**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 3 (1908)

**Artikel:** Zur mechanischen Ausgleichung

**Autor:** Zalai, Friedrich

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-967414

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Zur mechanischen Ausgleichung.

Von **Friedrich Zalai.**

Unter den Ausgleichungsmethoden hat sich in der letzten Zeit besonders der mechanischen das wissenschaftliche Interesse zugewendet, wie die zahlreichen auf diesem Gebiete in den letzten Jahren veröffentlichten Arbeiten beweisen.

Das Problem der *mechanischen Ausgleichung* lässt sich im wesentlichen darauf zurückführen, dass eine gegebene Funktion ($Z$) durch eine andere ebenfalls willkürlich vorgegebene Funktion ($Y$) dargestellt wird. Im nachfolgenden soll nun auf elementarem Wege gezeigt werden, wie eine gegebene Funktion sich linear homogen und symmetrisch durch eine Reihe von Funktionswerten einer anderen ausdrücken lässt.

§ 1. Von der Funktion $Y_{(x)}$ seien nur die Funktionswerte in den äquidistanten Punkten $x$, $x+1$, $x+2$, .... und $x-1$, $x-2$, .... gegeben, und in diesen Punkten sei $Y_{(x)}$ als Funktion vom $n$-ten Grad des Argumentes entwickelbar:

$$Y_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n \qquad (1)$$

worin die Koeffizienten reelle oder komplexe Konstante sein können.

Es sei nun die Funktion $Z$ linear, homogen und symmetrisch in den Funktionswerten von $y$ für die gegebenen Punkte $x$ darzustellen:

$$Z_{(x)} = 2\,A_0\,Y_{(x)} + A_1\,[Y_{(x-1)} + Y_{(x+1)}] + A_2\,[Y_{(x-2)} + Y_{(x+2)}] + \ldots + A_p\,[Y_{(x-p)} + Y_{(x+p)}] \qquad (2)$$

Unsere Aufgabe bestehe darin, die Koeffizienten $A$ unter gewissen Bedingungen zu bestimmen.

§ 2. Es bezeichne $\triangle, \triangle^2 \ldots \triangle^\varrho$ die erste, zweite .... $\varrho$-te Differenz einer Reihe in aufsteigender Richtung, und $\triangle_1, \triangle_1^2, \ldots \triangle_1^\varrho$ entsprechend in fallender Richtung, so dass

$$\begin{aligned}
\triangle\, Y_{(x)} &= Y_{(x+1)} - Y_{(x)} \\
\triangle^2\, Y_{(x)} &= \triangle\, Y_{(x+1)} - \triangle\, Y_{(x)} \\
&\vdots \\
\triangle^\varrho\, Y_{(x)} &= \triangle^{\varrho-1}\, Y_{(x+1)} - \triangle^{\varrho-1}\, Y_{(x)} \\
&\text{und} \qquad\qquad\qquad\qquad (3) \\
\triangle_1\, Y_{(x)} &= Y_{(x-1)} - Y_{(x)} \\
\triangle_1^2\, Y_{(x)} &= \triangle_1\, Y_{(x-1)} - \triangle_1\, Y_{(x)} \\
&\vdots \\
\triangle_1^\varrho\, Y_{(x)} &= \triangle_1^{\varrho-1}\, Y_{(x-1)} - \triangle_1^{\varrho-1}\, Y_{(x)}
\end{aligned}$$

§ 3. *Stellung der Aufgabe:* Es sind die Koeffizienten $A_0, A_1 \ldots . A_p$ unter der Bedingung zu bestimmen, dass eine gewisse Anzahl $n - \varrho + 1$ der endlichen Differenzen von $Y_{(x)}$ und $Z_{(x)}$ von der höchsten Differenz an gezählt identisch für die Werte des Argumentes einander gleich seien, d. h.:

$$\begin{aligned}
\triangle^n\, Z_{(x)} &= \triangle^n\, Y_{(x)} \\
\triangle^{n-1}\, Z_{(x)} &= \triangle^{n-1}\, Y_{(x)} \qquad (4) \\
&\vdots \\
\triangle^\varrho\, Z_{(x)} &= \triangle^\varrho\, Y_{(x)}
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir, dass, wenn die $\varrho$-ten Differenzen der beiden Reihen in allen Werten des Argumentes einander gleich sind, auch alle Differenzen höherer Ordnung einander gleich sein müssen, so reduzieren sich die Bedingungen (4) darauf, dass

$$\triangle^{\varrho} Z_{(x)} = \triangle^{\varrho} Y_{(x)} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

§ 4. Zur Durchführung unserer Aufgabe benötigen wir einiger Hilfssätze, die wir im folgenden ableiten.

