

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern
Band: 24 (1967)

Artikel: Von Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen : Jakob Steiners Untersuchungen über das Schneiden und Berühren von Kugelkreisen : aus dem bernischen Nachlass kurz zusammengefasst und kommentiert
Autor: Jegher, Barbara / Hadwiger, H. / Fladt, K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319547>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Barbara Jegher

Von Kreisen, die in einerlei Kugelfläche liegen

Jakob Steiners

Untersuchungen über das Schneiden und Berühren von Kugelkreisen
Aus dem bernischen Nachlaß kurz zusammengefaßt und kommentiert

Inhaltsverzeichnis

Vorbericht (H. Hadwiger)	3
Zum Geleit (K. Fladt)	4
Einleitung (B. Jegher)	4
Hauptteil (J. Steiner / B. Jegher)	8

Vorbericht

Mit dem vorliegenden Beitrag zu den Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern wird die seit längerer Zeit von verschiedenen Fachleuten des In- und Auslandes, insbesondere aber von Herrn Kuno Fladt, Honorarprofessor an der Universität Freiburg im Breisgau, befürwortete Veröffentlichung der im Jahre 1963 von der Verfasserin, Fräulein Barbara Jegher, als Kandidatin des höheren Lehramtes an der Universität Bern ausgefertigte Diplomschrift verwirklicht. Es handelt sich um eine Ergänzung zur wissenschaftsgeschichtlichen Würdigung des Schaffens des schweizerischen Mathematikers Jakob Steiner, der, aus Utzenstorf im Kanton Bern stammend, als einer der bedeutendsten Geometer seiner Zeit und als Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften Weltruf erlangte. — Die Drucklegung der Jegherschen Schrift wurde durch eine Subvention ermöglicht, welche uns das Direktorium der Papierfabrik Utzenstorf anlässlich des 75jährigen Bestehens in großmütiger Weise zuerkannt hat. Wir sprechen Herrn Direktor W. Hirt, Utzenstorf, hierfür unsern herzlichen Dank aus!

Mathematisches Institut der Universität Bern, im August 1967

H. Hadwiger

Zum Geleit

Nach dem Erscheinen des von den Herren F. Gonseth und R. Fueter 1931 aus dem Nachlaß Jakob Steiners herausgegebenen, so lange verschollen gewesenen Werkes «Allgemeine Theorie des Berührens und Schneidens der Kreise und der Kugeln» fiel es meinem verewigten väterlichen Freunde Paul Zühlke (1. Juli 1877 bis 18. März 1957, Oberschulrat i. R. und Honorarprofessor der mathematischen Didaktik an der Universität Marburg) sofort auf, daß in ihr ein letztes Kapitel fehle. Ein kurzer Aufenthalt 1932 in Bern bestätigte ihm dies und es gelang ihm, Entwürfe zu dem fehlenden V. Teile über die Kreise auf der Kugeloberfläche aufzufinden. Leider kam er nicht mehr dazu, die Redaktion selbst in die Hand zu nehmen. Er hinterließ mir die Absicht dazu. Doch erkannte ich bald, daß, um sie durchzuführen, ein längerer Aufenthalt in oder in der Nähe von Bern nötig wäre, und ich war sehr erfreut, daß es Herrn H. Hadwiger gelang, Fräulein Barbara Jegher dafür zu gewinnen, die es nun trotz aller handschriftlichen und sachlichen Schwierigkeiten fertig brachte, aus den vielen handschriftlichen Blättern Steiners etwas Ganzes herauszuziehen und in einer leicht lesbaren Gestalt darzustellen. Es ist nun kein Zweifel, daß es eine Pflicht nicht sowohl gegen den großen Geometer Jakob Steiner, sondern auch gegenüber der «synthetischen» oder «reinen» Geometrie ist, das nachgelassene Kreis- und Kugelwerk so vollständig wie möglich zugänglich zu machen, auch gerade weil diese Geometrie augenblicklich nicht «in der Mode» ist und Anschauungsgenies wie Jakob Steiner nicht gefragt sind, indem man in der Mathematik nicht formal und abstrakt genug vorzugehen liebt.

Daher ist auch den Persönlichkeiten, welche die Herausgabe der Jegherschen Arbeit ermöglicht haben, der besondere Dank derjenigen auszusprechen, denen die Geometrie auch heute noch am Herzen liegt. Sehr wünschenswert wäre es freilich, wenn sich auch noch jemand fände, der die vielen im Steinerschen Nachlaß befindlichen geometrischen Aufgaben ordnen und in möglichst leicht zugänglicher Form herausgeben würde.

Freiburg i. Br. / Calw, im Mai 1967

Kuno Fladt

Einleitung

Im Jahre 1931 erschien im Orell-Füßli-Verlag in Zürich das von Jakob Steiner als druckfertiges Manuskript hinterlassene, in den Jahren 1825/26 entstandene Werk «Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln». Im Vorwort erwähnen die Herausgeber F. GONSETH und R. FUETER (beide Zürich), daß Steiner ursprünglich seine Untersuchung auch auf die Kreise

der Kugelfläche ausdehnen wollte. P. ZÜHLKE (Kassel) vermutete, daß Steiner auch diesen V. Teil in Angriff genommen habe und reiste 1932 zur Abklärung dieser Frage nach Bern. 1960 äußerte auch K. FLADT (Freiburg im Breisgau) den Wunsch, diesen Teil zu finden und veröffentlichen zu lassen. Da sich dies von Bern aus besser bewerkstelligen ließ, kam es dazu, daß ich mich auf Anregung von H. HADWIGER (Bern) im Jahre 1963 mit dem Archiv befaßte.

Es mag in diesem Zusammenhang aufschlußreich erscheinen, etwas über die Geschichte von Steiners Manuskripten zu erfahren.

Nach Steiners Tod am 1. April 1863 in Bern kam sein Nachlaß an die Bernische Naturforschende Gesellschaft. Die Manuskripte wurden in einer Kiste im Estrich der Berner Stadtbibliothek untergebracht und fielen dem Staub und der Vergessenheit anheim. Kurz vor der Jahrhundertwende entriß sie F. BÜTZBERGER (Zürich) ihrem Dornröschenschlaf. Er ordnete den größeren Teil der Schriften und faßte ihn in Büchern und Mappen zusammen. Daneben schrieb er eine hundertseitige Biographie über Steiner. In einer zweiten, kleineren Biographie geht Bützberger auch auf Geschichte und Bestand des erwähnten Nachlasses ein. Am 12. September 1930 wurde das Steiner-Archiv mit Sitz in Bern gegründet. Das mit seiner Verwaltung betraute Steiner-Komitee erfüllte seine Aufgabe in verdienstvoller Weise im wesentlichen dadurch, daß es das anfangs zitierte Werk über Kreise und Kugeln publizierte.

