischen Entwicklungen.

Von  $\overline{l_x^{aa}}$  Aktiven werden im Alter  $x+t$  invalid

$$\overline{l_{x+t}^{aa}} r_{x+t} dt$$

Personen.

Von diesen sind verheiratet mit Frauen des Alters  $y+t$

$$\overline{l_{x+t}^{aa}} r_{x+t} h_{x+t:y+t} dt.$$

Der Wert der Überlebenskapitalversicherung für jede dieser Frauen ist  $\overline{A}_{x+t:y+t}^{(1)}$ .

Zu dessen Ermittlung ist die Sterbetafel der verheirateten Frauen mit der Sterbetafel der Invaliden zu verbinden.

Die Berechnung dieses Wertes dürfen wir als bekannt voraussetzen<sup>1)</sup>.

Der Wert der Belastung ist also für die Geburtszeit der Aktiven ( $x$ )

$$\int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{\bar{a}a} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \bar{A}_{x+t:y+t}^i dt.$$

Auf einen Aktiven und das Alter ( $x$ ) bezogen, erhalten wir

$$\bar{A}_{xy}^i = \frac{1}{D_x^{\bar{a}a}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{\bar{a}a} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \bar{A}_{x+t:y+t}^i dt.$$

Setzen wir

$$\bar{B}_{xy}^i := h_{xy} \bar{A}_{xy}^i,$$

so können wir schreiben

$$\bar{A}_{xy}^i = \frac{1}{D_x^{\bar{a}a}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{\bar{a}a} r_{x+t} \bar{B}_{x+t:y+t}^i dt.$$

Die Eulersche Summenformel gibt die Beziehung

$$\bar{A}_{xy}^i = \frac{1}{D_x^{\bar{a}a}} \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{\bar{a}a} r_{x+t} \bar{B}_{x+t:y+t}^i - \frac{1}{2} r_x \bar{B}_{xy}^i - \frac{1}{24} R_{xy}^i,$$

wo

$$R_{xy}^i = \frac{D_{x-1}^{\bar{a}a} r_{x-1} \bar{B}_{x-1:y-1}^i - D_{x+1}^{\bar{a}a} r_{x+1} \bar{B}_{x+1:y+1}^i}{D_x^{\bar{a}a}}.$$

<sup>1)</sup> Riethmann, a. a. O., Abschnitt 17.

Bilden wir für alle  $y$  dieselben Beziehungen, addieren, setzen  $n$  an Stelle von  $t$  und führen die Beziehung ein

$$\bar{B}_x^{ai} = \sum_{y=0}^{\infty} h_{xy} \bar{\Lambda}_{xy}^i,$$

so kommt

$$\bar{\Lambda}_x^{ai} = \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{n=0}^{\infty} D_{x+n}^{aa} r_{x+n} \bar{B}_{x+n}^{ai} - \frac{1}{2} r_x \bar{B}_x^{ai} - \frac{1}{24} R_x^{ai}, \quad (24)$$

wobei

$$R_x^{ai} = \frac{D_{x-1}^{aa} r_{x-1} \bar{B}_{x-1}^{ai} - D_{x+1}^{aa} r_{x+1} \bar{B}_{x+1}^{ai}}{D_x^{aa}}. \quad (25)$$

Für die späteren Erörterungen wird es förderlich sein, wenn wir dem Wert von  $\bar{\Lambda}_{xy}^{ai}$  noch eine andere Form geben.

Die Zahl der Ehepaare mit Frauen des Alters  $y+t$  und invaliden Männern des Alters  $x+t$ , welche Männer im Alter  $x+\tau$  invalid geworden, ist nach Abschnitt 13

$$l_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+t}^i l_{y+t}^v}{l_{x+t}^i l_{y+t}^v} d\tau.$$

Von den Ehemännern sterben im Alter  $x+t$

$$l_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+t}^i l_{y+t}^v}{l_{x+t}^i l_{y+t}^v} \mu_{x+t}^i d\tau dt.$$

Die Zahl aller Todesfälle von invaliden Ehemännern im Alter  $x+t$  wird gefunden durch Integration von  $\tau = 0$  bis  $\tau = t$ .