Zunächst müssen wir $\triangle^{\varrho} x^s$ bestimmen:

$$\triangle^{\varrho} x^s = (x+\varrho)^s - \binom{\varrho}{1}(x+\overline{\varrho-1})^s + \binom{\varrho}{2}(x+\overline{\varrho-2})^s - \ldots\ldots + (-1)^{\varrho}\binom{\varrho}{\varrho} x^s \quad (5)$$

oder nach Durchführung der Potenzierungen und Vereinigung der Glieder mit gleicher Potenz in $x$:

$$\triangle^{\varrho} x^s = x^s\left[\binom{\varrho}{0} - \binom{\varrho}{1} + \binom{\varrho}{2} - \ldots (-1)^{\varrho}\binom{\varrho}{\varrho}\right] + \binom{s}{1} x^{s-1} \left[\binom{\varrho}{0}\varrho - \binom{\varrho}{1}\overline{\varrho-1} + \ldots (-1)^{\varrho}\binom{\varrho}{\varrho}\overline{\varrho-\varrho}\right] + \ldots\ldots + \binom{s}{s}\left[\binom{\varrho}{0}\varrho^s - \ldots (-1)^{\varrho}\binom{\varrho}{\varrho}\overline{\varrho-\varrho}^s\right] \quad (6)$$

Setzt man in Gleichung (5)

$$x = 0,$$

so erhält man

$$\triangle^{\varrho} 0^s = \varrho^s - \binom{\varrho}{1}(\varrho-1)^s + \binom{\varrho}{2}(\varrho-2)^s + \ldots\ldots + (-1)^{\varrho}\binom{\varrho}{\varrho}(\varrho-\varrho)^s \quad (7)$$

$\triangle^{\varrho} 0^s$, die $\varrho$-te Differenz der $s$-ten Potenzen der natürlichen Zahlenreihe, die mit 0 beginnt, stellt den Koeffizienten des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung (6) dar.

Unter Benützung des durch Gleichung (7) definierten Symbols nimmt die Gleichung (6) die Form an:

$$\triangle^{\varrho}\, x^{s} = \binom{s}{\varrho} x^{s-\varrho} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho} + \binom{s}{\varrho+1} x^{s-\overline{\varrho+1}} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+1} + \ldots + \binom{s}{s} \triangle^{\varrho}\, 0^{s} \tag{8}$$

weil wegen $\triangle^{\varrho}\, x^{\mu} = 0$ für $\mu < \varrho$ alle vorausgehenden Glieder wegfallen.

Ganz analog erhält man:

$$\triangle_1^{\varrho}\, x^{s} = (-1)^{\varrho} \binom{s}{\varrho} x^{s-\varrho} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho} + (-1)^{\varrho+1} \binom{s}{\varrho+1} x^{s-\overline{\varrho+1}} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+1} + \ldots + (-1)^{s} \binom{s}{s} \triangle^{\varrho}\, 0^{s} \tag{8*}$$

§ 5. Entwickelt man jetzt

$$\triangle^{\varrho}\, Y_{(x)} = a_{\varrho} \triangle^{\varrho}\, x^{\varrho} + a_{\varrho+1} \triangle^{\varrho}\, x^{\varrho+1} + \ldots + a_n \triangle^{\varrho}\, x^{n}$$

und verwendet die Beziehungen (8), so ergibt sich

$$\triangle^{\varrho}\, Y_{(x)} = \overset{n-\varrho}{\underset{0}{\Sigma^{\mu}}}\, a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+\mu} + x \overset{n-\varrho}{\underset{1}{\Sigma^{\mu}}}\, a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-1} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+\mu-1} + \ldots + x^{n-\varrho} \overset{n-\varrho}{\underset{n-\varrho}{\Sigma^{\mu}}}\, a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \tag{9}$$

und analog:

$$\triangle_1^{\varrho}\, Y_{(x)} = \overset{n-\varrho}{\underset{0}{\Sigma^{\mu}}}\, (-1)^{\varrho+\mu} a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+\mu} + x \overset{n-\varrho}{\underset{1}{\Sigma^{\mu}}}\, (-1)^{\varrho+\mu-1} a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-1} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+\mu-1} + \ldots + x^{n-\varrho} \overset{n-\varrho}{\underset{n-\varrho}{\Sigma^{\mu}}}\, (-1)^{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \triangle^{\varrho}\, 0^{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \tag{9*}$$

Der Kürze halber bezeichnen wir mit

$B^{\lambda}_{\varrho}$ die Koeffizienten in der Entwicklung von $\triangle^{\varrho} Y_{(x)}$

$\mathrm{B}^{\lambda}_{\varrho}$ diejenigen in der Entwicklung von $\triangle^{\varrho}_{1} Y_{(x)}$

so dass

$$B^{\lambda}_{\varrho} = \overset{n-\varrho}{\underset{\lambda}{\Sigma^{\mu}}} \; a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \triangle^{\varrho} 0^{\varrho+\mu-\lambda}, \qquad (10)$$

$$\mathrm{B}^{\lambda}_{\varrho} = \overset{n-\varrho}{\underset{\lambda}{\Sigma^{\mu}}} \; (-1)^{\varrho+\mu-\lambda} \, a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \triangle^{\varrho} 0^{\varrho+\mu-\lambda} \qquad (10^{*})$$