Eine weitere Serie von Manuskripten befand sich in der Hand von C. F. GEISER (Zürich), einem Großneffen Steiners. Diese sind heute in der Handschriftenabteilung der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich untergebracht und bestehen hauptsächlich aus Vorarbeiten und Redaktionsentwürfen zu Abhandlungen, die noch zu Steiners Lebzeiten im Druck erschienen. Im großen und ganzen müssen wir uns heute mit der Tatsache abfinden, daß viele von Steiners Werken, vor allem aus seiner spätern Schaffensperiode, für immer verloren sind.

Das Steiner-Archiv in Bern enthält neben einigen persönlichen Gegenständen die zu zehn Bänden zusammengebundenen Studienhefte aus Iferten und Heidelberg. Ebenfalls in Mappen gefaßt sind der vierte und fünfte Entwurf zum Werk «Über das Berühren und Schneiden von Kreisen und Kugeln». Einige Pakete enthalten Vorlesungen über Trigonometrie, Stereometrie und analytische Geometrie, die so verwittert sind, daß sich die Seiten nicht mehr voneinander lösen lassen.

Meine Untersuchungen konzentrierten sich nun auf eine Serie von etwa dreihundert vergilbten und schlecht geschriebenen Blättern. Steiner schrieb eine eher unleserliche deutsche Kursivschrift und hielt sich – was die Entzifferung weiter erschwerte – auch nicht an die geläufigsten Regeln der Orthographie. Viele Wörter schrieb er so gekürzt, daß beinahe jeder zweite Buchstabe fehlt. Wir dürfen es ihm nicht verargen, durfte er doch erst fünfzehnjährig mit dem Schreibenlernen beginnen, nachdem er den Katechismus fehlerfrei aufsagen konnte. Diesen Nachteil verspürte er Zeit seines Lebens.

Eine Übersicht wurde auch dadurch erschwert, daß Steiner oft das gleiche Blatt für ganz verschiedene Dinge benützte. Einzelne Sätze wurden über Kon-

struktionen hinweggeschrieben. In jede zweite Ecke kamen ein paar Berechnungen, dazwischen wieder Schönschreibe- und Zierschriftübungen anhand von Bibelziten und Ortsnamen. Einzelne Blätter sind über und über mit dem Mädchenamen Emilie – oft von einer ganzen Serie feingezogener Kreise umrahmt – bedeckt. Auch einzelne, in den Text eingestreute Zwischenrufe wie «zum Teufel ist das schwer» oder «es ist nicht einfach genug», kennzeichnen das Bild Steiners in menschlicher Beziehung trefflich.

Unter den erwähnten Blättern fanden sich etwa deren fünfzig mit Lösungen zu elementaren Aufgaben, an die sechzig aus der Schulzeit in Iferten (zur Hälfte Freihand- und technische Zeichnungen), dreißig mit Notizen zu Berechnungen aus der Analysis, einige Dutzend mit Konstruktionen, leider ohne jede textliche Ergänzung. Schließlich blieben mir noch über hundert Blätter, die alle von Kreisen und Kugeln handelten. Einige davon waren mit den verschiedensten Zahlen numeriert. Aber auch so gelang es mir nur mühsam, vierzehn mit arabischen Zahlen numerierte Blätter im Format von 22 auf 36 cm zusammenzustellen, die sich inhaltlich mit Kugelkreisen befassen und deren Numerierung und Paragraphierung an das von Fueter und Gonseth herausgegebene Werk anschließt. Das erste Blatt trägt außerdem das Datum 7. September 1826, womit auch der zeitliche Zusammenhang gewahrt ist. Blatt 1 beginnt mit § 41; Blatt 14 ist nicht zur Hälfte beschrieben. Der Text bricht am Schluß eines Abschnittes ab. Man darf somit annehmen, daß Steiner nicht daran weiterarbeitete. Die Rückseiten der Blätter sind zum Teil ebenfalls beschrieben. Unter den römischen Seitenzahlen I bis XII stellte Steiner – parallel zur Theorie – Aufgaben zur Geometrie der Kugelkreise zusammen.

Was sich hier zusammenfand, war keineswegs druckfertig (im Gegensatz zu den Manuskripten, die zur Herausgabe der ersten vier Teile zur Verfügung standen). Steiner, der seine Werke unzählige Male überarbeitete, ehe er sie zur Veröffentlichung freigab, wäre kaum mit einer wörtlichen Wiedergabe dieses V. Teils einverstanden gewesen. Ich habe deshalb bei der Bearbeitung des Textes einen Kompromiß geschlossen. Die Numerierung habe ich beibehalten wie auch viele Ausdrücke, die sich vielleicht nur bei Steiner finden, aber treffend und praktisch sind. Andere sind modernisiert. Der Textteil ist rigoros gekürzt. Sätze, die inhaltlich das gleiche enthalten (wer den ersten Teil gelesen hat, weiß, wie Steiner jeden Satz immer noch umkehrt und in andern Formulierungen ausspricht!), wurden zu einem einzigen zusammengefaßt; komplizierte und schwerfällige Redewendungen vereinfacht. Der besseren Lesbarkeit wegen sind die Sätze auch nicht streng mathematisch nach Voraussetzung und Behauptung getrennt. Aus demselben Grund spreche ich, wie es übrigens Steiner durchwegs tut, meist nur von Kreisen statt von Kugel- oder sphärischen Kreisen. Daneben habe ich versucht, die grundlegenden Eigenschaften der Steinerschen Geometrie zu übernehmen. Steiner gibt sich weder mit Existenzfragen ab, noch definiert er alle Begriffe, die er verwendet, genau. Seine Geometrie ist ausgesprochen deduktiv. Ein Satz folgt aus dem andern, man erlebt mit dem großen Geometer, wie sich Gedanke auf Gedanke aufbaut,

und — das einzige, das die Kürzung leider nicht mehr zum Ausdruck bringen kann — man staunt immer wieder über das räumliche Vorstellungsvermögen des bernischen Bauernsohnes. Steiner sieht plastisch vor sich, wie zwei Kugelscharen sich gegenseitig nach bestimmten Vorschriften schneiden; wie alle diese Kugeln zudem eine Grundkugel rechtwinklig schneiden, und er leitet aus diesem Bild Eigenschaften für die Durchschnittskreise ab.

Die der Theorie beigegebenen ausführlichen Anmerkungen enthalten: typisch Steinersche Gedankengänge und Bemerkungen; Hinweise auf Paragraphen des schon herausgegebenen Werkes, die Steiner alle offen ließ; Beweise, die teils von Steiner selbst stammen, teils — wo es mir nötig schien — von mir im Sinne Steiners geführt wurden. Manche Unkorrektheiten und Fehler habe ich stillschweigend verbessert; hie und da steht dazu eine Anmerkung.