Sie ist

$$\Phi(t) dt = \int_{t=0}^{t=\infty} l_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+t}^i l_{y+t}^v}{l_{x+t}^i l_{y+t}^v} \mu_{x+t}^i dt dt.$$

Der Barwert der Versicherungsleistung an die überlebenden Frauen ist, auf die Geburtszeit der Aktiven bezogen,

$$v^{x+t} \Phi(t) dt.$$

Folglich ist

$$\bar{A}_{xy}^{ai} = \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} v^{x+t} \Phi(t) dt. \quad (26)$$

b) Der Wert  $\bar{A}_{x(y)}^{ai}$  der Kapitalversicherung 1 auf einen Aktiven ( $x$ ), zahlbar, wenn die Witwe des invalid gewordenen Aktiven stirbt oder sich verheiratet.

Es ist

$$\bar{A}_{xy}^{ai} = \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \bar{A}_{x+t:y+t}^i dt.$$

Hierin soll  $\bar{A}_{xy}^i$  den Wert der Überlebenskapitalversicherung 1 auf das Ehepaar ( $x, y$ ), zahlbar, wenn die den Invaliden ( $x$ ) überlebende Witwe stirbt oder sich verheiratet, bedeuten.

Anderseits ist

$$\bar{A}_{xy}^{ai} = \frac{1}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \bar{A}_{x+t:y+t}^i dt.$$

Nun ist aber

$$\bar{A}_{xy}^i - \bar{A}_{xy}^{i-2} = \delta \bar{a}_{x|y}^i.$$

Die Richtigkeit dieser Beziehung ergibt sich aus der Erwägung, dass man der Ehefrau ( $y$ ), welche den Versicherungsanspruch  $\bar{A}_{xy}^i$  hat, das Kapital 1 beim Ableben des Mannes ausrichten kann, wenn dafür der Zins bis zu ihrem Ausseheden aus dem Witwenstand rückvergütet wird. Der Wert des Zinsanspruches ist  $\delta \bar{a}_{x|y}^i$ . Daraus erhellt die Richtigkeit der aufgestellten Gleichung.

Folglich ist

$$\bar{A}_{xy}^i - \bar{A}_{xy}^i = \frac{\delta}{D_x^{aa}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} a_{x+t|y+t}^i dt,$$

oder

$$\bar{A}_{xy}^i - \bar{A}_{xy}^i = \delta \bar{a}_{x|y}^i.$$

Bildet man diese Beziehung für alle  $y$  und addiert, so kommt

$$\bar{A}_x^i - \bar{A}_{x(y)}^i = \delta \bar{a}_{x|}^i. \quad (27)$$

**15.** Entsprechend der Entwicklung des Abschnittes 7 wollen wir den Wert der Versicherungsleistung bestimmen, welche darin besteht, dass man den von den Invaliden hinterlassenen Witwen eine Kapitalabfindung gewährt, proportional der im Zeitabschnitt, da der Invalid stirbt, mit dem Ehemann verlebten Zeit.

Die Zahl der Ehepaare  $(x+n:y+n)$  mit Männern, die im Alter  $x+t$  invalid geworden, ist nach Abschnitt 14

$$l_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_{x+n}^i}{l_{x+t}^i} \frac{l_{y+n}^v}{l_{y+t}^v} dt.$$

Von den invaliden Ehemännern sterben im Alter  $x+n$

$$\bar{l}_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_x^i}{l_{x+t}^i} \frac{l_y^v}{l_{y+t}^v} \mu_{x+n}^i dt dn.$$

Die Zahl aller Sterbefälle invalider Männer im Alter  $x+n$  ist, gemäss Abschnitt 14,

$$\Phi(n) dn = \int_{t=0}^{t=n} \bar{l}_{x+t}^{aa} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \frac{l_x^i}{l_{x+t}^i} \frac{l_y^v}{l_{y+t}^v} \mu_{x+n}^i dt dn.$$

Entsprechend ist die Zahl aller Todesfälle im Alter  $x+n+t$

$$d(n+t) dt.$$

Ist wiederum  $n$  ein ganzes Vielfaches der Dauer  $\frac{1}{m}$  eines Versicherungsabschnittes, so ist der Barwert  $f(x+n)$  der Versicherungsleistungen im  $(n+1)$ . Abschnitt

$$f(x+n) = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} tv^{x+n+t} \Phi(n+t) dt.$$

Nun geht die Entwicklung weiter wie im Abschnitt 7.