Dadurch werden

$$\triangle^{\varrho} Y_{(x)} = B_{\varrho} + B^{1}_{\varrho} x + B^{2}_{\varrho} x^{2} + \ldots + B^{\lambda}_{\varrho} x^{\lambda} + \ldots$$
$$+ B^{n-\varrho}_{\varrho} x^{n-\varrho} \qquad (11)$$

$$\triangle^{\varrho}_{1} Y_{(x)} = \mathrm{B}_{\varrho} + \mathrm{B}^{1}_{\varrho} x + \mathrm{B}^{2}_{\varrho} x^{2} + \ldots + \mathrm{B}^{\lambda}_{\varrho} x^{\lambda} + \ldots$$
$$+ \mathrm{B}^{n-\varrho}_{\varrho} x^{n-\varrho} \qquad (11^{*})$$

und die Summen der Differenzen gleicher Ordnung

$$\triangle^{\varrho} Y_{(x)} + \triangle^{\varrho}_{1} Y_{(x)} = (B_{\varrho} + \mathrm{B}_{\varrho}) + x\,(B^{1}_{\varrho} + \mathrm{B}^{1}_{\varrho}) + \ldots$$
$$+ x^{\lambda}\,(B^{\lambda}_{\varrho} + \mathrm{B}^{\lambda}_{\varrho}) + \ldots + x^{n-\varrho}$$
$$(B^{n-\varrho}_{\varrho} + \mathrm{B}^{n-\varrho}_{\varrho})$$
$$= C^{\varrho} + C^{\varrho}_{1} x + \ldots + C^{\varrho}_{\lambda} x^{\lambda} + \ldots$$
$$+ C^{\varrho}_{n-\varrho} x^{n-\varrho} \qquad (12)$$

worin

$$C_\lambda^\varrho = B_\varrho^\lambda + \mathrm{B}_\varrho^\lambda = \sum_\lambda^{n-\varrho}{}^\mu \; a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \triangle^\varrho \, 0^{\varrho+\mu-\lambda}$$
$$[1 + (-1)^{\varrho+\mu-\lambda}].$$

§ 6. Unter Benützung der Identitäten:

$$Y_{(x+\mu)} = Y_{(x)} + \binom{\mu}{1} \triangle Y_{(x)} + \binom{\mu}{2} \triangle^2 Y_{(x)} + \ldots$$
$$+ \binom{\mu}{n} \triangle^n Y_{(x)} \tag{13}$$

$$Y_{(x-\mu)} = Y_{(x)} + \binom{\mu}{1} \triangle_1 Y_{(x)} + \binom{\mu}{2} \triangle_1^2 Y_{(x)} + \ldots$$
$$+ \binom{\mu}{n} \triangle_1^n Y_{(x)} \tag{13*}$$

geht ferner die Gleichung (2) über in

$$Z_{(x)} = 2\, Y_{(x)} \sum_0^p{}^\mu A_\mu + (\triangle Y_{(x)} + \triangle_1 Y_{(x)}) \sum_1^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{1}$$
$$+ \ldots + (\triangle^p Y_{(x)} + \triangle_1^p Y_{(x)}) \sum_p^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{p} \tag{14}$$

Infolge von (12) wird jetzt (14), wenn wir setzen:

$$2\, Y_{(x)} = 2\, [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n] = C_0^0 + C_1^0 x$$
$$+ C_2^0 x^2 + \ldots + C_n^0 x^n,$$

gleich:

$$Z_{(x)} = \sum_0^p{}^\mu A_\mu (C_0^0 + C_1^0 x + \ldots + C_n^0 x^n) +$$
$$+ \sum_1^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{1} (C_0^1 + C_1^1 x + \ldots + C_{n-1}^1 x^{n-1}) +$$
$$+ \ldots\ldots$$
$$+ \sum_p^p{}^\mu A_p \binom{\mu}{p} (C_0^p + C_1^p x + \ldots + C_{n-p}^p x^{n-p}) =$$

$$= \sum_{0}^{p}{}^{\eta} C_0^{\eta} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} + x \sum_{0}^{p}{}^{\eta} C_1^{\eta} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} + x^2 \sum_{0}^{p}{}^{\eta} C_2^{\eta} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} + \ldots + x^{\lambda} \sum_{0}^{p}{}^{\eta} C_\lambda^{\eta} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} \ldots + x^{n-p} \sum_{0}^{p}{}^{\eta} C_{n-p}^{\eta} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} + \ldots + x^{n} \sum_{0}^{0}{}^{\eta} C_n^{\eta} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} \qquad (15)$$