§ 44 habe ich weggelassen. Inhaltlich bringt er im Hinblick auf die 57 Aufgaben, die Steiner im Anschluß an die früheren Paragraphen stellt, noch einmal zusammenfassende Wiederholungen der Theorie. Steiner gedachte den ganzen Paragraphen sauber geordnet aufzubauen. In drei Abteilungen sollten folgende Themata behandelt werden:

A. Aufgaben über Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitslinien und über das rechtwinklig und im Durchmesser Schneiden der Kreise.

B. Aufgaben über das Berühren der Kreise.

C. Aufgaben über das Schneiden unter beliebigem Winkel.

Innerhalb einer Abteilung sind die Aufgaben meist nach steigender Zahl (bis zu sechs) der gegebenen Kreise geordnet. Es ist nicht verwunderlich, daß Steiner — bei der Fülle der möglichen Aufgaben — diese Ordnung bei der ersten Niederschrift bald durcheinandergeriet; um so mehr als sich manche seiner Aufgaben zwei oder gar allen drei Abteilungen zuordnen lassen. Steiner merkte dies wohl selbst, denn die Ausführung wird gegen den Schluß hin immer mehr stichwortartig. Wurden am Anfang zu jeder Aufgabe noch mehrere (bis vier) verschiedene, teils durch sphärische, teils durch räumliche Konstruktionen erzielte Lösungen ausführlich beschrieben, so sind am Schlusse selbst die Aufgaben nur noch andeutungsweise formuliert. Es wäre eine andere, in ihrer Art nicht minder reizvolle Arbeit, diese Aufgaben zu ordnen, zu ergänzen und — zusammen mit den Zeichnungen, die bei Steiner durchwegs fehlen — zu lösen.

So möchte ich denn diese kleine Schrift einer weiteren Leserschaft bekanntmachen, nicht ohne der Hoffnung Ausdruck zu verleihen, daß sie bei manchem, der der reinen Geometrie in seinem Herzen einen Platz bewahrt hat, geneigte Aufnahme finden möge!

V. Abschnitt

§ 41 ¹

Die folgenden Sätze lassen sich einerseits durch Konstruktionen, die nicht auf die Kugelfläche beschränkt sind, entwickeln oder aber durch rein sphärische Überlegungen beweisen. Im ersten Fall lassen sie sich teils durch die stereographische Projektion ² aus den entsprechenden Sätzen über ebene Kreise, teils, insbesondere für das Schneiden der Kugelschnitte, aus denen über Kugeln im Raum ³ ableiten. Es werden hier nur Untersuchungen angestellt, welche ohne Rechnung und verwickelte Beweise aus dem vorhergehenden folgen ^{4, 5}.

§ 42

1. Bei jedem sphärischen Kreis lassen sich drei Mittelpunkte unterscheiden (Abb. 1, siehe Seite 9):

- a) Der wahre ⁶ Mittelpunkt m in der Kreisebene.
- b) Der sphärische Mittelpunkt μ auf der Fläche der Grundkugel K (im kleineren Segment), Pol genannt.

Die Paragraphenhinweise beziehen sich auf das schon erschienene Werk «Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln» oder auf die vorliegende Theorie.

¹ In diesem Paragraphen zeigt sich deutlich, daß der vorliegende Abschnitt noch keineswegs druckreif war. An drei verschiedenen Stellen des Blattes läßt sich in etwas abweichender Formulierung das gleiche lesen.

² Steiner erwähnt hierzu in Klammern den Mathematiker Lambert. J.H. Lambert gab 1772 ein Werk über stereographische und allgemeine Kartenprojektionen heraus. Steiner kommt in den nächsten beiden Paragraphen nie mehr auf diese stereographische Projektion zurück. Im Archiv findet sich ein stark verwittertes Manuskript über die «stereographische Projektion». Es trägt die Daten 25.—30. 10. 26 und bringt auf einem Dutzend gehefteter Seiten eine kurze Einführung in die stereographische Projektion, sowie einige Anwendungen auf Sätze der sphärischen Kreisgeometrie.

³ Der entsprechende Hilfssatz folgt in § 43.

⁴ Steiner erwähnt, daß er hierher gehörende Sätze, die sich auf trigonometrische Funktionen beziehen, in einem Abschnitt VI bringen wolle. Dieser ist nirgends zu finden. Daß er überhaupt in Angriff genommen wurde, möchte ich in Anbetracht dessen, daß Steiner algebraische Formeln möglichst vermied (seine Werke weisen kaum je eine Formel, geschweige denn eine Berechnung auf), eher bezweifeln.

⁵ Mitten in diesem Paragraphen finden sich die Worte: «NEWTON, das größte und glücklichste Genie.» Vielleicht darf ich an dieser Stelle eine Parallele aus dem Leben der beiden großen Denker erwähnen. Beide durften sich in ihrer Jugend nur im Versteckten mit der geliebten Wissenschaft beschäftigen; Newton, während er den Diener allein zu Markte ziehen ließ, Steiner unter einem alten Baum, den er später seiner Nichte mit den Worten zeigte: «Hier versteckte ich mich, um zu lernen, weil ich zu Hause nicht durfte.»

⁶ «Wahr» bezieht sich immer auf die Ebene des Kreises, «sphärisch» auf Gebilde der Kugelfläche.

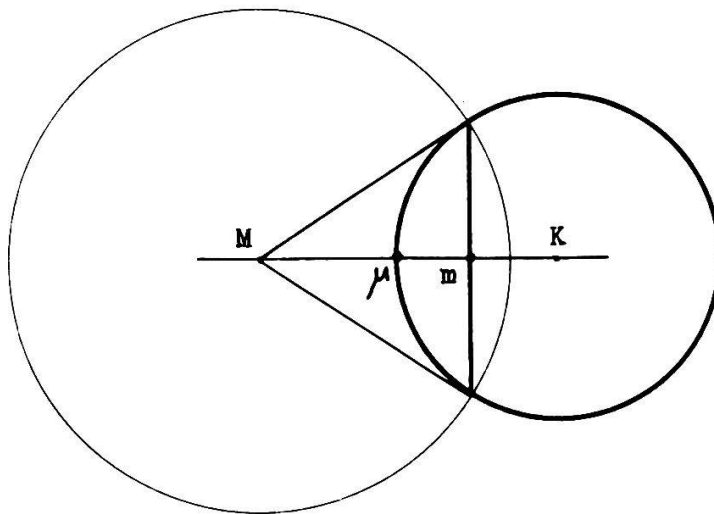


Abb. 1 (siehe S. 8)

c) Der äußere Mittelpunkt M als Scheitel des Kegels, der die Grundkugel im betreffenden Kreis berührt, und als Mittelpunkt der Kugel, welche K im gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet ⁷.

Alle drei Mittelpunkte liegen auf einer zur Kreisebene senkrechten Geraden durch den Mittelpunkt der Grundkugel.

