Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 3 (1908)

Artikel: Zur mathematischen Theorie der Versicherung verbundener Leben

Autor: Riethmann, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967416

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur mathematischen Theorie der Versicherung verbundener Leben.

Von Dr. **J. Riethmann.**

Die vorliegende Arbeit ist auf eine Anregung von Dr. Schaertlin entstanden.

1. Sie beschäftigt sich mit der Untersuchung der Zusammenhänge der Versicherungswerte unter der Annahme, dass die Sterblichkeit der verbundenen Leben, oder, konkreter ausgedrückt, der Männer und Frauen, vom Zivilstand abhängig sei. Wir wollen, mit andern Worten, die Tatsache berücksichtigen, dass die Sterblichkeitsverhältnisse verehelichter und unverehelichter Personen verschieden sind. Dass derartige Unterschiede bestehen — und zwar in ziemlich hohem Masse — beweist eine Schrift „Über die Sterblichkeit unter den Rentnern nach den Erfahrungen der Germania, Lebens-Versicherungs-Aktien-Gesellschaft zu Stettin“ [1]), wo auf Seite 8 die Sterblichkeit der weiblichen Rentner nach dem Familienstand (ledig, verheiratet, verwitwet und geschieden) angegeben ist. Leider sind diese Sterbenswahrscheinlichkeiten für 5jährige Altersgruppen zusammengefasst und fehlen mangels genügend zahlreichen Beobachtungsmateriales für die Männer nach ihrem Familienstand überhaupt, so dass diese Daten einstweilen noch nicht als numerische Illustration der

[1]) Stettin, Juni 1907. L. Pasenow.

nachstehend gefundenen Resultate dienen können. In einer Arbeit von A. Hewat und J. Chatham „Über die Erfahrungen der Witwenkassen der schottischen Banken“ (J. I. A. XXXI) finden sich auf Seite 439 die ausgeglichenen „Zentralen Sterbeverhältnisse“ lediger und verheirateter Männer, verheirateter und verwitweter Frauen. Der Umstand, dass das Beobachtungsmaterial nicht sehr umfangreich ist und die verwitweten Männer mit den verheirateten in eine Gruppe zusammengefasst wurden, veranlasst uns indessen, von einer Benutzung der Zahlen für numerische Berechnungen abzusehen.

In besonderen Fällen wird auch der Versicherungstechniker die oben erwähnten Unterschiede [1]) nicht ausser acht lassen dürfen, namentlich dann nicht, wenn es sich, wie z. B. bei Witwenkassen, Rentenversicherungen etc., um möglichst gute Annäherung an den wahrscheinlichsten Fall handelt.

2. Zweifellos haben die Begriffe „Sterblichkeit des Mannes in der Ehe“ und „Sterblichkeit des Mannes ausser der Ehe“ eine selbständige Bedeutung und Existenzberechtigung. Ebenso, wie man von der Sterblichkeit gewisser Berufsklassen, der Bewohner eines Landes, der Angehörigen eines gewissen Dienstes (z. B. eines Fabrikbetriebes) spricht, kann man offenbar auch sprechen von der Sterblichkeit „Verheirateter“ und „Unverheirateter“.

Bezeichnen wir beispielsweise die Sterbenswahrscheinlichkeit eines verheirateten Mannes vom Alter x (das Alter der Frau soll hierbei ohne Belang sein) mit q_x^v, so ist q_x^v die Wahrscheinlichkeit, dass ein $x$jähriger, verheirateter Mann im Laufe des nächsten Jahres stirbt,

---

[1]) Vergl. auch Karup: Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät am 31. Dezember 1890, pag. 69 und 71.

ohne dass er aus dem Zustand des Verheiratetseins ausgetreten ist. Das Nichtaustreten aus diesem Zustande kann z. B. dadurch bewirkt worden sein, dass die Frau nicht gestorben ist, oder dass sich der Mann nach dem Hinschiede der Frau sofort wieder verheiratet hat. Entsprechend dieser Auffassung werden bei der Berechnung der Werte von q_x^v aus der Erfahrung über Verheiratete diejenigen Männer, welche ihre Frauen verlieren, als aus der Beobachtung Ausscheidende zu behandeln sein.

Der Begriff „unabhängige Wahrscheinlichkeit", der sich im ersten Augenblick aufzudrängen scheint, kann im Hinblick auf unsere Begriffsbestimmung „Sterbenswahrscheinlichkeit eines Mannes in der Ehe" umgangen werden. Es entspricht allerdings unsere Bestimmung von q_x^v der Bildungsweise der Karupschen „unabhängigen Wahrscheinlichkeiten"; wir glauben aber aus den oben angegebenen Gründen, die eine Tautologie enthaltende Bezeichnungsweise „unabhängige Sterbenswahrscheinlichkeit Verheirateter" vermeiden zu müssen und in der Folge einfach von der „Sterbenswahrscheinlichkeit Verheirateter" sprechen zu können. Spricht man doch auch nicht von einer „unabhängigen Sterbenswahrscheinlichkeit der Lehrer", sondern einfach von der „Sterblichkeit der Lehrer", indem man unter letzterem Begriffe eben die Wahrscheinlichkeit versteht, dass ein Lehrer im nächsten Jahre stirbt, sofern er während dieser Zeit im Lehrstande verbleibt.

Analoges, wie das über q_x^v Gesagte, gilt auch von q_x^w, der Wahrscheinlichkeit, dass ein $x$jähriger Witwer im Laufe des nächsten Jahres als Witwer stirbt.

Die der Reaktivierung der Invaliden entsprechende Wiederverheiratung verwitweter Männer soll vorerst ausgeschlossen bleiben.

3. Mit Hülfe von

q_x^v = Wahrscheinlichkeit, dass ein verheirateter Mann im nächsten Jahre als verheiratet stirbt,

q_y^v = Wahrscheinlichkeit, dass eine verheiratete Frau im nächsten Jahre als verheiratet stirbt,

q_x^w = Wahrscheinlichkeit, dass ein Witwer im nächsten Jahre als Witwer stirbt,

q_y^w = Wahrscheinlichkeit, dass eine Witwe im nächsten Jahre als Witwe stirbt,

und der sich unter Berücksichtigung der Bedeutung von q_x^v und q_x^w selbsterklärenden Beziehungen

$$q_x^v + p_x^v = 1 \tag{1}$$

$$q_x^w + p_x^w = 1 \tag{2}$$

lassen sich nun die Absterbeordnungen für verheiratete Männer (l_x^v) und verheiratete Frauen (l_y^v), ferner die Absterbeordnungen für Witwer (l_x^w) und Witwen (l_y^w) aufstellen, wobei

$$\begin{aligned} l_{x+1}^v &= l_x^v\,(1-q_x^v) & l_{x+1}^w &= l_x^w\,(1-q_x^w) \\ l_{y+1}^v &= l_y^v\,(1-q_y^v) & l_{y+1}^w &= l_y^w\,(1-q_y^w). \end{aligned} \tag{3}$$

4. Beziehen wir unsere Wahrscheinlichkeiten statt auf ein Jahr auf die unendlich kleine Zeit dx, so werden wir auf die Intensitätsfunktionen geführt.

Bekannter Definition zufolge ist die Sterbeintensität eines $x$jährigen Mannes, gleichgültig welches sein Zivilstand sei,

$$\mu_x = -\frac{1}{dx}\frac{dl_x}{l_x}. \tag{4}$$

Wir definieren nun analog:

$$\mu_x^v = -\frac{1}{dx}\frac{dl_x^v}{l_x^v} \tag{5}$$

$$\mu_x^w = -\frac{1}{dx}\frac{dl_x^w}{l_x^w}, \tag{6}$$

wobei μ_x^v die Sterbeintensität eines $x$jährigen, verheirateten Mannes, μ_x^w die Sterbeintensität eines x-jährigen Witwers bedeutet.

5. Leitet man aus den Werten q_x, p_x, l_x, die sich z. B. auf den Lehrerstand beziehen mögen, den Wert a_x ab, so erhält man den Barwert der nachschüssigen Rente 1 für einen $x$jährigen Lehrer, der seinem Berufe lebenslang treu bleibt. Entsprechend ergibt sich aus den Werten q_x^v, p_x^v, l_x^v der Barwert einer nachschüssigen Leibrente 1 für einen verheirateten Mann des Alters x, der lebenslang in der Ehe bleibt. Ob in Wirklichkeit der Lehrer in seinem Berufe verharrt, ob der Verheiratete Zeit seines Lebens in der Ehe lebt, ob der Witwer sich wieder verheiratet, ist eine Angelegenheit für sich; ihre Berücksichtigung führt in unserem Falle zu Fragen, deren Beantwortung uns hernach noch beschäftigen wird.