Dadurch haben wir eine Entwicklung von $Z_{(x)}$ nach Potenzen von $x$ gefunden,

$$Z_{(x)} = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots + D_\lambda x^\lambda + \ldots D_{n-p} x^{n-p} + D_{n-p+1} x^{n-p+1} + \ldots + D_n x^n \qquad (16)$$

worin

$$D_\lambda = \sum_{0}^{p-k}{}^{\eta} C_\lambda^{\eta} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta}, \quad \begin{cases} k = 0 \text{ für } \lambda \leqq n-p \\ k = \lambda - n + p \text{ für } \lambda > n-p \end{cases}$$

die der Gestalt nach mit (1) übereinstimmt. Daher hat auch $\triangle^{\varrho} Z_{(x)}$ dieselbe Gestalt wie $\triangle^{\varrho} Y_{(x)}$ und wir erhalten jenen Wert, wenn wir in $\triangle^{\varrho} Y_{(x)}$ die Koeffizienten $a_\lambda$ durch $D_\lambda$ ersetzen (siehe Gleichung 9):

$$\triangle^{\varrho} Z_{(x)} = \sum_{0}^{n-\varrho}{}^{\mu} D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu} \triangle^{\varrho} 0^{\varrho+\mu} + x \sum_{1}^{n-\varrho}{}^{\mu} D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-1} \triangle^{\varrho} 0^{\varrho+\mu-1} + \ldots + x^{\lambda} \sum_{\lambda}^{n-\varrho}{}^{\mu} D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \triangle^{\varrho} 0^{\varrho+\mu-\lambda} + \ldots + x^{n-\varrho} \sum_{n-\varrho}^{n-\varrho}{}^{\mu} D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-n-\varrho} \triangle^{\varrho} 0^{\varrho+\mu-n-\varrho} \qquad (17)$$

$$= \mathfrak{A}_\varrho^{0} + \mathfrak{A}_\varrho^{1} x + \ldots + \mathfrak{A}_\varrho^{\lambda} x^{\lambda} + \ldots + \mathfrak{A}_\varrho^{n-\varrho} x^{n-\varrho} \qquad (18)$$

§ 7. Greifen wir nun auf die in § 3 gestellte Aufgabe zurück, so muss die Gleichung ($\alpha$) für alle Punkte $x$, $x+1$, $x+2, \ldots x-1$, $x-2, \ldots$ erfüllt sein. Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (18) und (11) ergeben sich die $n-\varrho+1$ Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
B_\varrho^0 &= \mathfrak{B}_\varrho^0 \\
B_\varrho^1 &= \mathfrak{B}_\varrho^1 \\
&\ldots\ldots \\
B_\varrho^\lambda &= \mathfrak{B}_\varrho^\lambda \\
&\ldots\ldots \\
B_\varrho^{n-\varrho} &= \mathfrak{B}_\varrho^{n-\varrho}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Führt man die angezeigten Operationen wirklich durch, so liefert dies das Gleichungssystem

$$
\begin{gathered}
a_\varrho \binom{\varrho}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + a_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho+1} \triangle^\varrho 0^{\varrho+1} + \ldots + a_n \binom{n}{n} \triangle^\varrho 0^n = D_\varrho \binom{\varrho}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + D_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho+1} \triangle^\varrho 0^{\varrho+1} + \ldots \\
+ D_n \binom{n}{n} \triangle^\varrho 0^n \\[1em]
a_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + \ldots + a_n \binom{n}{n-1} \triangle^\varrho 0^{n-1} = D_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + \ldots + D_n \binom{n}{n-1} \triangle^\varrho 0^{n-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n \binom{n}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho = D_n \binom{n}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho
\end{gathered}
\tag{20}
$$

und geben wir in diesen Gleichungen der Reihe nach den $\varrho$ die Werte

$$n, n-1, \ldots n-\varrho^1+1$$

so sieht man nach einigen Transformationen, dass

$$\begin{aligned} D_n &= a_n \\ D_{n-1} &= a_{n-1} \\ &\cdots\cdots \\ D_\varrho &= a_\varrho \end{aligned} \tag{21}$$

sein muss, wodurch die in § 3 aufgestellte Behauptung ihre algebraische Bestätigung findet, dass die Aufgabe gelöst ist, wenn die $n - \varrho + 1$ Bedingungen (4) erfüllt sind.