Ein sphärischer Kreis ist sowohl durch seinen äußeren als auch durch seinen wahren Mittelpunkt bestimmt ⁸.

2. Zwei Kugelkreise μ_1 und μ_2 liegen in zwei Kegeln ⁹. Ihre Scheitel nennen wir wahre Ähnlichkeitspunkte der Kreise. Ihre Radialprojektionen auf den nächstliegenden Punkt der Sphäre heißen sphärische Ähnlichkeitspunkte (ι , α) ¹⁰. Die wahren (bzw. sphärischen) Ähnlichkeitspunkte liegen in der wahren Achse $M_1 M_2$ (bzw. sphärischen Achse) der Kreise (Abb. 2, siehe S. 10). Gemeinsame Tangenten an die gegebenen Kreise schneiden sich in einem der wahren Ähnlichkeitspunkte. Berühren sich die zwei Kreise, so fällt in ihrem Berührungspunkt der wahre mit dem zugehörigen sphärischen Ähnlichkeitspunkt zusammen.

⁷ m und μ stehen oft auch abkürzungsweise für den Kreis selbst, sowie M für die Kugel, deren Zentren sie sind. Entsprechende Ausdrücke werden später auf eine Reihe anderer Linien und Punkte angewandt.

⁸ Diese Bemerkung steht bei Steiner erst am Schluß von § 42.

⁹ Nach § 21. 4, 5. liegen zwei Kugelkreise μ_1 und μ_2 in zwei Kegeln, deren Scheitel die Ähnlichkeitspunkte der Kugeln M_1 und M_2 sind.

¹⁰ Der sphärische Ähnlichkeitspunkt kann auch bei auseinander liegenden Kreisen im Innern des einen liegen, nämlich dann, wenn die Kreise nicht auf der gleichen Hemisphäre der Grundkugel liegen. In diesem Falle existieren auch die zugehörigen sphärischen Tangenten nicht.

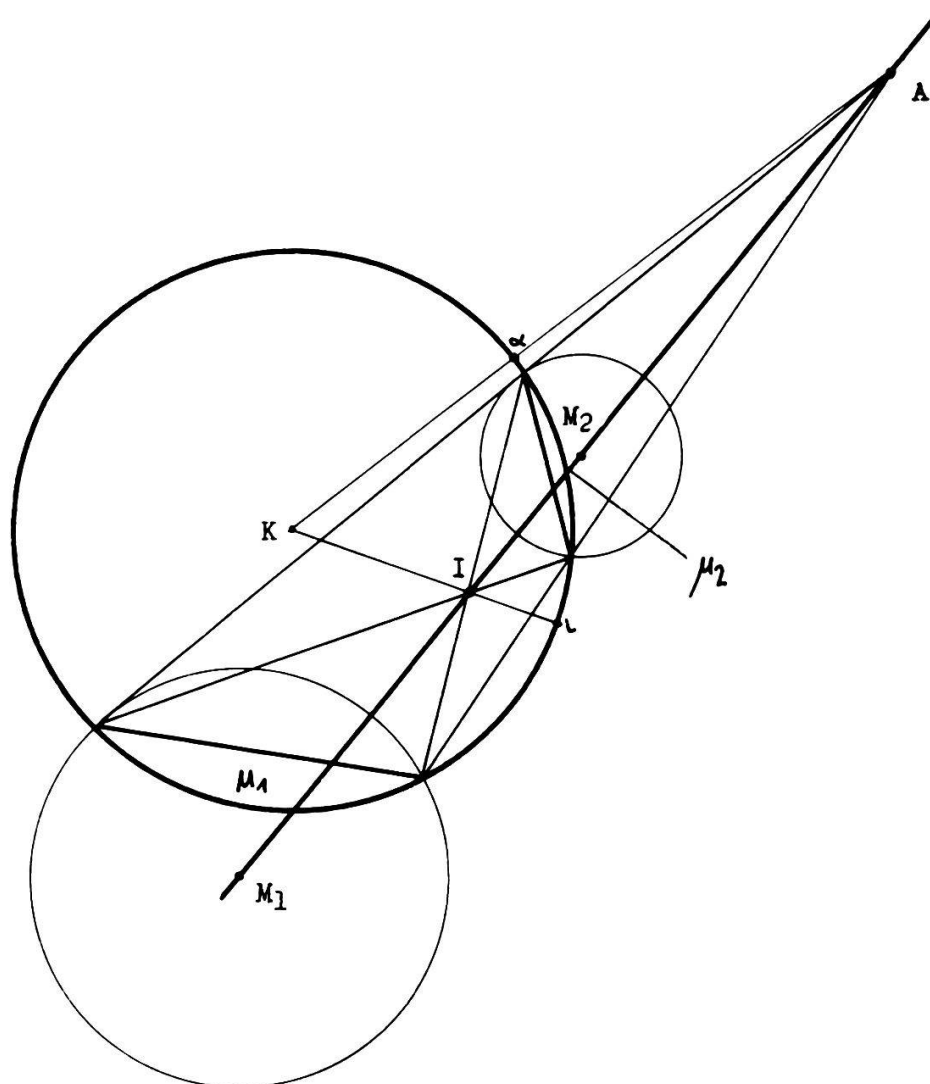


Abb. 2 (siehe S. 9)

3. Zu drei gegebenen Kugelkreisen gehören sechs wahre Ähnlichkeitspunkte¹¹. Diese liegen zusammen mit den äußern Mittelpunkten der Kreise in einer Ebene, und zwar viermal drei auf einer Geraden (nämlich die drei äußern und je ein äußerer mit den beiden nicht zugehörigen innern). Dementsprechend liegen die sechs sphärischen Ähnlichkeitspunkte mit den Polen auf vier Hauptkreisen.

Werden zwei Kugelkreise von einem dritten berührt, so liegen die Berührungspunkte zusammen mit einem ihrer sphärischen Ähnlichkeitspunkte¹² in einem Hauptkreis. Zieht man also durch einen sphärischen Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise einen Hauptkreis, der diese schneidet, so können sie in den Schnittpunkten von einem dritten Kugelkreis berührt werden. Umgekehrt kann man durch Konstruktion beliebiger Berührungskreise die sphärischen Ähnlichkeitspunkte finden.

¹¹ Es sind dies die Ähnlichkeitspunkte der Kugeln M_1 , M_2 und M_3 . Daraus folgen auch ihre Eigenschaften. Siehe § 5.

¹² Nach Steiner sollen die Berührungspunkte mit beiden Ähnlichkeitspunkten in einem Hauptkreis liegen — er dürfte sich verschreiben haben.