6. Nachdem die statistische Beobachtung zur Kenntnis der Grundwerte q_x^v, q_y^v, q_x^w, q_y^w geführt hat, stellt sich von selbst die Aufgabe, die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln:

w_1 = Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Ehepaar (x, y) das nächste Jahr überlebt,

w_2 = Wahrscheinlichkeit, dass die Frau im nächsten Jahre Witwe wird und das Verwitwungsjahr überlebt,

w_3 = Wahrscheinlichkeit, dass die Frau im nächsten Jahre Witwe wird und hernach im Laufe des Verwitwungsjahres stirbt,

w_4 = Wahrscheinlichkeit, dass die Frau Witwe wird und das Verwitwungsjahr überlebt oder hernach im Laufe desselben stirbt,

w_5 = Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im nächsten Jahre Witwer wird und das Verwitwungsjahr überlebt,

w_6 = Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im nächsten Jahre Witwer wird und hernach im Laufe des Verwitwungsjahres stirbt,

w_7 = Wahrscheinlichkeit, dass der Mann Witwer wird und das Verwitwungsjahr überlebt oder hernach im Laufe desselben stirbt,

w_8 = Wahrscheinlichkeit, dass Mann und Frau im nächsten Jahre sterben, gleichgültig in welcher Reihenfolge.

Ist die Sterblichkeit unabhängig vom Zivilstande, so sind diese Wahrscheinlichkeiten bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned}
w_1 &= p_x \cdot p_y = p_{xy} \\
w_2 &= q_x \cdot p_y \\
w_3 &= \frac{1}{2} q_x \cdot q_y \\
w_4 &= q_{xy}^{1} = \frac{1}{2} q_x (1 + p_y) \\
w_5 &= q_y \cdot p_x \\
w_6 &= \frac{1}{2} q_y \cdot q_x \\
w_7 &= q_{xy}^{1} = \frac{1}{2} q_y (1 + p_x) \\
w_8 &= q_x \cdot q_y = q_{\overline{xy}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Findet dagegen diese Unabhängigkeit nicht statt, so bedarf es einer besonderen Untersuchung, was an Stelle dieser Ausdrücke tritt.

7. Wir definieren daher unter der Voraussetzung, dass die Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten für Männer und Frauen innerhalb und ausserhalb der Ehe

verschieden seien, vorerst die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$p_{x[y]}^{\overline{vv}}$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein $x$jähriger, verheirateter Mann, dessen Frau das Alter y hat, das nächste Jahr als verheiratet überlebt,

$p_{x[y]}^{\overline{vw}}$ = Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im nächsten Jahre Witwer wird und das Ende des Verwitwungsjahres überlebt,

$q_{x[y]}^{\overline{vw}}$ = Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im nächsten Jahre Witwer wird und hernach im Laufe des Verwitwungsjahres stirbt,

$w_{x[y]}$ = Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im nächsten Jahre Witwer wird und das Verwitwungsjahr entweder überlebt oder hernach im Laufe desselben stirbt.

Die Wahrscheinlichkeit $p_{x[y]}^{\overline{vv}}$, dass der Mann das nächste Jahr als verheiratet überlebt, dass also, mit andern Worten, beide überleben, ergibt sich aus der folgenden Überlegung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass (x) überlebt, ist p_x^v, sofern seine Frau (y) unterdessen nicht stirbt. Die Wahrscheinlichkeit des Überlebens von (y) ist p_y^v, unter der Voraussetzung, dass der Mann (x) unterdessen nicht stirbt. Die Wahrscheinlichkeit für das Überleben beider Personen wird deswegen gleich $p_x^v \cdot p_y^v$ sein, so dass man hat

$$p_{x[y]}^{\overline{vv}} = p_x^v \cdot p_y^v. \tag{8}$$

Der Wichtigkeit dieser fundamentalen Beziehung wegen sei auch noch der folgende Beweis angeführt.

Sei $f(x+t, y+t)$ die Funktion von $x+t$ und $y+t$, welche die Zahl der lebenden Ehepaare der Altersverbindung $x+t$, $y+t$ bestimmt.

Von l^v_{x+t} verheirateten Männern sterben in der Zeit dt

$$-d\ l^v_{x+t}.$$

Von $f(x+t, y+t)$ verheirateten Männern sterben in der Zeit dt

$$-f(x+t, y+t) \cdot \frac{dl^v_{x+t}}{l^v_{x+t}}.$$

Von $f(x+t, y+t)$ verheirateten Frauen sterben in der Zeit dt

$$-f(x+t, y+t) \cdot \frac{dl^v_{y+t}}{l^v_{y+t}}.$$

Somit werden von $f(x+t, y+t)$ Ehepaaren in der Zeit dt aufgelöst:

$$-f(x+t, y+t) \cdot \left\{ \frac{dl^v_{x+t}}{l^v_{x+t}} + \frac{dl^v_{y+t}}{l^v_{y+t}} \right\}.$$

Dieser Betrag stellt die totale Abnahme von $f(x+t, y+t)$ in der Zeit dt dar. Also ist

$$-df(x+t, y+t) = -f(x+t, y+t) \left\{ \frac{dl^v_{x+t}}{l^v_{x+t}} + \frac{dl^v_{y+t}}{l^v_{y+t}} \right\},$$

oder:

$$\frac{df(x+t, y+t)}{f(x+t, y+t)} = \frac{dl^v_{x+t}}{l^v_{x+t}} + \frac{dl^v_{y+t}}{l^v_{y+t}}$$

und weiter

$$d \log f(x+t, y+t) = d \log l^v_{x+t} + d \log l^v_{y+t}$$
$$= d \log (l^v_{x+t} \cdot l^v_{y+t})$$
$$\log f(x+t, y+t) = \log (l^v_{x+t} \cdot l^v_{y+t}) + \log C$$

und endlich

$$f(x+t, y+t) = C \cdot l^v_{x+t} \cdot l^v_{y+t},$$

womit die gesuchte Funktion bestimmt ist.

Hieraus folgt:

$$\frac{f(x+1, y+1)}{f(x, y)} = p^{\overline{vv}}_{x[y]} = \frac{C\, l^v_{x+1} \cdot l^v_{y+1}}{C \cdot l^v_x \cdot l^v_y} = p^v_x \cdot p^v_y,$$

was mit (8) übereinstimmt.

8. Um allgemein zu sein, berechnen wir zuerst:

${}_{n+1}p^{\overline{vw}}_{x[y]}$, die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im $(n+1)$. Jahre Witwer wird und das Verwitwungsjahr überlebt,

${}_{n}q^{\overline{vw}}_{x[y]}$, die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im $(n+1)$. Jahre Witwer wird und hernach im Laufe des Verwitwungsjahres stirbt,

${}_{n+1}w_{x[y]}$, die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann im $(n+1)$. Jahre Witwer wird und das Verwitwungsjahr entweder überlebt oder im Laufe desselben stirbt.

Aus den gefundenen Werten ergeben sich dann durch Spezialisierung die in Abschnitt 7 definierten Wahrscheinlichkeiten.

Bedeutet t einen echten Bruch, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein $x$jähriger, verheirateter Mann zur Zeit $x+n+t$ noch verheiratet lebt, nach (8)

$$\frac{l^v_{x+n+t} \cdot l^v_{y+n+t}}{l^v_x \cdot l^v_y}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die verheiratete Frau vom Alter $y+n+t$ zwischen der Zeit $y+n+t$ und $y+n+t+dt$ stirbt, ist

$$\frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_{y+n+t}}.$$

Nehmen wir an, dass die Sterbefälle der Frauen sämtlich zu Anfang des durch die Grenzen $y+n+t$ und $y+n+t+dt$ bestimmten Zeitabschnittes stattfinden, so stellt der Bruch

$$\frac{l^w_{x+n+t+dt}}{l^w_{x+n+t}}$$

die Wahrscheinlichkeit dar, dass der Mann, der zur Zeit $x+n+t$ Witwer geworden ist, den Zeitabschnitt

$y+n+t$ bis $y+n+t+dt$ als Witwer überlebt. Die Wahrscheinlichkeit endlich, dass der $x+n+t+dt$ jährige Witwer den Schluss des Jahres überlebt, ist

$$\frac{l^w_{x+n+t}}{l^w_{x+n+t+dt}}.$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des Eintreffens aller dieser Ereignisse ist daher gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen, voneinander unabhängigen Ereignisse, also gleich

$$\frac{l^v_{x+n+t} \cdot l^v_{y+n+t}}{l^v_x \cdot l^v_y} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_{y+n+t}} \cdot \frac{l^w_{x+n+t+dt}}{l^w_{x+n+t}} \cdot \frac{l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t+dt}} \tag{9}$$

oder gleich

$$\frac{l^v_{x+n+t}}{l^v_x} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^w_{x+n+t}}{l^w_{x+n+t}}.$$

Nimmt man dagegen an, dass die Sterbefälle der Frauen alle am Schluss des Zeitabschnittes $y+n+t$ bis $y+n+t+dt$ stattfinden, so ist in (9) an Stelle des Faktors $\frac{l^w_{x+n+t+dt}}{l^w_{x+n+t}}$ der Faktor $\frac{l^v_{x+n+t+dt}}{l^v_{x+n+t}}$ zu setzen, indem dieser die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der Mann den fraglichen Zeitabschnitt als verheiratet überlebt.