§ 8. Nun ist

$$D_n = \sum_0^0{}^\eta C_n^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta}$$

oder entwickelt:

$$D_n = a_n \binom{n}{0} 0^0 [1 + (-1)^0] \{A_0 + A_1 + \ldots + A_p\}$$

$$= 2a_n (A_0 + A_1 + \ldots + A_p) \tag{22}$$

Da aber auch (Gleichung 21)

$$D_n = a_n$$

so ergibt sich als Bedingungsgleichung dafür, dass die Differenzen $n$-ter Ordnung gleich sind:

$$2(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_p) = 1 \tag{23}$$

Durch rekursives Verfahren lässt sich für $D_{n-1}$ der Wert

$$D_{n-1} = 2a_{n-1} (A_0 + A_1 + \ldots + A_p) \tag{24}$$

finden, und da auch (Gleichung 21)

$$D_{n-1} = a_{n-1}$$

erhalten wir dieselbe Bedingungsgleichung

$$2(A_0 + A_1 + \ldots + A_p) = 1 \tag{23}$$

§ 9. Allgemein ergibt sich (für $2r < p$ nach § 6)

$$D_{n-2r} = \sum_0^{2r} {}^{\eta}\, C^{\eta}_{n-2r} \sum_{\eta}^{p} {}^{\mu}\, A_{\mu} \binom{\mu}{\eta}$$

und nach einigen Transformationen

$$D_{n-2r} = 2a_{n-2r} \binom{n-2r}{0} \sum_0^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{0} + 2a_{n-2r+2} \binom{n-2r+2}{2} \left[\triangle\, 0^2 \sum_1^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{1} + \triangle^2\, 0^2 \sum_2^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{2}\right] + \ldots + 2a_n \binom{n}{2r} \left[\triangle\, 0^{2r} \sum_1^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{1} + \ldots + \triangle^{2r}\, 0^{2r} \sum_{2r}^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{2r}\right] \quad (25)$$

Setzen wir

$$M^p_{2r} = \triangle\, 0^{2r} \sum_1^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{1} + \triangle^2\, 0^{2r} \sum_2^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{2} + \ldots + \triangle^{2r}\, 0^{2r} \sum_{2r}^p {}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{2r} \quad (26)$$

und berücksichtigen wir, dass

$$\triangle^{\varphi}\, 0^{2r} = \varphi^{2r} - \binom{\varphi}{1} (\varphi-1)^{2r} + \binom{\varphi}{2} (\varphi-2)^{2r} - \ldots \pm \binom{\varphi}{\varphi} 0^{2r} \quad (27)$$

so wird nach einigen Umformungen:

$$M^p_{2r} = A_1 + \left[\binom{2}{1} \triangle\, 0^{2r} + \binom{2}{2} \triangle^2\, 0^{2r}\right] A_2 + \ldots + \left[\binom{p}{1} \triangle\, 0^{2r} + \binom{p}{2} \triangle^2\, 0^{2r} + \ldots + \binom{p}{2r} \triangle^{2r}\, 0^{2r}\right] A_p \quad (28)$$

und wegen

$$\binom{p}{0} \triangle^0\, 0^n + \binom{p}{1} \triangle\, 0^n + \binom{p}{2} \triangle^2\, 0^n + \ldots + \binom{p}{n} \triangle^p\, 0^n = p^n \quad (29)$$

ist

$$M^p_{2r} = A_1 + 2^{2r} A_2 + 3^{2r} A_3 + \ldots + p^{2r} A_p \quad (30)$$

Führt man nun (30) in (25) ein, so wird

$$D_{n-2r} = 2a_{n-2r}\binom{n-2r}{0} M_0^p + 2a_{n-2r+2}\binom{n-2r+2}{2}$$

$$M_2^p + \ldots + 2a_n \binom{n}{2r} M_{2r}^p \tag{31}$$

und da auch

$$D_{n-2r} = a_{n-2r} \tag{32}$$

ist, so gelangt man durch das rekursive Verfahren des § 8 zum Bedingungssystem

$$\begin{aligned} M_0^p &= \frac{1}{2} \\ M_2^p &= 0 \\ &\ldots \\ M_{2r}^p &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

oder wegen (30):

$$\begin{aligned} 2(A_0 + A_1 + \ldots + A_p) &= 1 \\ A_1 + 2^2 A_2 + \ldots + p^2 A_p &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 + 2^{2r} A_2 + \ldots + p^{2r} A_p &= 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Dieses System von $r+1$ Gleichungen mit $p+1$ Unbekannten ist eindeutig lösbar für $p = r$. Ist $p > r$, so gibt es unendlich viele Lösungen, die Aufgabe ist im allgemeinen, wenn nicht noch andere Bedingungen hinzutreten, nicht eindeutig lösbar. Ist endlich $p < r$ so lassen sich beliebige $p+1$ Gleichungen unter den vorliegenden $r+1$ herausgreifen: für diese erhält man eine eindeutige Lösung, die auch für alle übrigen Gleichungen gilt, nur wenn alle Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} A_0 - \frac{1}{2} & A_1 & A_2 & \ldots & A_p \\ 0 & A_1 & 2^2 A_2 & \ldots & p^2 A_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & A_1 & 2^{2r} A_2 & \ldots & p^{2r} A_p \end{matrix} \right\| \tag{35}$$

verschwinden. (Spezieller Fall des § 11).