4.¹³ Von den zwölf Ähnlichkeitspunkten, die zu vier gegebenen Kugeln gehören, liegen je sechs in einer der acht Ähnlichkeitsebenen, und zwar:

a) Die sechs äußern in der äußern Ähnlichkeitsebene $\sim e(1234,)$ ¹⁴.

b) Die drei äußern mit den drei nicht zugehörigen innern in den vier gemischten Ähnlichkeitsebenen $\sim e(123,4), \sim e(124,3), \sim e(134,2), \sim e(234,1)$.

c) Die zwei äußern der zu Paaren genommenen Kreise mit den vier innern der Kreise aus verschiedenen Paaren in den drei innern Ähnlichkeitsebenen $\sim e(12,34), \sim e(13,24), \sim e(14,23)$.

Berührt ein Kugelnkreis drei gegebene, so liegen die Berührungspunkte mit einer Ähnlichkeitslinie der drei Kreise in einer Ebene^{15, 16}.

§ 43

1. Einige Eigenschaften der Potenz der Kugelnkreise lassen sich auf analoge Weise wie bei ebenen Kreisen darstellen. Es ist jedoch hier zweckmäßiger, sie dem Schneiden der Kugelnkreise unterzuordnen und mit einem einzigen Hilfssatz aus den analogen Betrachtungen bei Kugeln abzuleiten.

Hilfssatz: a) Wird eine Grundkugel K von zwei Kugeln M_1 und M_2 rechtwinklig geschnitten, so schneiden sich die Durchschnittskreise m_1 und m_2 unter demselben Winkel wie die Kugeln M_1 und M_2 ¹⁷.

b) Schneidet K die Kugeln M_1 und M_2 rechtwinklig und M_1 schneidet M_2 im Durchmesser, so schneidet auch der Kreis m_1 den Kreis m_2 im Durchmesser¹⁸.

¹³ Folgt aus 7.

¹⁴ Steiner bedient sich hier wieder der sehr praktischen Symbolik, die auch im Buch über Kreise und Kugeln verwendet wurde.

Es heißt der äußere Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise μ_1 und $\mu_2 \sim p(12,)$ und der innere $\sim p(1,2)$.

Auf der $\sim 1(12,3)$ dreier Kreise liegen die Ähnlichkeitspunkte $\sim p(12,), \sim p(1,3), \sim p(2,3)$.

Die Ähnlichkeitsebene $\sim e(12,34)$ von vier Kugelnkreisen enthält die Ähnlichkeitslinien: $\sim 1(12,3), \sim 1(12,4), \sim 1(1,34), \sim 1(2,34)$

sowie die Ähnlichkeitspunkte:

$\sim p(12,), \sim p(34,), \sim p(1,3), \sim p(1,4), \sim p(2,3), \sim p(2,4)$.

¹⁵ Es berühre zum Beispiel der Kreis 4 die drei übrigen äußerlich. Die Berührungspunkte heißen unter Verwendung von Steiners Symbolik $\sim p(1,4), \sim p(2,4)$ und $\sim p(3,4)$. Sie liegen zusammen mit der Geraden $\sim 1(123,)$ in der Ebene $\sim e(123,4)$.

¹⁶ Es folgt eine von Steiner durchgestrichene, kaum lesbare Spalte, die inhaltlich dasselbe enthalten dürfte, was in § 43.12. ausführlich dargeboten wird.

¹⁷ Beweis (nach Steiner): man lege in einem der beiden Durchschnittspunkte der drei Kugeln die Tangenten $t_1, t_2, t_{1,2}$ an je zwei der Kugeln. $t_{1,2}$ geht durch den Mittelpunkt von K und steht daher auf t_1 und t_2 senkrecht. Der Winkel zwischen t_1 und t_2 ist also zugleich Schnittwinkel der Kreise m_1 und m_2 , sowie der Kugeln M_1 und M_2 .

¹⁸ Beweis anhand einer Figur, die wie die drei andern Figuren Steiners in diesem Abschnitt, nur skizzenhaft, winzig klein und ohne Bezeichnungen dargestellt ist. Der wahre Mittelpunkt des Kreises m_2 liegt notwendig in der Ebene des Kreises $m_{1,2}$, folglich auch in der Ebene des Kreises m_1 (in der Schnittlinie der drei Kreise), und m_1 schneidet also m_2 im

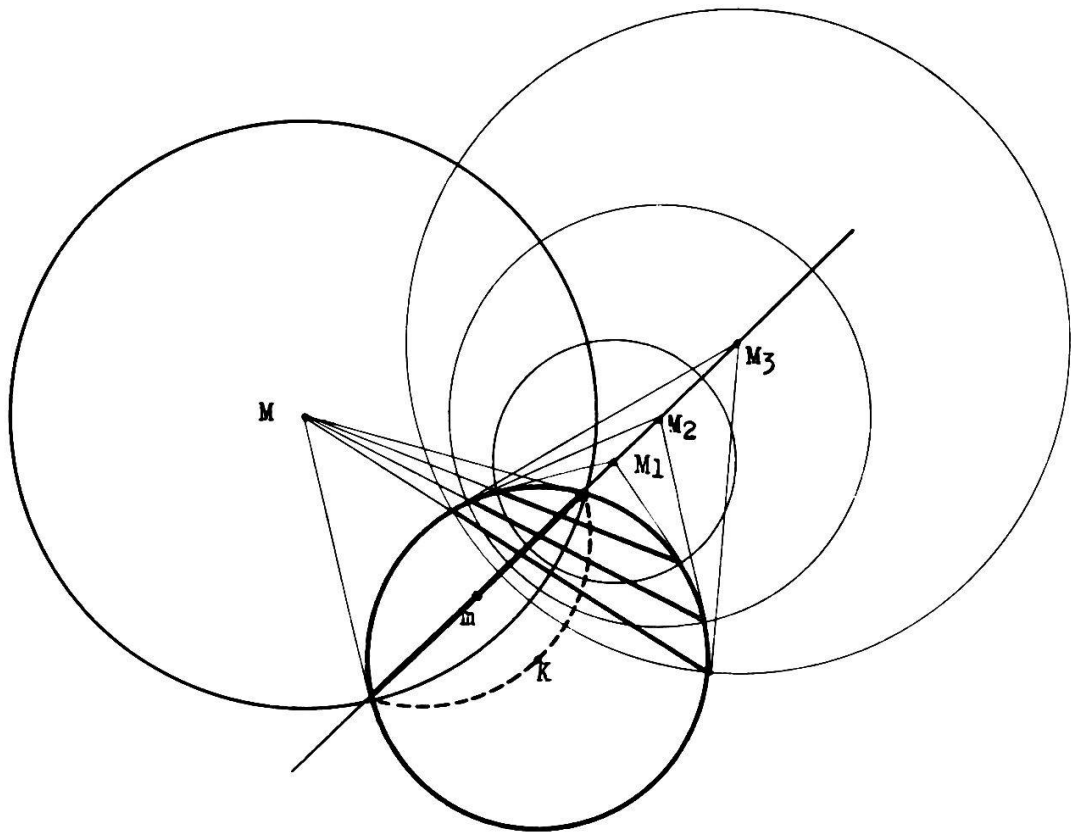


Abb. 3

c) Schneiden sich die Kugeln K und M_1 beliebig und jede von ihnen M_2 im Durchmesser, so schneidet der Kreis m_1 den Kreis m_2 im Durchmesser ¹⁹.