Man erhält dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{l^v_{x+n+t} \cdot l^v_{y+n+t}}{l^v_x \cdot l^v_y} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_{y+n+t}} \cdot \frac{l^v_{x+n+t+dt}}{l^v_{x+n+t}} \cdot \frac{l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t+dt}} \tag{9a}$$

oder

$$\frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^v_{x+n+t+dt}}{l^v_x} \cdot \frac{l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t+dt}}.$$

Die gleichen Überlegungen gelten für jedes Zeitteilchen dt. Somit wird unter Berücksichtigung der ersten Annahme:

$$
{}_{n+1}\,\overline{p}^{\,\overline{vw}}_{x[y]} = J_1 = \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{l^w_{x+n+1}}{l^v_x} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^v_{x+n+t}}{l^w_{x+n+t}} \tag{9b}
$$

und unter Berücksichtigung der zweiten Annahme

$$
{}_{n+1}\,\overline{p}^{\,\overline{vw}}_{x[y]} = J_2 = \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{l^w_{x+n+1}}{l^v_x} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^v_{x+n+t+dt}}{l^w_{x+n+t+dt}}. \tag{9c}
$$

Nun ist aber

$$
lim\ \frac{l^v_{x+n+t+dt}}{l^w_{x+n+t+dt}} = \frac{l^v_{x+n+t}}{l^w_{x+n+t}},
$$

so dass J_2 mit J_1 zusammenfällt.

Unter der Voraussetzung, dass die Kurve der Lebenden (l^v_y) zwischen $y+n$ und $y+n+1$ eine Gerade sei, kann gesetzt werden

$$
l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt} = dt\ (l^v_{y+n} - l^v_{y+n+1}).
$$

Daher ist

$$
{}_{n+1}\,\overline{p}^{\,\overline{vw}}_{x[y]} = \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{l^v_{y+n} - l^v_{y+n+1}}{l^v_y} \cdot \frac{l^v_{x+n+t}}{l^v_x} \cdot \frac{l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t}}\, dt
$$

$$
= ({}_n p^v_y - {}_{n+1} p^v_y)\, \frac{l^w_{x+n+1}}{l^v_x} \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{l^v_{x+n+t}}{l^w_{x+n+t}}\, dt,
$$

oder, da entsprechend,

$$l^w_{x+n+t} = l^w_{x+n} + t\,(l^w_{x+n+1} - l^w_{x+n}),$$

$$\begin{aligned}
{}_{n+1}p^{\overline{vw}}_{x[y]} &= ({}_np^v_y - {}_{n+1}p^v_y)\,\frac{l^w_{x+n+1}}{l^v_x} \\
&\quad \cdot \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{l^v_{x+n} + t\,(l^v_{x+n+1} - l^v_{x+n})}{l^w_{x+n} + t\,(l^w_{x+n+1} - l^w_{x+n})}\,dt \\
&= ({}_np^v_y - {}_{n+1}p^v_y) \cdot p^w_{x+n} \cdot {}_np^v_x \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{p^v_{x+n} - 1}{p^w_{x+n} - 1} + \frac{p^w_{x+n} - p^v_{x+n}}{(p^w_{x+n} - 1)^2}\,\log p^w_{x+n} \right\}. \qquad (9d)
\end{aligned}$$

Die Bestimmung von ${}_nq^{\overline{vw}}_{x[y]}$ erfolgt analog derjenigen von ${}_{n+1}p^{\overline{vw}}_{x[y]}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der $x$jährige, verheiratete Mann in der Zeit $y+n+t$ bis $y+n+t+dt$ Witwer werde, diesen Zeitabschnitt überlebe und in der Zeit $x+n+t+dt$ bis $x+n+1$ sterbe, ist unter Zugrundelegung der ersten Annahme

$$\frac{l^v_{x+n+t}}{l^v_x} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^w_{x+n+t+dt}}{l^w_{x+n+t}} \cdot \frac{l^w_{x+n+t+dt} - l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t+dt}},$$

oder auch

$$\frac{l^v_{x+n+t}}{l^v_x} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^w_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^w_{x+n+t+dt} - l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t}},$$

während sich, falls man die zweite Annahme in Betracht zieht, diese Wahrscheinlichkeit zu

$$\frac{l^v_{x+n+t}}{l^v_x} \cdot \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^v_{x+n+t+dt}}{l^v_{x+n+t}} \cdot \frac{l^w_{x+n+t+dt} - l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t+dt}}$$

ergibt.

Da aber, wie oben,

$$lim \frac{l^v_{x+n+t+dt}}{l^w_{x+n+t+dt}} = \frac{l^v_{x+n+t}}{l^w_{x+n+t}},$$

so fallen die beiden Werte der gesuchten Wahrscheinlichkeit zusammen.

Man hat daher

$$_nq^{\overline{vw}}_{x[y]} = \int_{t=o}^{t=1} \frac{l^v_{y+n+t} - l^v_{y+n+t+dt}}{l^v_y} \cdot \frac{l^v_{x+n+t}}{l^v_x}$$

$$\cdot \frac{l^w_{x+n+t+dt} - l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t}},$$

oder, falls man von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung absieht,

$$_nq^{\overline{vw}}_{x[y]} = \int_{t=o}^{t=1} \frac{l^v_{y+n} - l^v_{y+n+1}}{l^v_y} \cdot \frac{l^v_{x+n+t}}{l^v_x} \cdot \left(1 - \frac{l^w_{x+n+1}}{l^w_{x+n+t}}\right) dt$$

$$= (_np^v_y - {}_{n+1}p^v_y) \frac{1}{l^v_x} \int_{t=o}^{t=1} \left\{ l^v_{x+n} + t\,(l^v_{x+n+1} - l^v_{x+n}) \right\} dt$$

$$- (_np^v_y - {}_{n+1}p^v_y) \frac{l^w_{x+n+1}}{l^v_x} \int_{t=o}^{t=1} \frac{l^v_{x+n} + t\,(l^v_{x+n+1} - l^v_{x+n})}{l^w_{x+n} + t\,(l^w_{x+n+1} - l^w_{x+n})} dt$$

$$= (_np^v_y - {}_{n+1}p^v_y) \cdot \frac{l^v_{x+n} + l^v_{x+n+1}}{2\, l^v_x} - {}_{n+1}p^{\overline{vw}}_{x[y]}$$

$$= \frac{1}{2} (_np^v_y - {}_{n+1}p^v_y)\,(_np^v_x + {}_{n+1}p^v_x) - {}_{n+1}p^{\overline{vw}}_{x[y]}. \quad (10)$$

Die Verwitwungswahrscheinlichkeit $_{n+1}w_{x\,[y]}$ ist offenbar gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten (9d) und (10).

Hieraus folgt:

$$_{n+1}w_{x[y]} = \frac{1}{2}\left({}_n p_y^v - {}_{n+1}p_y^v\right)\left({}_n p_x^v + {}_{n+1}p_x^v\right). \qquad (11)$$

Bemerkenswert ist, dass in dieser Wahrscheinlichkeit der Index w nicht vorkommt.

Setzt man nun in den Gleichungen (9d), (10) und (11) $n = o$, so ergeben sich die in Abschnitt 7 aufgeführten Wahrscheinlichkeiten. Es wird

$$p_{x[y]}^{\overline{vw}} = (1 - p_y^v)\, p_x^w \cdot \left\{\frac{p_x^v - 1}{p_x^w - 1} + \frac{p_x^w - p_x^v}{(p_x^w - 1)^2} \log p_x^w\right\} \qquad (12)$$

$$q_{x[y]}^{\overline{vw}} = \frac{1}{2}(1 - p_y^v)(1 + p_x^v) - p_{x[y]}^{\overline{vw}} \qquad (13)$$

$$w_{x[y]} = \frac{1}{2}(1 - p_y^v)(1 + p_x^v). \qquad (14)$$

Bedenken wir ferner, dass

$$p_x^v + q_x^v = 1$$

und auch

$$p_x^w + q_x^w = 1,$$

so gehen, falls angenähert

$$\log p_x^w = -2 \cdot \frac{1 - p_x^w}{1 + p_x^w} \qquad (15)$$

substituiert wird, die Gleichungen (12), (13) und (14) über in

$$p_{x[y]}^{\overline{vw}} = q_y^v \cdot p_x^w \cdot \frac{2 - q_x^v}{2 - q_x^w} = q_y^v \cdot p_x^w \cdot \frac{1 + p_x^v}{1 + p_x^w}$$

$$= 2\, w_{x[y]} \cdot \frac{p_x^w}{1 + p_x^w} \qquad (12\alpha)$$

$$q_{x[y]}^{\overline{vw}} = \frac{1}{2} q_y^v \cdot q_x^w \cdot \frac{2 - q_x^v}{2 - q_x^w} = \frac{1}{2} q_y^v \cdot q_x^w \cdot \frac{1 + p_x^v}{1 + p_x^w}$$

$$= w_{x[y]} \cdot \frac{q_x^w}{1 + p_x^w} \qquad (13\alpha)$$

$$w_{x[y]} = \frac{1}{2} q_y^v (1 + p_x^v). \qquad (14\alpha)$$

Begnügen wir uns dagegen an Stelle der Annäherung (15) mit dem etwas roheren Werte

$$log\ p_x^w = -q_x^w, \tag{16}$$

so finden wir

$$p_{x[y]}^{\overline{vw}} = q_y^v \cdot p_x^w \tag{12β}$$

$$q_{x[y]}^{\overline{vw}} = q_y^v \left(q_x^w - \frac{1}{2} q_x^v\right) \tag{13β}$$

$$w_{x[y]} = \frac{1}{2} q_y^v \left(1 + p_x^v\right). \tag{14β}$$

Aus den Gleichungen (12α), (13α), (14α) bezw. (12β), (13β), (14β) ergeben sich durch einfache Vertauschung der Indices x und y die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$p_{y[x]}^{\overline{vw}}$ = Wahrscheinlichkeit, dass eine $y$jährige Frau, deren Mann das Alter x hat, im nächsten Jahre Witwe wird und das Verwitwungsjahr überlebt,