§ 10. Die Gleichungen (34) stellen die Bedingungen dafür dar, dass alle Differenzen von der $n$-ten bis zur $n$-$2r$-ten unverändert bleiben, wenn mit Gleichung (1) die durch Gleichung (2) verlangte Transformation vorgenommen wird.

Es soll nun gezeigt werden, dass dieselben Bedingungsgleichungen Geltung behalten, wenn auch noch die $n$-$2r$-1-ten Differenzen der beiden Funktionen $Y_{(x)}$ und $Z_{(x)}$ identisch gleich sein sollen.

Es ist

$$D_{n-2r-1} = \sum_0^{2r+1}{}^{\eta}\, C^{\eta}_{n-2r-1} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{\eta} = \tag{36}$$

$$= C^0_{n-2r-1} \sum_0^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{0} + C^1_{n-2r-1} \sum_1^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{1} + \ldots.$$

$$+ C^{2r+1}_{n-2r-1} \sum_{2r+1}^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{\eta} \tag{37}$$

$$= 2\, a_{n-2r-1} \binom{n-2r-1}{0} \sum_0^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{0} + 2\, a_{n-2r+1}$$

$$\binom{n-2r+1}{2} \triangle\, 0^2 \sum_1^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{1} + \ldots + 2\, a_{n-1} \binom{n-1}{2r}$$

$$\triangle\, 0^{2r} \sum_1^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{1}$$

$$+ 2\, a_{n-2r+1} \binom{n-2r+1}{2} \triangle^2\, 0^2 \sum_2^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{2} + \ldots.$$

$$+ 2\, a_{n-1} \binom{n-1}{2r} \triangle^2\, 0^{2r} \sum_2^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ 2\, a_{n-1} \binom{n-1}{2r} \triangle^{2r}\, 0^{2r} \sum_{2r}^{p}{}^{\mu} A_{\mu} \binom{\mu}{2r} \tag{38}$$

und analog wie in § 9, erhält man

$$D_{n-2r-1} = 2\, a_{n-2r-1} \binom{n-2r-1}{0} M_0^p + 2\, a_{n-2r+1} \binom{n-2r+1}{2} M_2^p + \ldots + 2\, a_{n-1} \binom{n-1}{2r} M_{2r}^p \quad (39)$$

und da

$$D_{n-2r-1} = a_{n-2r-1}$$

sein muss, so ergeben sich wieder die früheren Bedingungsgleichungen (33) und (34), was zu beweisen war.

§ 11. Setzen wir $n - 2r = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, d. h., suchen wir die notwendigen Bedingungen dafür, dass die Differenzen aller Ordnungen der beiden Funktionen $Y_{(x)}$ und $Z_{(x)}$ gleich werden, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\,(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_p) &= 1 \\ A_1 + 2^2 A_2 + \ldots + p^2 A_p &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 + 2^{2k} A_2 + \ldots + p^{2k} A_p &= 0 \end{aligned} \quad (40^*)$$

worin $k$ die ganze der beiden Zahlen $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ ist.

Da eine Funktion vom Grade $\begin{cases} 2k \\ 2k+1 \end{cases}$ auch $\begin{cases} 2k \\ 2k+1 \end{cases}$ Differenzen hat, so zeigt dieses Gleichungssystem, dass sich Funktionen $Y_{(x)}$ beliebiger Ordnung auf die durch Gleichung (2) bedingte Weise reproduzieren lassen.

---

* Zum selben Gleichungssystem gelangt auch *Landré* in Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch XXII. „Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums". Den „Versuch einer allgemeinen Theorie der mechanischen Ausgleichungsmethoden" unternimmt *Altenburger* im Februarheft des 3. Bandes der Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten. 1907.

§ 12. Man kann aber auch $Z_{(x)}$ durch $Y_{(x)}$ und die Ableitungen dieser Funktion darstellen, wenn man die in den vorausgehenden Paragraphen gefundenen Resultate verwertet[1]). Drückt man in (16) die $D_\lambda$ durch die $M_\lambda^p$ aus den Gleichungen (31) und (39) aus so ist

$$
\begin{aligned}
Z_{(x)} = {} & 2M_0^p \left[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0\right] \\
& + 2M_2^p \left[\binom{n}{2} a_n x^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_{n-1} x^{n-3} + \ldots \right. \\
& \left. + \binom{n-2r+1}{2} a_{n-2r+2} x^{n-2r} + \ldots + \binom{2}{2} a_2 \right] + \ldots \\
& + 2M_{2r}^p \left[\binom{n}{2r} a_n x^{n-2r} + \binom{n-1}{2r} a_{n-1} x^{n-2r-1} + \ldots \right. \\
& \left. + \binom{2r}{2r} a_{2r} \right] + \ldots
\end{aligned} \tag{41}
$$

und daher

$$
\begin{aligned}
Z_{(x)} = {} & 2M_0^p Y_{(x)} + 2M_2^p \frac{1}{2!} Y_{(x)}^{\mathrm{II}} + 2M_4^p \frac{1}{4!} Y_{(x)}^{\mathrm{IV}} + \ldots \\
& + 2M_{2r}^p \frac{1}{(2r)!} Y_{(x)}^{(2r)} + \ldots + 2M_{2t}^p \frac{1}{(2t)!} Y_{(x)}^{(2t)}
\end{aligned} \tag{42}
$$

worin $t$ die ganze der beiden Zahlen $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ ist.