2. Die Ebenen aller Kreise m_i , die einen auf K gegebenen Kreis m rechtwinklig schneiden, gehen durch dessen äußern Mittelpunkt M . Der Ort der äußern Mittelpunkte der Kreise m_i ist die Ebene des Kreises m , diejenige der wahren Mittelpunkte ist eine Kugel ²⁰ über MK als Durchmesser ²¹ (Abb. 3).

Die Ebenen aller Kreise m_k , die einen auf K gegebenen Kreis m im Durchmesser schneiden, gehen durch dessen wahren Mittelpunkt m . Ihre äußern Mittel-

Durchmesser (Abb. 5, siehe S. 14). Der Beweis zu diesem Satz wird von Steiner auch in seinem Manuskript über stereographische Projektionen aus der gleichen Eigenschaft der ebenen Kreise abgeleitet.

¹⁹ Der Text zur Figur (Abb. 6, siehe S. 15) ist nicht vollständig leserlich und daher unklar. Die Behauptung ist aber leicht einzusehen.

²⁰ Natürlich können sie nur auf dem Teil der Kugel liegen, der im Innern von K ist. Die gleiche Bemerkung wäre noch an einigen andern Stellen zu setzen. Auch wenn als geometrischer Ort der äußern Mittelpunkte eine Gerade gegeben ist, kann nur der Teil außerhalb der Kugel damit gemeint sein.

²¹ Der Satz folgt aus dem Hilfssatz, sowie § 13 und § 14.3. α .

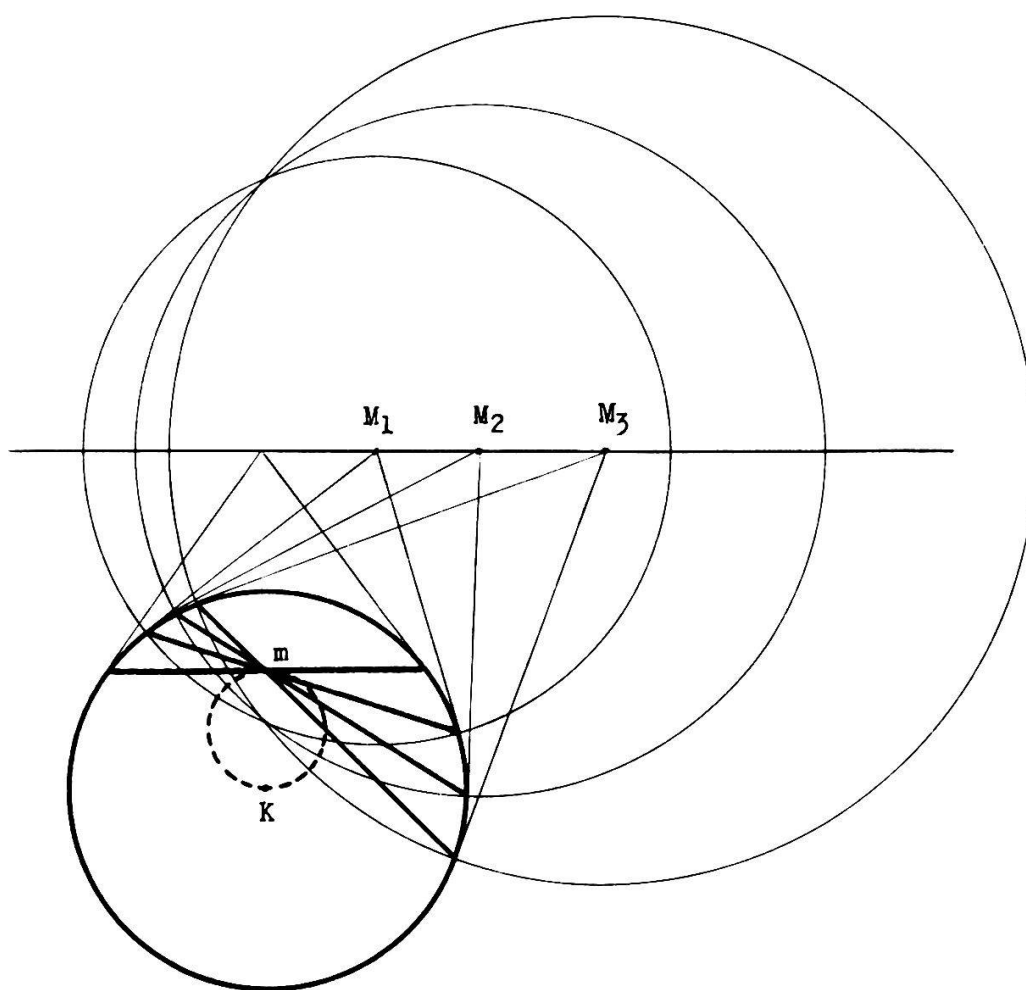


Abb. 4

punkte liegen auf der Polarebene²² zu m , ihre wahren Mittelpunkte auf einer Kugel über mK als Durchmesser²³ (Abb. 4).

3.²⁴ Die Ebenen aller Kreise m_i , die zwei gegebene Kreise m_1 und m_2 rechtwinklig schneiden, gehen durch deren äußere Achse M_1M_2 . Ihre äußern Mittelpunkte liegen auf der Schnittgeraden der Ebenen der gegebenen Kreise. Diese wird Potenzgerade²⁵ der beiden Kreise genannt und mit $L[12,]$ ²⁶ bezeichnet. Die

²² Steiner benennt die Ebene nicht. Er kennt die deutschen Begriffe Pol und Polare überhaupt nicht. Bei der Behandlung einer Aufgabe in § 12.5., die er in den «Annales Mathématiques» fand, sowie in § 17.6. bedient er sich der französischen Wörter «pôle» und «polaire».

²³ Folgt aus § 17.5.d.

²⁴ Steiner führt, wie er es fast überall zu tun pflegt, die Sätze zuerst auf diejenigen des vorhergehenden Abschnittes zurück und zeigt erst nachher, daß sie sich vermöge des Hilfssatzes aus § 15.2. ableiten lassen.

²⁵ Bei Steiner: wahre Linie der gleichen Tangenten, etwa auch der gleichen Potenzen.

²⁶ Steiner greift wieder ein Symbol auf, das er in frühern Teilen dieses Werkes einführte. Die Zahlen vor dem Komma sind die Indexzahlen der Kreise, die rechtwinklig, diejenigen nach dem Komma gehören zu den Kreisen, die im Durchmesser geschnitten werden.