$q_{y[x]}^{\overline{vw}}$ = Wahrscheinlichkeit, dass die Frau im nächsten Jahre Witwe wird und hernach im Laufe des Verwitwungsjahres stirbt,

$w_{y[x]}$ = Wahrscheinlichkeit, dass die Frau im nächsten Jahre Witwe wird, und das Verwitwungsjahr überlebt oder hernach im Laufe desselben stirbt.

Es ist

$$p_{y[x]}^{\overline{vw}} = q_x^v\, p_y^w \cdot \frac{1 + p_y^v}{1 + p_y^w} = 2\, w_{y[x]} \cdot \frac{p_y^w}{1 + p_y^w} \tag{17}$$

$$q_{y[x]}^{\overline{vw}} = \frac{1}{2} q_x^v\, q_y^w \cdot \frac{1 + p_y^v}{1 + p_y^w} = w_{y[x]} \cdot \frac{q_y^w}{1 + p_y^w} \tag{18}$$

$$w_{y[x]} = \frac{1}{2} q_x^v \left(1 + p_y^v\right), \tag{19}$$

oder, entsprechend den Gleichungen (12β) bis (14β):

$$p_{y[x]}^{\overline{vw}} = q_x^v \cdot p_y^w \tag{17β}$$

$$q_{y[x]}^{\overline{vw}} = q_x^v \left(q_y^w - \frac{1}{2} q_y^v\right) \tag{18β}$$

$$w_{y[x]} = \frac{1}{2} q_x^v (1 + p_y^v). \tag{19β}$$

Die Wahrscheinlichkeit $q_{\overline{xy}}^v$, dass beide Personen im nächsten Jahre sterben, ergibt sich als Summe von (13α) und (18). Der resultierende Ausdruck ist nicht einfach und soll deswegen nicht angeschrieben werden.

Begnügt man sich an Stelle von (13α) und (18) mit (13β) und (18β), so kommt:

$$q_{\overline{xy}}^v = q_y^v q_x^w - q_x^v q_y^v + q_x^v q_y^w. \tag{20}$$

Lassen wir auf den rechten Seiten der Gleichungen (8), (12α) bis (14α), (12β) bis (14β), (17) bis (19), 17β) bis (19β) und (20) die Indices v und w fallen, so gehen die betreffenden Wahrscheinlichkeiten in die unter (7) angegebenen Werte über, wie dies auch der Fall sein muss. Als Kontrolle kann die folgende Gleichung dienen:

$$p_{x[y]}^{\overline{vw}} + q_{x[y]}^{\overline{vw}} + p_{y[x]}^{\overline{vw}} + q_{y[x]}^{\overline{vw}} + p_{x[y]}^{\overline{vv}} = 1 \tag{21}$$

oder, weil

$$p_{x[y]}^{\overline{vw}} + q_{x[y]}^{\overline{vw}} = w_{x[y]} \tag{22}$$

und

$$p_{y[x]}^{\overline{vw}} + q_{y[x]}^{\overline{vw}} = w_{y[x]} \tag{23}$$

auch

$$w_{x[y]} + w_{y[x]} + p_{x[y]}^{\overline{vv}} = 1. \tag{24}$$

9. Wie die Invalidierung des Aktiven begrifflich als ein Ereignis aufgefasst werden kann, das modifizierend auf dessen Vitalität einwirkt, kann auch der

Tod des einen Ehegatten als ein Ereignis angesehen werden, das auf die Lebensdauer des andern einen Einfluss ausübt. Um die Parallele für den Ehemann durchzuführen, hat man dann als einander entsprechend anzusehen:

Sterben als Aktiver:	Sterben als Verheirateter (im Ehestand).
Invalidwerden:	Sterben der Ehefrau bei Lebzeiten des Mannes (Verwitwung).

Diese Auffassung und Zuordnung kann nun dazu verwendet werden, um die Ergebnisse der Arbeit von Dr. G. Schaertlin „Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung“ (Bern, 1907; Stämpfli) auch für unsern Fall fruchtbar zu machen.

10. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine Gruppe von l_y verheirateten Frauen, deren Männer alle das Alter x haben mögen. Die von diesen l_y Ehefrauen überlebenden Frauen zerfallen späterhin in zwei Gruppen, nämlich in verheiratete Frauen $l_{y[x]}^{\overline{vv}}$ und in Witwen $l_y^{\overline{ww}}$.

Da zu Beginn unserer Beobachtung alle Frauen verheiratet sind, ist offenbar zu dieser Zeit

$$l_{y[x]}^{\overline{vv}} = l_y$$

und

$$l_y^{\overline{ww}} = 0.$$

Nun berechnen wir eine Schärtlinsche Ausscheidetafel für Ehefrauen mit Hülfe der Wahrscheinlichkeiten (8) und (17) und der allgemeinen Relationen:

$$l_{y+n\,[x+n]}^{\overline{vv}} = l_{y+n-1\,[x+n-1]}^{\overline{vv}}\, p_{x+n-1\,[y+n-1]}^{\overline{vv}} \qquad (25)$$

$$l_{y+n}^{\overline{ww}} = l_{y+n-1\,[x+n-1]}^{\overline{vv}}\, p_{y+n-1\,[x+n-1]}^{\overline{vw}} + l_{y+n-1}^{\overline{ww}}\, p_{y+n-1}^{w}. \qquad (26)$$

Hieraus leitet sich, da für jede Altersgruppe $y[x]$, $y+1[x+1]$, ... die Beziehung besteht

$$l_n = l_n^{\overline{vv}} + l_n^{\overline{ww}}, \tag{27}$$

die Reihe der l_y (Gesamtheit der überlebenden Frauen) ab.

Die Reihe der $l_y^{\overline{ww}}$ ist nicht identisch mit der Reihe der l_y^{w}, der gewöhnlichen Absterbeordnung der Witwen.

Für praktische Zwecke müssten eine Reihe solcher Ausscheidetafeln gebildet werden, z. B. mit der Differenz $y—x = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots$. Die Reihen für die dazwischenliegenden Differenzen wären durch Interpolation zu finden.

11. Um die Analogie mit den Beziehungen der Invaliditätsversicherung deutlich hervortreten zu lassen, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein.

Es bedeute:

$p_{y[x]}^{\overline{vv}}$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine mit einem Manne des Alters x verheiratete, $y$jährige Frau das nächste Jahr als verheiratet überlebt.

Dann ist, wie aus Gleichung (25) ohne weiteres ersichtlich,

$$p_{y[x]}^{\overline{vv}} = \frac{l_{y+1\,[x+1]}^{\overline{vv}}}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}} = p_x^v \cdot p_y^v. \tag{28}$$

Die Wahrscheinlichkeit $q_{y[x]}^{\overline{vv}}$, dass eine $y$jährige, verheiratete Frau im nächsten Jahre als verheiratet stirbt, ergibt sich aus der sich selbst erklärenden Beziehung

$$p_{y[x]}^{\overline{vv}} + q_{y[x]}^{\overline{vv}} + p_{y[x]}^{\overline{vw}} + q_{y[x]}^{\overline{vw}} = 1 \tag{29}$$

und mit Zuhülfenahme der Gleichungen (28) und (22) zu

$$q_{y[x]}^{\overline{vv}} = 1 - p_x^v\, p_y^v - w_{y[x]} \tag{30}$$

oder zu

$$q_{y[x]}^{\overline{vv}} = w_{x[y]}, \tag{31}$$

was der Definition von $w_{x[y]}$ entspricht.

Aus (30), sowie auch aus (24) kommt:

$$w_{x[y]} + w_{y[x]} = 1 - p_x^v \cdot p_y^v. \tag{32}$$

Wir definieren ferner noch:

$p_{y[x]}^v$, die Wahrscheinlichkeit, dass eine $y$jährige, verheiratete Frau das nächste Jahr als verheiratet oder verwitwet überlebt, und

$q_{y[x]}^v$, die Wahrscheinlichkeit, dass eine $y$jährige, verheiratete Frau im nächsten Jahre als verheiratet oder verwitwet stirbt.