Da die Bedingungsgleichungen die Gestalt haben

$$M_0^p = \frac{1}{2} \quad M_2^p = M_4^p = \ldots = M_{2r}^p = 0$$

so ist

$$
\begin{aligned}
Z_{(x)} = {} & Y_{(x)} + 2M_{2r+2}^p \frac{1}{(2r+2)!} Y_{(x)}^{(2r+2)} + \ldots + 2M_{2t}^p \\
& \frac{1}{(2t)!} Y_{(x)}^{(2t)}
\end{aligned} \tag{43}
$$

[1]) Dabei ist vorausgesetzt, das $Y_{(x)}$ differenzierbar ist. Doch gilt die Formel auch allgemein, man muss nur unter $Y^{(2r)}(x)$ die entsprechenden Koeffizienten verstehen:

$$(2r)! \left[\binom{n}{2r} a_n x^{n-2r} + \binom{n-1}{2r} a_{n-1} x^{n-2r-1} + \ldots + \binom{2r}{2r} a_{2r}\right]$$

Diese Gleichung sagt aus, das $Z_{(x)}$ vom selben Grade wie $Y_{(x)}$ ist und dass die Abweichungen sich durch eine parabolische Kurve darstellen lassen, welche vom Grad $n—2r—2$ ist.

Führt man Gleichung (43) mit Hilfe von (30) über in

$$Z_{(x)} = Y_{(x)} + 2\left[A_1\left\{\frac{Y_{(x)}^{(2r+2)}}{(2r+2)!} + \frac{Y_{(x)}^{(2r+4)}}{(2r+4)!} + \dots + \frac{Y_{(x)}^{(n)}}{n!}\right\} + \dots + A_p\left\{\frac{p^{2r+2}}{(2r+2)!}\, Y_{(x)}^{(2r+2)} + \dots + \frac{p^n}{n!}\, Y_{(x)}^{(n)}\right\}\right] \tag{44}$$

und wenn man mit

$$\varphi_{(x,\,p)}^{(2r+2)} = \frac{p^{2r+2}}{(2r+2)!}\, Y_{(x)}^{(2r+2)} + \dots \frac{p^n}{n!}\, Y_{(x)}^{(n)};\ n = 2k \tag{45}$$

bezeichnet, so vereinfacht sich die Schreibweise von (43) in

$$Z_{(x)} = Y_{(x)} + 2\left[A_1\, \varphi_{(x,\,1)}^{(2r+2)} + A_2\, \varphi_{(x,\,2)}^{(2r+2)} + \dots + A_p\, \varphi_{(x,\,p)}^{(2r+2)}\right] \tag{46}$$

Der Fehler, der durch Einsetzung von $Z_{(x)}$ an Stelle von $Y_{(x)}$ ensteht, ist durch die Differenz

$$\left|Y_{(x)} - Z_{(x)}\right| = 2\left[A_1\, \varphi_{(x,\,1)}^{(2r+2)} + A_2\, \varphi_{(x,\,2)}^{(2r+2)} + \dots + A_p\, \varphi_{(x,\,p)}^{(2r+2)}\right] \tag{47}$$

gegeben.

§ 13. Verwendet man die Bezeichungsweise des letzten Paragraphen und nimmt für die Gleichung (43)

$$n = 2r + 2$$

so ist

$$Y_{(x)} - Z_{(x)} = 2M_n^p\, \frac{1}{n!}\, Y_{(x)}^{(n)} = 2M_n^p\, \frac{n!}{n!}\, a_n = 2M_n^p\, a_n \tag{48}$$

d. h.: Wenn man eine Funktion $Y_{(x)}$ vom Grade $2r+2$ in der Weise in eine andere $Z_{(x)}$ überführt, dass die Differenzen bis auf die $2r+2te$ unverändert bleiben, so unterscheiden sich die Werte der neuen Funktion von denen der alten um einen konstanten Wert: d. h. es erfolgt eine parallele Transformation.

Ist

$$n = 2r + 3$$

so ist

$$Y_{(x)} - Z_{(x)} = 2M_{n-1}^{p} \frac{1}{n!} Y_{(x)}^{(n)} = 2M_{n-1}^{p} \frac{1}{n!} \left[(n+1)!\, a_{n+1}\right.$$
$$\left. x + n!\, a_n\right] = 2M_{n-1}^{p} \left[(n+1)\, a_{n+1}\, x + a_n\right] \tag{49}$$

Es erfolgt eine parabolische Transformation.