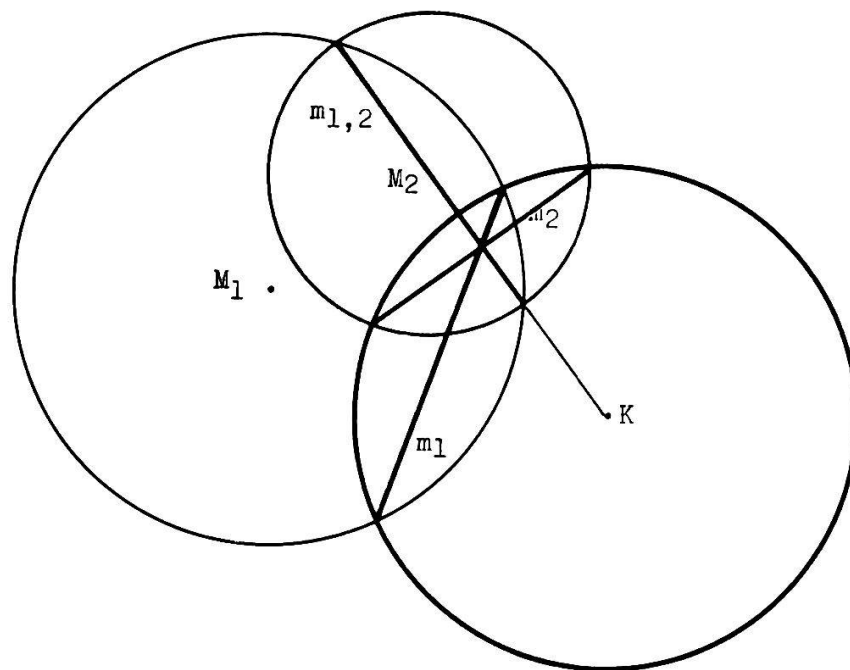


Abb. 5 (siehe S. 12)

Pole der Kreise m_i liegen auf dem Hauptkreis λ [12,], der sphärischen Linie der gleichen Tangenten. Ort der wahren Mittelpunkte ist der Kreis 1 [12,].

Die Ebenen aller Kreise m_k , die die gegebenen Kreise m_1 und m_2 im Durchmesser schneiden, gehen durch deren innere Achse m_1m_2 . Die äußeren Mittelpunkte aller Kreise m_k liegen auf der Geraden L [12,], ihre Pole auf dem Hauptkreis λ [12] und die wahren Mittelpunkte auf dem Kreis 1 [12].

Die Ebenen aller Kreise, die einen der gegebenen Kreise rechtwinklig und den andern im Durchmesser schneiden, gehen durch eine der gemischten Achsen M_1m_2 oder M_2m_1 . Ihre äußeren Mittelpunkte liegen auf den Geraden L [1,2] und L [2,1]. Diesen entsprechen die Hauptkreise λ [1,2], λ [2,1] und die Kreise 1 [1,2], 1 [2,1].

Die genannten Geraden L stehen auf der Ebene m_1m_2K , die Kreise λ und 1 je nach Art des Schnittes auf einer der vier Achsen ²⁷ senkrecht ²⁸.

4. ²⁹ Zu den drei gegebenen Kreisen m_1 , m_2 und m_3 gibt es im allgemeinen einen Kreis μ [123,] der sie rechtwinklig schneidet (oder, falls sein Mittelpunkt innerhalb derselben liegt, von jedem im Durchmesser geschnitten wird ³⁰), einen Kreis

²⁷ Nach Steiner stehen alle Kreise λ auf der Achse m_1m_2 senkrecht, was offensichtlich nicht stimmt.

²⁸ Es folgt eine Anmerkung, zu der Steiner erklärt, sie könne hier wegbleiben. Sie zeigt, daß der in § 10.8. dargestellte Sachverhalt auch auf der Kugel gilt.

²⁹ Was Steiner im folgenden ausführlich mehr als eine halbe Seite lang erörtert, entspricht genau den Ergebnissen für ebene Kreise in § 11.1/2. und läßt sich vermöge des Hilfssatzes aus § 15.2. ableiten.

³⁰ Vergleiche § 12.1.

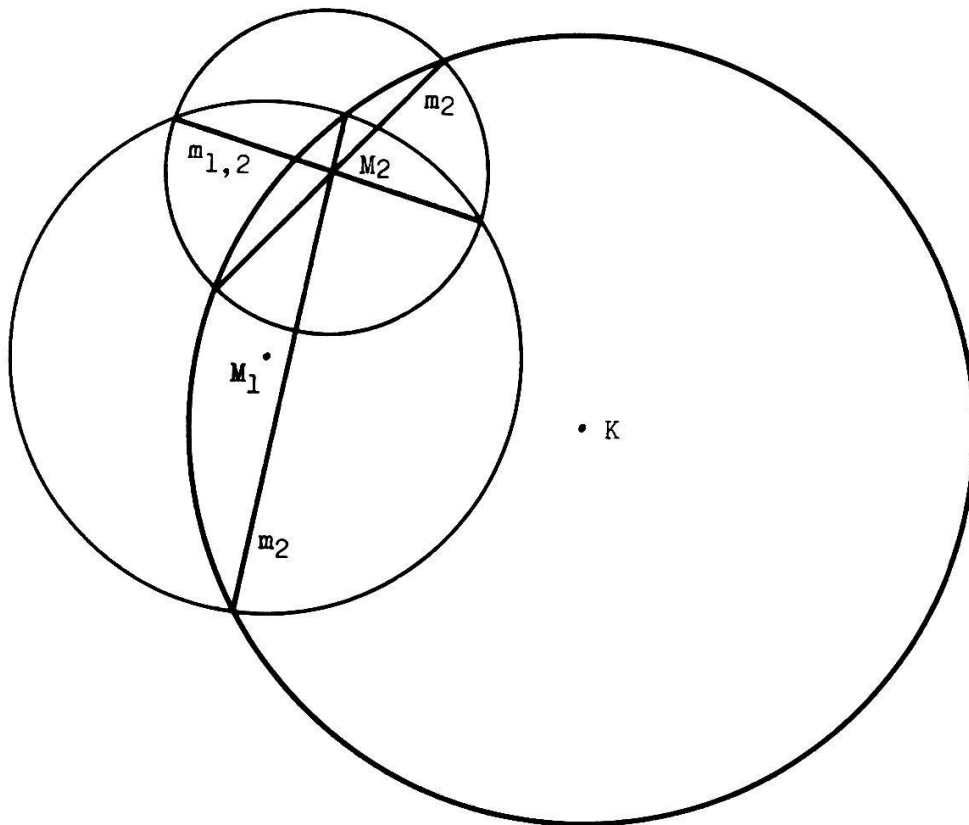


Abb. 6 (siehe S. 12)

μ [1,23], der sie im Durchmesser schneidet und sechs Kreise, die sie teils rechtwinklig, teils im Durchmesser schneiden: μ [12,3], μ [13,2], μ [23,1], μ [1,23], μ [2,13], μ [3,12]. Es müssen sich demnach von den je zwölf Linien L , Hauptkreisen λ und Kreisen 1 achtmal drei in einem Punkt schneiden, dem jeweiligen äußern, sphärischen oder wahren Mittelpunkt der Kreise μ .