Es ist

$$p_{y[x]}^v = p_{y[x]}^{\overline{vv}} + p_{y[x]}^{\overline{vw}} \tag{33}$$

$$q_{y[x]}^v = q_{y[x]}^{\overline{vv}} + q_{y[x]}^{\overline{vw}}. \tag{34}$$

Daraus ergibt sich mit Benützung von (29)

$$p_{y[x]}^v + q_{y[x]}^v = 1. \tag{35}$$

Gleichung (35) ist nicht zu verwechseln mit Gleichung (1).

Mit Hülfe von (8), (17), (31), (14a), (18) lassen sich $p_{y[x]}^v$ und $q_{y[x]}^v$ direkt durch die Grundwerte q_x^v, q_y^v, q_y^w ausdrücken. Man findet

$$p_{y[x]}^v = 1 - q_y^v - \frac{q_x^v\,(q_y^w - q_y^v)}{1 + p_y^w} \tag{36}$$

$$q_{y[x]}^v = q_y^v + \frac{q_x^v\,(q_y^w - q_y^v)}{1 + p_y^w}. \tag{37}$$

Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten in (36) und (37) ist ersichtlicherweise gleich der Einheit.

12. Die in (17), (18), (8), (30), (33) und (34) angeführten Fundamentalwerte bilden unseren Voraussetzungen und der ganzen Herleitungsweise nach das direkte Analogon zu den bezüglichen Fundamentalgrössen der Invaliditätsversicherung; und zwar stehen,

falls das der Invalidierung des Mannes entsprechende Ereignis die Verwitwung des Mannes ist, einander gegenüber

$$
\begin{array}{lll}
p_x^{\overline{aa}} & \text{und} & p_{x[y]}^{\overline{vv}} \quad (p_x^v \cdot p_y^v) \\
q_x^{\overline{aa}} & \text{„} & q_{x[y]}^{\overline{vv}} \quad (w_{y[x]}) \\
p_x^{\overline{ai}} & \text{„} & p_{x[y]}^{\overline{vw}} \\
q_x^{\overline{ai}} & \text{„} & q_{x[y]}^{\overline{vw}} \\
p_x^{a} & \text{„} & p_{x[y]}^{v} \\
q_x^{a} & \text{„} & q_{x[y]}^{v} \\
i_x & \text{„} & w_{x[y]} \quad (q_{y[x]}^{\overline{vv}}) \\
q_x^{i} & \text{„} & q_x^{w} .
\end{array}
$$

Dass die obigen Analogien in der Tat bestehen, soll im folgenden gezeigt werden.

Entwickelt man

$$p_x^{\overline{ai}} = \frac{1}{l_x^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{t=1} l_{x+t}\, r_{x+t}\, dt \cdot \frac{l_{x+1}^i}{l_{x+t}^i}$$

und

$$q_x^{\overline{ai}} = \frac{1}{l_x^{\overline{aa}}} \int_{t=0}^{t=1} l_{x+t}^{\overline{aa}}\, r_{x+t}\, dt \cdot \frac{l_{x+t}^i - l_{x+1}^i}{l_{x+t}^i}$$

unter der Voraussetzung, dass

$$l_{x+t}^{\overline{aa}}\, r_{x+t} = l_x^{\overline{aa}} \cdot i_x$$

sei, so findet man mit Hülfe der Substitution

$$\log p_x^i = -2 \cdot \frac{1 - p_x^i}{1 + p_x^i}$$

und

$$\left.\begin{aligned} p_x^{\overline{ai}} &= 2 \cdot \frac{i_x\, p_x^i}{1 + p_x^i} \\ q_x^{\overline{ai}} &= \frac{i_x\, q_x^i}{1 + p_x^i} \end{aligned}\right\}, \qquad (38)$$

Formeln, die schon von Zeuner[1]) aufgestellt und von Küttner[2]) neu begründet wurden. (Zeuner hat allerdings an Stelle der p_x^i und q_x^i die allgemeinen Werte p_x und q_x gesetzt.)

Substituiert man in den obigen Formeln für i_x, p_x^i, q_x^i die entsprechenden Werte $w_{x[y]}$, p_x^w, q_x^w, so gehen sie in die bereits in den Gleichungen (12α) und (13α) gefundenen Werte für $p_{x[y]}^{\overline{vw}}$ und $q_{x[y]}^{\overline{vw}}$ über.

13. In der Invaliditätsversicherung gelten, wenn $'q_x^{\overline{aa}}$ und $'i_x$ die Karupschen „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten bedeuten, bekanntlich folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} i_x &= 'i_x \left(1 - \frac{1}{2}\, 'q_x^{\overline{aa}}\right) && \text{(angenähert)} \\ q_x^{\overline{aa}} &= 'q_x^{\overline{aa}} \left(1 - \frac{1}{2}\, 'i_x\right) && \text{„} \\ p_x^{\overline{aa}} &= (1 - 'q_x^{\overline{aa}})\,(1 - 'i_x) && \text{(streng).} \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Nach (14α), (19) und (8) ist

$$\left.\begin{aligned} w_{x[y]} &= q_{y[x]}^{\overline{vv}} = q_y^v \left(1 - \frac{1}{2}\, q_x^v\right) && \text{(angenähert)} \\ q_{x[y]}^{\overline{vv}} &= w_{y[x]} = q_x^v \left(1 - \frac{1}{2}\, q_y^v\right) && \text{„} \\ p_{x[y]}^{\overline{vv}} &= p_{y[x]}^{\overline{vv}} = (1 - q_x^v)\,(1 - q_y^v) && \text{(streng).} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Es hängen also die Grössen $w_{x[y]}$, $q_{x[y]}^{\overline{vv}}$, $p_{x[y]}^{\overline{vv}}$ mit den Fundamentalgrössen q_y^v und q_x^v in derselben Weise zusammen, wie in der Invaliditätsversicherung die Werte

---

[1]) Zeuner, Abhandlungen aus der mathem. Statistik, Leipzig 1869, pag. 130.

[2]) Küttner, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXV, Leipzig 1880, pag. 17.

Siehe hierzu auch: Dr. J. Eggenberger, Die Fundamentalgrössen in der Invalidenversicherung, Assek.-Jahrbuch XXVII, Wien 1906.

i_x, $q_x^{\overline{aa}}$, $p_x^{\overline{aa}}$ mit den Grundwerten $'i_x$ und $'q_x^{\overline{aa}}$. Dabei entsprechen sich

$$\left.\begin{array}{lcl} i_x & \text{und} & w_{x[y]} \\ q_x^{\overline{aa}} & \text{"} & q_{x[y]}^{\overline{vv}} \\ p_x^{\overline{aa}} & \text{"} & p_{x[y]}^{\overline{vv}} \\ 'i_x & \text{"} & q_y^v \\ 'q_x^{\overline{aa}} & \text{"} & q_x^v \\ q_x^i & \text{"} & q_x^w \end{array}\right\}. \qquad (41)$$

Derselbe Parallelismus besteht auch in den übrigen Beziehungen.

Es ist nach Gleichung (38)

$$q_x^{\overline{ai}} = \frac{i_x\, q_x^i}{1 + p_x^i},$$

oder, unter Anwendung der Karupschen Substitutionen (39),

$$q_x^{\overline{ai}} = \frac{'i_x\, q_x^i}{2} \cdot \frac{2 - 'q_x^{\overline{aa}}}{1 + p_x^i}. \qquad (42)$$

Indem wir auf der rechten Seite von (42) an Stelle der $'i_x$, $'q_x^{aa}$ und q_x^i nach (41) die korrespondierenden Werte einführen, erhalten wir

$$\frac{q_y^v \cdot q_x^w}{2} \cdot \frac{2 - q_x^v}{1 + p_x^w},$$

oder, da

$$p_x^v + q_x^v = 1,$$

auch

$$\frac{q_y^v \cdot q_x^w}{2} \cdot \frac{1 + p_x^v}{1 + p_x^w}.$$

Dieser Ausdruck ist aber nach (13α) nichts anderes als $q_{x[y]}^{\overline{vw}}$.

Für $\quad p_x^{\overline{ai}} = 2 \cdot \dfrac{i_x\, p_x^i}{1 + p_x^i}, \qquad$ [Gleichung (38)]

findet man auf analoge Weise

$$p_x^{\overline{ai}} = {}'i_x \, p_x^i \cdot \frac{2 - {}'q_x^{\overline{aa}}}{1 + p_x^i}$$

und durch Einsetzen der entsprechenden Werte

$$q_y^v \, p_x^w \cdot \frac{1 + p_x^v}{1 + p_x^w},$$

was nach (12α) mit $p_{x[y]}^{\overline{vw}}$ übereinstimmt.

Der Vollständigkeit halber möge die Parallele auch noch auf die beiden Werte q_x^a und p_x^a ausgedehnt werden.