Ist $Y_{(x)}$ als Potenzreihe gegeben, d. h. ist

$$n = \infty,$$
$$Y_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

so erscheint auch $Z_{(x)}$ in dieser Form:

$$Z_{(x)} = 2M_0^p\, Y_{(x)} + 2M_2^p\, Y_{(x)}^{\mathrm{II}} + \ldots + 2M_{2r}^p\, Y_{(x)}^{(2r)} + \ldots \tag{50}$$

§ 14. Man kann die Aufgabe noch dahin erweitern, dass zu den früher aufgestellten Bedingungen die hinzugefügt wird, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird:

$$[(Y - Z)^2] = \text{Minimum}$$

oder

$$\left[4\left[A_1\, \Psi_{(x,\,1)}^{(2n+r)} + A_2\, \Psi_{(x,\,2)}^{(2n+r)} + \ldots + A_p\, \Psi_{(x,\,p)}^{(2n+r)}\right]^2\right]$$
$$= [X^2] = \text{Minimum}. \tag{51}$$

Es ist daher die Aufgabe zu lösen:

$$[X^2] + k_0\, N_0^p + k_2\, M_2^p + k_4\, M_4^p + \ldots + k_{2r}\, M_{2r}^p$$
$$= \text{Minimum} \tag{52}$$

$$N_0^p = M_0^p - \frac{1}{2}$$

d. h. es muss

$$\frac{d\,[X^2]}{d\,A_0} + k_0 \frac{d\,N_0^p}{d\,A_0} + k_2 \frac{d\,M_2^p}{d\,A_0} + \ldots k_{2r} \frac{d\,M_{2r}^p}{d\,A_0} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (53)$$

$$\frac{d\,[X^2]}{d\,A_p} + k_0 \frac{d\,N_0^p}{d\,A_p} + k_2 \frac{d\,M_2^p}{d\,A_p} + \ldots k_{2r} \frac{d\,M_{2r}^p}{d\,A_p} = 0$$

und nach durchgeführter Differenziation

$$2X\,\psi_{(x,\,1)}^{(2n+r)} + \frac{k_0}{2} = 0$$

$$2X\,\psi_{(x,\,2)}^{(2n+r)} + \frac{k_0}{2} + k_2 + \ldots + k_{2r} = 0$$

$$2X\,\psi_{(x,\,3)}^{(2n+r)} + \frac{k_0}{2} + k_2\,2^2 + \ldots + k_{2r}\,2^{2r} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (54)$$

$$2X\,\psi_{(x,\,p)}^{(2n+r)} + \frac{k_0}{2} + k_2\,p^2 + \ldots + k_{2r}\,p^{2r} = 0$$

Diese Gleichungen liefern eine eindeutige Lösung für die Werte der Koeffizienten $A_1 \ldots A_p$, als Funktionen der $k$, deren Anzahl $r + 1$ ist. Führt man diese in Gleichung (52) ein, so erhält man die $k$ Werte, die, in (54) eingeführt, die endgültigen Werte der $A_1 \ldots A_p$ bestimmen.

Diese Aufgabe soll lediglich zeigen, wie die vorliegenden Entwicklungen sich praktisch verwerten lassen. Daher wurde auch der leichteren Durchführbarkeit halber davon abgesehen, für die einzelnen Abweichungen verschiedene Gewichte zu verwenden, was bei einer strengen Durchführung der Aufgabe erforderlich wäre [1]).

[1]) Auf die Bedeutung der Gewichte hat insbesondere *Graf* in Heft 1 (1904) der Versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungs-

§ 15. Die Gleichung (16) zeigt, dass bei Wiederholung des Verfahrens, indem man $Z$ ebenso behandelt wie $Y$, immer wieder Resultate von der Form der Gleichung (16) erhalten werden, worin die Koeffizienten $D^s_\lambda$, nach $s$-maliger Iteration, analog aufgebaut sind wie die $D_\lambda$.

§ 16. In den vorausgehenden Untersuchungen wurden die Voraussetzungen auf ein möglichst geringes Ausmass eingeschränkt. Wesentlich ist nur die Forderung, dass die behandelten Funktionen endliche Differenzen besitzen, d. h. also, dass sie innerhalb des Intervalls keine unendlichen Sprünge machen. Die Behandlung der Aufgabe könnte noch in der Richtung eine Verallgemeinerung erfahren, dass man von der Bedingung der Homogenität, der Symmetrie und der Äquidistanz der gegebenen Funktionswerte absieht, wodurch natürlich die Durchführbarkeit der Aufgabe keinen Abbruch erlitte, wohl aber eine bedeutend höhere Komplikation der Formeln einträte.

---

anstalten unter „Eine vorteilhafte Methode zur Ausgleichung von Sterbe-Beobachtungen nach der Gomperz-Makehamschen Formel“ hingewiesen.