Insbesondere ist in unserem Fall

$$F(x+t) = \int_t^\infty v^{x+t} \Phi(t) dt,$$

wobei nach Abschnitt 14, Gleichung (26),

$$F(x) = D_x^{aa} \bar{R}_{xy}^{ai}$$

Ferner ist

$$\frac{dF(x+t)}{dt} = -v^{x+t} \Phi(t),$$

$$\left[ \frac{dF(x+t)}{dt} \right]_{t=0} = \frac{dF(x)}{dx} = 0,$$

da

$$\Phi(0) = 0.$$

Folglich ist der Barwert der Versicherungsleistung

$$\frac{1}{2m} \bar{A}_{xy}^{ai},$$

und für einen Aktiven, unabhängig vom Alter der Frau,

$$\frac{1}{2m} \bar{A}_x^{ai}.$$

**16. Berechnung des Wertes der Schlussrente an die den Invaliden überlebende Witwe.**

Die Gesamtzahl der den  $\bar{l}_x^{aa}$  Aktiven entsprechenden Ausscheidungsfälle von Invalidenwitwen des Alters  $y+n$  ist nach Abschnitt 13

$$\Psi(n) dn = g(n) \mu_{y+n}^{ww} dn.$$

Entsprechend Abschnitt 8 wird hier

$$f(x+n) = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} tv^{x+n+t} \Psi(n+t) dt,$$

$$F(x+t) = \int_t^{\infty} v^{x+t} \Psi(t) dt,$$

$$F(x) = D_x^{aa} \bar{A}_{xy}^{ai},$$

$$F'(x) = \left[ \frac{dF(x+t)}{dt} \right]_{t=0} = 0,$$

da

$$\Psi(0) = 0.$$

Somit ist der Barwert der Schlussrente

$$\frac{1}{2m} \bar{A}_{xy}^{\bar{a}i}$$

oder, unter Berücksichtigung der verschiedenen  $y$ ,

$$\frac{1}{2m} \bar{A}_{x(y)}^{\bar{a}i}$$

**17.** Entsprechend den Entwicklungen des Abschnittes 9 erhalten wir nun die folgenden Beziehungen:

$$\check{\bar{a}}_{x|}^{(m)} = \bar{a}_{x|}^{\bar{a}i} - \frac{1}{2m} \bar{A}_{x|}^{\bar{a}i} + \frac{1}{2m} \bar{A}_{x(y)}^{\bar{a}i}$$

oder wegen Gleichung (27)

$$\check{\bar{a}}_{x|}^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{x|}^{\bar{a}i} \quad (28)$$

**18.** Die vom Tode des Invaliden an laufende nachschüssige Rente mit Schlussrente.

Der Barwert dieser Rente für die Frauen mit der Altersdifferenz  $x - y$  ist

$$\hat{\bar{a}}_{x|y}^{(m)} = \frac{1}{D_{x|y}^{\bar{a}i}} \int_{t=0}^{t=\infty} D_{x+t}^{\bar{a}i} r_{x+t} h_{x+t:y+t} \hat{a}_{x+t|y+t}^{(m)} dt$$

Nun ist aber

$$\hat{a}_{x|y}^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) a_{x|y}^i + \frac{\delta}{12m^2} \bar{A}_{xy}^i$$

Zufolge dessen wird

$$\hat{\bar{a}}_{x|y}^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{xy}^{\bar{a}i} + \frac{\delta}{12m^2} \bar{A}_{xy}^{\bar{a}i}$$

Berücksichtigt man die Frauen jedes Alters, so erhält man

$$\hat{\mathfrak{a}}_{x|}^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \mathfrak{a}_{x|}^{\bar{ai}} + \frac{\delta}{12m^2} \bar{\mathfrak{A}}_x^{\bar{ai}}, \quad (29)$$

oder sehr angenähert

$$\hat{\mathfrak{a}}_{x|}^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \mathfrak{a}_{x|}^{\bar{ai}}. \quad (30)$$

Soll die Witwenrente, die mit dem Tode des Invaliden zu laufen beginnt, vorschüssig sein, so erhöht sich der Barwert der Witwenrente noch um

$$\frac{1}{m} \bar{\mathfrak{A}}_x^{\bar{ai}}.$$

---

### III. Die Anwartschaft auf Witwenrente überhaupt.

---

**19.** Durch die Verbindung der Anwartschaften auf Aktivenwitwenrente und Invalidenwitwenrente erhalten wir den Wert der Anwartschaften auf Witwenrente überhaupt.