Es ist

$$\begin{aligned} q_x^a &= q_x^{\overline{aa}} + q_x^{\overline{ai}} \\ &= q_x^{\overline{aa}} + \frac{i_x \, q_x^i}{1 + p_x^i} \\ &= {}'q_x^{\overline{aa}} + \frac{{}'i_x (q_x^i - {}'q_x^{\overline{aa}})}{1 + p_x^i} \end{aligned} \tag{44}$$

und

$$\begin{aligned} p_x^a &= 1 - q_x^a \\ &= 1 - {}'q_x^{\overline{aa}} - \frac{{}'i_x (q_x^i - {}'q_x^{\overline{aa}})}{1 + p_x^i}. \end{aligned} \tag{45}$$

Mit Hülfe von (41) gehen (44) und (45) über in:

$$q_x^v + \frac{q_y^v (q_x^w - q_x^v)}{1 + q_x^w} \tag{46}$$

und

$$1 - q_x^v - \frac{q_y^v (q_x^w - q_x^v)}{1 + q_x^w}. \tag{47}$$

Diese Werte stehen aber in Übereinstimmung mit den in (37) und (36) gefundenen Resultaten, wenn man dort x und y miteinander vertauscht. Es entsprechen sich also q_x^a und $q_{x[y]}^v$ einerseits und p_x^a und $p_{x[y]}^v$ anderseits.

Eine Zusammenstellung sämtlicher Formeln wird dazu dienen, die Zusammenhangsverhältnisse noch deutlicher hervortreten zu lassen.

Zeuner - Küttner - Zimmermann Fundamentalgrössen: $i_x,\ q_x^{\overline{aa}},\ q_x^{i}.$	**Karup** Fundamentalgrössen: $'i_x,\ 'q_x^{\overline{aa}},\ q_x^{i}.$	**Unsere Werte** Fundamentalgrössen: $q_y^{v},\ q_x^{v},\ q_x^{w}.$
	$i_x = \frac{'i_x}{2}(1 + 'p_x^{\overline{aa}})$	$w_{x[y]} = q_{y[x]}^{\overline{vv}} = \frac{q_y^{v}}{2}(1 + p_x^{v})$
	$q_x^{\overline{aa}} = 'q_x^{\overline{aa}}\left(1 - \frac{'i_x}{2}\right)$	$q_{x[y]}^{\overline{vv}} = w_{y[x]} = q_x^{v}\left(1 - \frac{q_y^{v}}{2}\right)$
$p_x^{\overline{aa}} = 1 - q_x^{\overline{aa}} - i_x$	$p_x^{\overline{aa}} = (1 - 'i_x)(1 - 'q_x^{\overline{aa}})$	$p_{x[y]}^{\overline{vv}} = p_{y[x]}^{\overline{vv}} = (1 - q_y^{v})(1 - q_x^{v})$
$p_x^{\overline{ai}} = 2 \cdot \frac{i_x p_x^{i}}{1 + p_x^{i}}$	$p_x^{\overline{ai}} = 'i_x\, p_x^{i} \cdot \frac{1 + 'p_x^{\overline{aa}}}{1 + p_x^{i}}$	$p_{x[y]}^{\overline{vw}} = q_y^{v} \cdot p_x^{w} \cdot \frac{1 + p_x^{v}}{1 + p_x^{w}}$
$q_x^{\overline{ai}} = \frac{i_x\, q_x^{i}}{1 + p_x^{i}}$	$q_x^{\overline{ai}} = \frac{'i_x\, q_x^{i}}{2} \cdot \frac{1 + 'p_x^{\overline{aa}}}{1 + p_x^{i}}$	$q_{x[y]}^{\overline{vw}} = \frac{q_y^{v} \cdot q_x^{w}}{2} \cdot \frac{1 + p_x^{v}}{1 + p_x^{w}}$
$p_x^{a} = 1 - q_x^{\overline{aa}} - \frac{i_x q_x^{i}}{1 + p_x^{i}}$	$p_x^{a} = 1 - 'q_x^{\overline{aa}} - \frac{'i_x (q_x^{i} - 'q_x^{\overline{aa}})}{1 + p_x^{i}}$	$p_{x[y]}^{v} = 1 - q_x^{v} - \frac{q_y^{v}(q_x^{w} - q_x^{v})}{1 + p_x^{w}}$
$q_x^{a} = q_x^{\overline{aa}} + \frac{i_x\, q_x^{i}}{1 + p_x^{i}}$	$q_x^{a} = 'q_x^{\overline{aa}} + \frac{'i_x (q_x^{i} - 'q_x^{\overline{aa}})}{1 + p_x^{i}}$	$q_{x[y]}^{v} = q_x^{v} + \frac{q_y^{v}(q_x^{w} - q_x^{v})}{1 + p_x^{w}}$

Durch diese Ergebnisse erhalten die von Karup eingeführten „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten eine neue Stütze. Der Streit um ihre theoretische Berechtigung wird zu ihren Gunsten entschieden. Ob man, wo die Verhältnisse die Wahl freilassen, zum Zeuner-Zimmermannschen oder zum Karupschen Formelsystem greifen will, ist eine Frage, die nach den Besonderheiten des konkreten Falles zu entscheiden ist. Dabei wird auch dem praktischen Ermessen ein Einfluss auf die Entscheidung einzuräumen sein. Bei der Invaliditätsversicherung möchten wir schon der einfacheren Beziehungen wegen dem Zeuner-Zimmermannschen Formelsystem den Vorzug geben.

14. Sämtliche Beziehungen (10) bis (19), die Dr. Schaertlin in seiner genannten Arbeit entwickelt hat, lassen sich direkt auf unsern Fall übertragen, indem die Verwitwung einer Frau als ein Ereignis aufgefasst wird, das der Invalidierung eines Aktiven entspricht.

So gelten beispielsweise die folgenden Relationen:

$$q_{y[x]}^{\overline{vw}} = q_y - q_{y[x]}^{\overline{vv}} + \frac{l_y^{\overline{ww}}}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}} (q_y - q_y^w) \tag{48}$$

$$q_{y[x]}^{\overline{vw}} = q_y^w - q_{y[x]}^{\overline{vv}} - \frac{l_y}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}} (q_y^w - q_y) \tag{49}$$

$$p_{y[x]}^{\overline{vw}} = p_y^w - p_{y[x]}^{\overline{vv}} - \frac{l_y}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}} (p_y^w - p_y), \tag{50}$$

sowie auch die Beziehungen, die entstehen, wenn die diskontierten Zahlen der Lebenden eingeführt werden.

15. In Analogie zu μ_x^a, der Ausscheideintensität aus dem aktiven Zustande, definieren wir ferner:

$$\mu_{y[x]}^v = -\frac{1}{dy} \cdot \frac{dl_{y[x]}^{\overline{vv}}}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}}, \tag{51}$$

die Ausscheideintensität einer verheirateten Frau vom Alter y aus dem verheirateten Zustande, gleichgültig, ob das Ausscheiden durch Tod oder durch Verwitwung hervorgerufen wird.

Die Verwitwungsintensität einer $y$jährigen, verheirateten Frau ist offenbar gleich der Sterbeintensität des $x$jährigen, verheirateten Mannes, da in dem Augenblicke, in welchem der verheiratete Mann stirbt, die Frau Witwe wird. Ebenso ist auch die Verwitwungsintensität eines $x$jährigen Mannes gleich der Sterbeintensität der $y$jährigen Frau.

Nach (24) und (28) ist

$$p_{y[x]}^{\overline{vv}} + w_{x[y]} + w_{y[x]} = 1.$$

Diese Relation gilt auch für die unendlich kleine Zeit dy; daher wird sein:

$$(1 - \mu_{y[x]}^{v}\, dy) + \mu_{y}^{v}\, dy + \mu_{x}^{v}\, dy = 1. \qquad (52)$$

Somit

$$\mu_{y[x]}^{v} = \mu_{y}^{v} + \mu_{x}^{v}. \qquad (53)$$

Die Beziehung (53) rechtfertigt es, $\mu_{y[x]}^{v}$ als Auflösungsintensität des Ehepaares (x, y) zu bezeichnen. Sie gibt uns den Satz: Die Auflösungsintensität eines Ehepaares ist gleich der Summe der Sterbeintensitäten der beiden Ehegatten.

Durch Vertauschung der Indices geht (53) über in

$$\mu_{x[y]}^{v} = \mu_{x}^{v} + \mu_{y}^{v}, \qquad (54)$$

woraus

$$\mu_{x[y]}^{v} = \mu_{y[x]}^{v}. \qquad (55)$$

Es entsprechen den Werten der Invaliditätsversicherung

$$\mu_{x}^{i},\ \mu_{x}^{a},\ \mu_{x}^{\overline{aa}},\ r_{x}$$

unsere Werte

$$\mu_{y}^{w},\ \mu_{y[x]}^{v},\ \mu_{y}^{v},\ \mu_{x}^{v}$$

bezw.

$$\mu_{x}^{w},\ \mu_{x[y]}^{v},\ \mu_{x}^{v},\ \mu_{y}^{v}.$$

16. Aus den vorstehenden Entwicklungen und deren Zusammenhang mit der Invaliditätsversicherung geht hervor, dass sämtliche Beziehungen, die Dr. Schärtlin in bezug auf die Invaliditätsrenten und die Kapitalversicherung auf den Todes- und Invaliditätsfall (soweit sie sich auf ein Leben beziehen) aufgestellt hat, auch für unsern Fall Gültigkeit haben, wenn man nur dafür sorgt, dass die in jenen Formeln auftretenden Grössen durch die ihnen entsprechenden ersetzt werden. Es hat also die Arbeit von Dr. Schärtlin auch auf diesem Gebiete grundlegende Bedeutung.

17. Zum Schlusse seien noch die wichtigsten Rentenbarwerte für Witwenrenten angegeben.

a) Ganzjährige Renten.

Bedeutet

a_y der Barwert der nachschüssigen Leibrente für eine Frau der Gesamtheit,

a_y^w der Barwert der nachschüssigen Leibrente für eine Witwe,

$a_{y[x]}^{\overline{vv}}$ der Barwert der nachschüssigen Leibrente für eine verheiratete Frau, zahlbar so lange sie verheiratet ist,

$a_{y[x]}^{\overline{vw}}$ der Barwert der nachschüssigen Leibrente für eine verheiratete Frau, zahlbar, falls die Frau Witwe wird, erstmals beginnend zu Anfang des dem Verwitwungsjahre folgenden Jahres,

so ist

$$a_{y[x]}^{\overline{vw}} = a_y^w - a_{y[x]}^{\overline{vv}} - \frac{l_y}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}} (a_y^w - a_y). \qquad (56)$$

b) Unterjährige Renten.

$$a_{y[x]}^{\overset{(m)}{\overline{vw}}} = a_{y[x]}^{\overline{vw}} + \frac{m^2 - 1}{12 m^2} \mu_x^v. \qquad (57)$$

c) Kontinuierliche Renten.

$$a_{y[x]}^{\overline{vw}} = a_{y[x]}^{\overline{vw}} + \frac{1}{12}\,\mu_x^v. \tag{58}$$

d) Kapitalversicherung auf den Todes- und Verwitwungsfall.

Es sei

A_y der Barwert der Kapitalversicherung 1 für eine Frau der Gesamtheit,

A_y^w der Barwert der Kapitalversicherung 1 für eine Witwe,

$A_{y[x]}^{\overline{vv}}$ der Barwert der Leistung 1, wenn die Frau als verheiratet stirbt,

$A_{y[x]}^{\overline{vw}}$ der Barwert der Leistung 1 für eine verheiratete Frau, zahlbar, wenn diese, nachdem sie Witwe geworden, stirbt.

Dann ist

$$A_{y[x]}^{\overline{vw}} = A_y^w - A_{y[x]}^{\overline{vv}} - \frac{l_y}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}}\,(A_y^w - A_y) \tag{59}$$

und

$$\bar{A}_{y[x]}^{\overline{vw}} = \frac{i}{\delta}\,A_{y[x]}^{\overline{vw}}, \tag{60}$$

wo

$$\delta = \text{log. nat. } (1+i).$$

e) Vollständige Renten.

Stellt $\overset{(m)}{\breve{a}}{}_{y[x]}^{\overline{vw}}$ den Barwert der vollständigen, in Raten von $\frac{1}{m}$ zahlbaren Witwenrente einer verheirateten Frau *(y)* dar, wobei als erste Rente eine Rate im Verhältnis der Zeit von der Verwitwung bis zum Schlusse des Verwitwungsabschnittes gewährt wird, so ist

$$\overset{(m)}{\breve{a}}{}_{y[x]}^{\overline{vw}} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{y[x]}^{\overline{vw}}. \tag{61}$$

Bezeichnet man mit $\hat{\hat{a}}^{(m)}_{\overline{y[x]}}$ den Barwert einer in Raten zahlbaren, vollständigen Witwenrente, wobei die erste Rente $\frac{1}{m}$ eines Jahres nach der Verwitwung bezahlt werden soll, so ist

$$\hat{\hat{a}}^{(m)}_{\overline{y[x]}} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{\overline{y[x]}} + \frac{\delta}{12m^2} \left(\bar{A}_{\overline{y[x]}}\right). \qquad (62)$$

Dabei bedeutet $(A_{\overline{y[x]}})$ die einseitige Überlebens-Kapitalversicherung, zahlbar an die Frau (y) beim Tode des Mannes (x), und $(\bar{A}_{\overline{y[x]}})$ die einseitige Überlebens-Kapitalversicherung, bei welcher das versicherte Kapital statt am Schlusse des Jahres zur Zeit des Todes des Mannes bezahlt wird.

Es ist

$$(A_{\overline{y[x]}}) = \frac{v}{v^y \, l_{\overline{y[x]}}} \sum_{t=0}^{t=\infty} v^{y+t} \, l_{\overline{y+t[x+t]}} \, w_{y+t[x+t]}, \qquad (63)$$

und

$$(\bar{A}_{\overline{y[x]}}) = \frac{i}{\delta} \, (A_{\overline{y[x]}}), \qquad (64)$$

oder, nach dem Text Book [pag. 234, Formel Nr. 29], auch

$$(\bar{A}_{\overline{y[x]}}) = \mu_x^v \, \bar{a}_{\overline{y[x]}} + \frac{1}{2} \left(\bar{a}_{\overline{y[x-1]}} - \bar{a}_{\overline{y[x+1]}}\right). \qquad (65)$$

Als gute Annäherung für $\hat{\hat{a}}^{(m)}_{\overline{y[x]}}$ kann auch

$$\hat{\hat{a}}^{(m)}_{\overline{y[x]}} = \left(1 - \frac{\delta}{2m}\right) \bar{a}_{\overline{y[x]}} \qquad (66)$$

verwendet werden.

18. Wir kommen nun noch auf die Schlussbemerkung des Abschnittes 5 zurück, wonach die Wiederverheiratung des überlebenden Ehegatten vorerst ausgeschlossen war.

Wir berechneten die (unabhängige) Sterbenswahrscheinlichkeit eines $x$jährigen Witwers zu

$$q_x^w = \frac{T_x}{L_x - \frac{W_x}{2}},$$

wobei L_x die Zahl der Witwer des Alters x, T_x die Anzahl der Todesfälle während der Zeit x bis $x + 1$, und W_x die Zahl der während des Jahres durch Wiederverheiratung aus der Beobachtung ausscheidenden Witwer bedeutet.

Bezeichnet man die (unabhängige) Heiratswahrscheinlichkeit eines Witwers vom Alter x mit H_x^w, so ist

$$H_x^w = \frac{W_x}{L_x - \frac{T_x}{2}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, weder durch Tod noch durch Heirat auszuscheiden, also die Wahrscheinlichkeit, als *Witwer* zu *überleben,* ergibt sich zu

$$\mathrm{p}_x^w = (1 - q_x^w)\,(1 - H_x^w), \tag{67}$$

und die Ausscheidewahrscheinlichkeit eines $x$jährigen Witwers, erfolge das Ausscheiden durch Tod oder durch Heirat, wird

$$\mathrm{q}_x^w = 1 - \mathrm{p}_x^w.$$

Will man bei unseren früheren Betrachtungen die Möglichkeit der Wiederverheiratung zulassen, so hat man einfach an Stelle der l_x^w- und l_y^w-Tafeln Ausscheidetafeln für Witwer und Witwen zu setzen, bei

welchen die sich wiederverheiratenden Personen wie Gestorbene behandelt werden. Wir wollen diese Ausscheidetafeln mit l_x^w und l_y^w bezeichnen.

Es ist beispielsweise

$$\mathrm{l}_{y+n}^w = \mathrm{l}_{y+n-1}^w (1 - q_{y+n-1}^w)(1 - H_{y+n-1}^w),$$

oder nach (67)

$$\mathrm{l}_{y+n}^w = \mathrm{l}_{y+n-1}^w \, \mathrm{p}_{y+n-1}^w, \tag{69}$$

und der Barwert der nachschüssigen Rente, zahlbar an eine Witwe des Alters y und aufhörend mit dem Tode oder der Wiederverheiratung der Witwe,

$$a_y^w = \frac{1}{v^y \, \mathrm{l}_y^w} \sum_{t=o}^{t=\infty} v^{y+t+1} \, \mathrm{l}_{y+t+1}^w. \tag{70}$$

Ersetzen wir in unsern Entwicklungen (9α) bis (18β) überall l_x^w, p_x^w, q_x^w durch l_x^w, p_x^w, q_x^w, beziehungsweise l_y^w, p_y^w, q_y^w durch l_y^w, p_y^w, q_y^w, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeits- und Versicherungswerte, die das Heiraten des überlebenden Witwers (Witwe) wie das Ableben in Rechnung bringen.