Wir heben insbesondere die folgenden Beziehungen hervor.

Aus Gleichung (9) und (22) folgt, wenn wir

$$\mathfrak{a}_{x|}^{\bar{aa}} + \mathfrak{a}_{x|}^{\bar{ai}} = \mathfrak{a}_x^a$$

setzen,

$$\mathfrak{a}_{x|}^a - \mathfrak{a}_{x|}^{\bar{a}} = \frac{1}{12} \mu_x^{\bar{aa}} h_x. \quad (31)$$

Aus (10) und (23) ergibt sich

$$\mathfrak{a}_{x|}^a - \mathfrak{a}_{x|}^{(m)} = \frac{1}{12 m^2} \mu_x^{aa} h_x. \quad (32)$$

Aus (13) und (27) kommt

$$\bar{\mathfrak{A}}_x^a - \bar{\mathfrak{A}}_{x(y)}^a = \delta \mathfrak{a}_{x|}^a. \quad (33)$$

Ferner aus (14) und (28)

$$\check{\mathfrak{a}}_{x|}^a = \left(1 - \frac{\delta}{2 m}\right) \bar{\mathfrak{a}}_x^a, \quad (34)$$

und aus (15) und (29)

$$\hat{\mathfrak{a}}_{x|}^{(m)} = \left(1 - \frac{\delta}{2 m}\right) \mathfrak{a}_{x|}^a + \frac{\delta}{12 m^2} \bar{\mathfrak{A}}_x^a. \quad (35)$$

**20.** In der Praxis kommen häufig Versicherungswerte vor, die sich nach der Besoldung der Aktiven beim Ableben oder bei der Invalidierung richten. Die Besoldung des Alters  $x$  sei  $s_x$ , die zu gewährende jährliche Rente  $\alpha_x s_x$ .  $\alpha_x s_x$  ändere sich stetig mit  $x$ . Alsdann lassen sich für die Barwerte dieser Versicherungen Beziehungen angeben, die ganz denen dieser Arbeit entsprechen. Sie werden erhalten, indem man einfach an Stelle von  $h_{xy}$  den Wert  $\alpha_x s_x h_{xy}$ , an Stelle von  $h_x$  den Wert  $\alpha_x s_x h_x$  treten lässt.

### 21. Schlussbemerkungen.

Es liegt nahe, die angestellten Untersuchungen weiter zu führen und insbesondere auch die aufgeschobenen und abgekürzten Renten, wie sie bei Waisenrenten üblich sind, näher zu untersuchen. Wir verzichten hier darauf, da der Umfang dieser Arbeit

ohnehin schon zu gross geworden ist, behalten uns aber vor, gelegentlich darauf zurückzukommen, sofern nicht inzwischen von anderer Seite das Fehlende ergänzt wird.

Nur zwei Bemerkungen mögen noch angebracht werden.

a) In der Praxis kommt es nicht selten vor, dass eine Pensionskasse für die Folgen der Dienstunfälle, mögen sie den Tod oder die Invalidität herbeiführen, nicht aufzukommen hat, dass also nur die übrigen Todes- und Invaliditätsfälle zu ihren Lasten fallen. So liegen die Verhältnisse zum Beispiel bei der Pensionskasse der schweizerischen Bundesbahnen.

Für diesen Fall bleiben unsere sämtlichen Entwicklungen sowohl für die Witwenrenten, welche zufolge eines Dienstunfalles auszurichten sind, als auch für die Witwenrenten zufolge der andern Ursachen (Unfall ausser Dienst und Krankheit) gültig. Nur treten an Stelle von  $\bar{q}_x^{aa}$  und  $\bar{i}_x$  im einen Fall  $\bar{q}_x'^{aa}$  und  $\bar{i}_x'$ , die Wahrscheinlichkeiten als Aktiver zu sterben und invalid zu werden zufolge Krankheit oder zufolge Unfalls ausser Dienst, im andern Fall  $\bar{q}_x''^{aa}$  und  $\bar{i}_x''$ , die Wahrscheinlichkeiten, als Aktiver zu sterben und invalid zu werden zufolge eines Dienstunfalls.