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein mit einer $y$jährigen Frau verheirateter Mann (x) im nächsten Jahr Witwer wird und das Ende des Verwitwungsjahres als *Witwer* überlebt nach (12α)

$$\mathrm{p}_{x[y]}^{\overline{vw}} = q_y^v \cdot \mathrm{p}_x^w \cdot \frac{1 + p_x^v}{1 + \mathrm{p}_x^w}, \tag{71}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass ein $x$jähriger verheirateter Mann, dessen Frau das Alter y hat, im nächsten Jahre Witwer wird und hernach im Laufe des Verwitwungsjahres entweder stirbt oder wieder heiratet, nach (13α)

$$\mathrm{q}_{x[y]}^{\overline{vw}} = \frac{1}{2} q_y^v \cdot \mathrm{q}_x^w \cdot \frac{1 + p_x^v}{1 + \mathrm{p}_x^w}. \tag{72}$$

Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten (71) und (72) ergibt wegen (68) nach (14 α) wieder $w_{x[y]}$.

Die Verwitwungswahrscheinlichkeit $w_{x[y]}$ ist also unabhängig von der Wiederverheiratungs- und von der Sterbenswahrscheinlichkeit der Witwer.

Die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{q}^{\overline{vw}}_{x[y]}$ lässt sich in zwei Komponenten zerlegen, deren Bestimmung hier noch folgen mag.

Bezeichnet man mit $\mathrm{q}^{\overline{vw}:w}_{x[y]}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann des Alters x, der mit einer $y$jährigen Frau verheiratet ist, im nächsten Jahre Witwer wird und hernach im Laufe des Verwitwungsjahres als *Witwer stirbt,* so wird

$$\mathrm{q}^{\overline{vw}:w}_{x[y]} = \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{l^v_{x+t}}{l^v_x} \cdot \frac{l^v_{y+t}}{l^v_y} \mu^v_{y+t}\, dt \int\limits_{\tau=0}^{\tau=1-t} \frac{\mathrm{l}^w_{x+t+\tau}}{\mathrm{l}^w_{x+t}} \mu^w_{x+t+\tau}\, d\tau.$$

Unter der Annahme, dass

$$l^v_{y+t}\, \mu^v_{y+t} = l^v_y\, q^v_y$$

und

$$\mathrm{l}^w_{x+t+\tau}\, \mu^w_{x+t+\tau} = \mathrm{l}^w_x\, q^w_x \left(1 - \frac{H^w_x}{2}\right),$$

geht $\mathrm{q}^{\overline{vw}:w}_{x[y]}$ über in

$$\mathrm{q}^{\overline{vw}:w}_{x[y]} = q^v_y\, q^w_x\, \frac{\mathrm{l}^w_x}{l^v_x} \left(1 - \frac{H^w_x}{2}\right) \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{l^v_{x+t}}{\mathrm{l}^w_{x+t}}\, dt \int\limits_{\tau=0}^{\tau=1-t} d\tau.$$

Da ferner den obigen Annahmen entsprechend

$$l^v_{x+t} = l^v_x - t\,(l^v_x - l^v_{x+1})$$

und analog

$$\mathrm{l}^w_{x+t} = \mathrm{l}^w_x - t\,(\mathrm{l}^w_x - \mathrm{l}^w_{x+1})$$

gesetzt werden kann, wird

$$\mathrm{q}_{x[y]}^{\overline{vw}:w} = q_y^v\, q_x^w \left(1 - \frac{H_x^w}{2}\right) \int_{t=o}^{t=1} \frac{(1-\alpha t)}{(1-\beta t)} (1-t)\, dt, \quad (73)$$

wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \frac{l_x^v - l_{x+1}^v}{l_x^v} &= \alpha \\ \text{und} \qquad \frac{\mathrm{l}_x^w - \mathrm{l}_{x+1}^w}{\mathrm{l}_x^w} &= \beta \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

gesetzt worden ist.

Der Wert des Integrals auf der rechten Seite von (73) ergibt sich mit Hülfe der Substitution

$$\log (1-\beta) = -\frac{2\beta}{2-\beta}$$

nach gehöriger Reduktion zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{2-\alpha}{2-\beta}$, oder mit Berücksichtigung von (74) zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{1+p_x^v}{1+\mathrm{p}_y^w}$.

Somit ist

$$\mathrm{q}_{x[y]}^{\overline{vw}:w} = \frac{1}{2}\, q_y^v\, q_x^w \left(1 - \frac{H_x^w}{2}\right) \cdot \frac{1+p_x^v}{1+\mathrm{p}_x^w}. \quad (75)$$

Bedeutet $\mathrm{p}_{x[y]}^{\overline{vw}:v}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein $x$jähriger Mann, dessen Frau das Alter y hat, im nächsten Jahre Witwer wird und sich hernach im Laufe des Verwitwungsjahres wieder verheiratet, so ist

$$\mathrm{p}_{x[y]}^{\overline{vw}:v} = \int_{t=o}^{t=1} \frac{l_{x+t}^v}{l_x^v} \cdot \frac{l_{y+t}^v}{l_y^v}\, \mu_{y+t}^v\, dt \int_{\tau=o}^{\tau=1-t} \frac{\mathrm{l}_{x+t+\tau}^w}{\mathrm{l}_{x+t}^w}\, \eta_{x+t+\tau}^w\, d\tau,$$

wo $\eta_{x+t+\tau}^w$ die Heiratsintensität des $x+t+\tau$jährigen Witwers darstellt.

Setzt man

$$\mathrm{l}^{w}_{x+t+\tau}\,\eta^{w}_{x+t+\tau} = \mathrm{l}^{w}_{x}\,H^{w}_{x}\left(1 - \frac{q^{w}_{x}}{2}\right),$$

so wird analog wie vorher

$$\mathrm{p}^{\overline{vw}:v}_{x[y]} = q^{v}_{y}\,H^{w}_{x}\,\frac{\mathrm{l}^{w}_{x}}{l^{v}_{x}}\left(1 - \frac{q^{w}_{x}}{2}\right)\int\limits_{t=o}^{t=1}\frac{l^{v}_{x+t}}{\mathrm{l}^{w}_{x+t}}\,dt\int\limits_{\tau=o}^{\tau=1-t}d\tau,$$

und weiter

$$\mathrm{p}^{\overline{vw}:v}_{x[y]} = \frac{1}{2}\,q^{v}_{y}\,H^{w}_{x}\left(1 - \frac{q^{w}_{x}}{2}\right)\cdot\frac{1+p^{v}_{x}}{1+\mathrm{p}^{w}_{x}}. \qquad (76)$$

Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten (75) und (76) ergibt wieder (72), d. h. es ist

$$\mathrm{q}^{\overline{vw}}_{x[y]} = \mathrm{q}^{\overline{vw}:w}_{x[y]} + \mathrm{p}^{\overline{vw}:v}_{x[y]} \qquad (77)$$

Durch Vertauschen der Indices erhalten wir die betreffenden Wahrscheinlichkeiten für Frauen. Dabei ist dann allerdings vorausgesetzt, die Wahrscheinlichkeit, zu heiraten, sei bei der Witwe nur eine Funktion des Alters und nicht auch der Verwitwungsdauer, was für das erste Jahr des Witwenstandes zwar nicht zutrifft. Die kleine Inkongruenz darf aber ohne Bedenken in den Kauf genommen werden.

19. Entsprechend den Entwicklungen des Abschnittes 10 können wir nun mit Hülfe einer Ausscheidetafel l^{w}_{y} und der zugehörigen q^{w}_{y} und p^{w}_{y} aus einer Gruppe von $l^{\overline{vv}}_{y[x]}$ verheirateten Frauen die Reihen der überlebenden Ehepaare $l^{\overline{vv}}_{y[x]}$ und der Witwen $\mathrm{l}^{\overline{ww}}_{y}$ herleiten, wobei wieder die Reihe der Gesamtheit der Überlebenden durch die Relation

$$\mathrm{l}_{n} = l^{\overline{vv}}_{n} + \mathrm{l}^{\overline{ww}}_{n}$$

bestimmt wird.

Für die Versicherungswerte, welche sich aus diesen drei Reihen herleiten, gelten die gleichen Beziehungen wie die in der zitierten Abhandlung von Dr. G. Schaertlin für Aktive und Invalide abgeleiteten.

Handelt es sich beispielsweise um die Ermittlung des Barwertes der Witwenrente, zahlbar an *(y)* nach dem Ableben von *(x)*, wobei die Rentenzahlung mit dem Tode oder der Wiederverheiratung der Witwe aufhören soll, so ergibt sich dieser Barwert zu

$$a_{y[x]}^{\overline{vw}} = \frac{v}{v^y \, l_{y[x]}^{\overline{vv}}} \sum_{t=0}^{t=\infty} v^{y+t+1} \, p_{y+t,x+t]}^{\overline{vw}} \left(1 + a_{y+t+1}^{w}\right), \quad (78)$$

oder, in anderer Schreibweise, zu

$$a_{y[x]}^{\overline{vw}} = a_y^w - a_{y[x]}^{\overline{vv}} - \frac{l_y}{l_{y[x]}^{\overline{vv}}} \left(a_y^w - a_y\right). \quad (79)$$

Der Barwert der kontinuierlichen Witwenrente ist

$$\bar{a}_{y[x]}^{\overline{vw}} = a_{y[x]}^{\overline{vw}} + \frac{1}{12} \mu_x^v. \quad (80)$$

Zürich, im September 1907.