Zur Bestimmung der Sterbens- und Invaliditätsintensitäten führt in diesem Falle die folgende Überlegung.

Definitionsgemäss ist

$$\bar{l}_x^{aa} \bar{q}_x'^{aa} = \int_{t=0}^{t=1} \bar{l}_{x+t}^{aa} \bar{\mu}_{x+t}^{aa} dt,$$

also

$$\bar{l}_{x-1}^{aa} \bar{q}_{x-1}^{aa} + \bar{l}_x^{aa} \bar{q}_x'^{aa} = \int_{t=0}^{t=2} \bar{l}_{x-1+t}^{aa} \bar{\mu}_{x-1+t}^{aa} dt.$$

Bezeichnet man mit  $\bar{l}_{x-1+\vartheta}^{aa} \bar{\mu}_{x-1+\vartheta}^{aa}$ , wo

$$0 \leq \vartheta \leq 2,$$

einen Mittelwert der Funktion  $\bar{l}_{x-1+t}^{aa} \bar{\mu}_{x-1+t}^{aa}$ , der die Eigenschaft hat, dass

$$\bar{l}_{x-1}^{aa} \bar{q}_{x-1}^{aa} + \bar{l}_x^{aa} \bar{q}_x^{aa} = \bar{l}_{x-1+\vartheta}^{aa} \bar{\mu}_{x-1+\vartheta}^{aa} \int_{t=0}^{t=2} dt,$$

oder

$$\bar{l}_{x-1}^{aa} \bar{q}_{x-1}^{aa} + \bar{l}_x^{aa} \bar{q}_x^{aa} = 2 \bar{l}_{x-1+\vartheta}^{aa} \bar{\mu}_{x-1+\vartheta}^{aa},$$

so dient diese Beziehung zur Ermittlung von  $\bar{\mu}_{x-1+\vartheta}^{aa}$ .

Nun ist mit grosser Annäherung  $\vartheta = 1$ , somit

$$\bar{\mu}_x^{aa} = \frac{\bar{l}_{x-1}^{aa} \bar{q}_{x-1}^{aa} + \bar{l}_x^{aa} \bar{q}_x^{aa}}{2 \bar{l}_x^{aa}} \quad (36)$$

und

$$r'_x = \frac{\bar{l}_{x-1}^{aa} i'_{x-1} + \bar{l}_x^{aa} i'_x}{2 \bar{l}_x^{aa}}. \quad (37)$$

Stellt man dieselben Beziehungen für  $\bar{\mu}_x^{aa}$  und  $i'_x$  auf und addiert, so kommt

$$\bar{\mu}_x^{aa} + \bar{\mu}_x^{aa} + r'_x + r''_x = \bar{\mu}_x^a = \frac{\bar{l}_{x-1}^{aa} - \bar{l}_x^{aa}}{2 \bar{l}_x^{aa}},$$

die übliche Näherungsformel für  $\bar{\mu}_x^a$ .

b) Die Entwicklungen der vorausgehenden Abschnitte nehmen nicht ausdrücklich Rücksicht auf die Abhängigkeit der Sterbenswahrscheinlichkeit und der Invaliditätswahrscheinlichkeit der Aktiven von der Dienstdauer, der Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden von der Invaliditätsdauer. Sie gelten aber auch für den Fall, dass diese Abhängigkeit besteht und dass mit Selektionstafeln, statt mit Aggregattafeln, gerechnet wird. Es genügt, die angestellten Betrachtungen hin-

sichtlich dieser Abhängigkeit zu durchgehen und die formalen Änderungen anzubringen, welche diese Abhängigkeit ausdrücken, um den in Frage stehenden Nachweis zu erbringen. Wir haben für unsere Nachweisungen absichtlich die Form gewählt, welche gestattet, diese Änderungen ohne weiteres anzubringen.

Der bevorstehende Wiener-Kongress für Versicherungswissenschaft hat auf sein Arbeitsprogramm unter anderem die Forderung aufgenommen, die Versicherungsmathematik unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Invalidität von der Berufsdauer, der Invalidensterblichkeit von der Dauer der Invalidität auszustalten.

Den in diesem Abschnitt gegebenen Hinweis möchten wir als Beitrag zum genannten Thema angesehen wissen.

*Zürich, im Januar 1908.*