5. Die Potenzgerade ist gleich der Schnittgeraden zweier Kreise, die sphärische Potenzlinie gleich ihrer sphärischen Sehne. Bei sich berührenden Kreisen fällt die Potenzgerade mit der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt zusammen; der Hauptkreis durch den Berührungspunkt, senkrecht zur äußern Achse der Kreise, ist die sphärische Potenzlinie.

Bei drei Kugelkreisen treffen sich die Schnittgeraden bzw. Tangenten in den Berührungspunkten im wahren Potenzpunkt der Kreise ³¹.

6. Es existieren auf der Kugel zwei Kreisscharen μ_i und ν_i , so daß jeder Kreis der einen Schar alle Kreise der andern Schar rechtwinklig schneidet. Die äußere Achse der einen Schar ist gleich der Potenzgeraden der andern Schar und dabei geht die eine Gerade durch die Berührungspunkte der von der andern aus an die Kugel gelegten Tangentialebenen. Die Pole der Kreisscharen liegen in zwei auf-

³¹ Siehe § 12.1. und § 10.3. Steiner formuliert seine Sätze nicht ganz richtig.

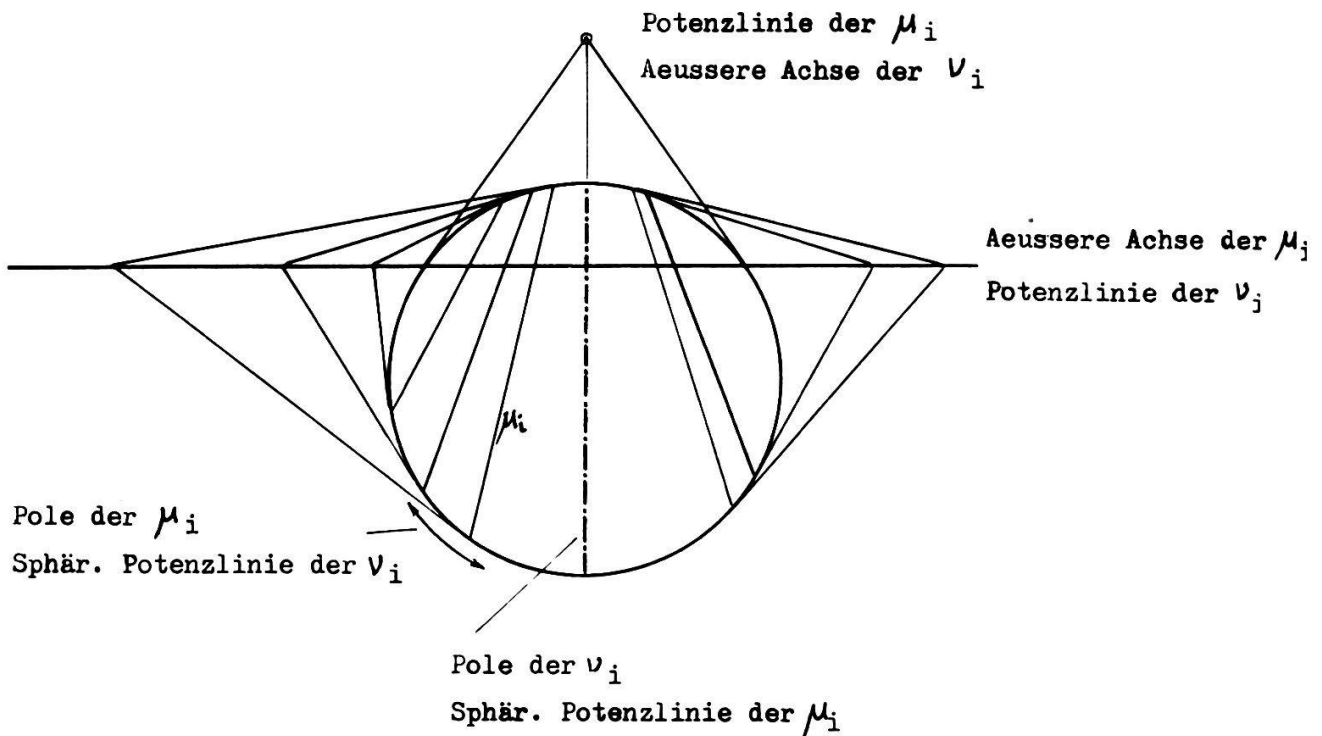


Abb. 7

einander senkrecht stehenden Hauptkreisen, wobei jeder die sphärische Potenzlinie der andern Schar ist (Abb. 7).

Zieht man von einem Hauptkreis aus Tangenten an einen Kleinkreis, so gehen die Berührungssehnern durch einen festen Punkt ³². Der erwähnte Hauptkreis steht senkrecht auf dem durch diesen festen Punkt und durch den Pol des Kleinkreises bestimmten Hauptkreis ^{33, 34}.

7. Zwei Kreise der Kugelfläche liegen, wie wir früher gesehen haben, in zwei bestimmten Kegeln, deren Scheitel die Ähnlichkeitspunkte sind. Das Produkt der auf einer Mantellinie gemessenen Abstände der beiden Peripheriepunkte vom Ähnlichkeitspunkt nennen wir wahre ³⁵ gemeinsame ³⁶ Potenz der Kreise, und

³² Auch hier steht bei Steiner noch die Umkehrung des Satzes.

³³ Oben am Blatt steht durchgestrichen ein weiterer Einleitungsversuch zu Teil V.

³⁴ Steiner wiederholt hier die in § 43.3. ausgesprochenen Tatsachen, daß alle Kreise, die zwei gegebene im Durchmesser schneiden, deren innere Achse zur Potenzgeraden haben. Entsprechendes gilt für Kreise, die den einen im Durchmesser und den andern rechtwinklig schneiden.

Der folgende Satz enthält ebenfalls nur eine Wiederholung zu schon gesagtem: Hat eine Kreisschar eine gemeinsame Potenzlinie (wahr oder sphärisch), so liegen ihre äußern Mittelpunkte in einer Geraden, ihre Pole in einem Hauptkreis und ihre wahren Mittelpunkte in der Peripherie eines Kreises durch das Zentrum der Grundkugel.

³⁵ In einer Anmerkung weist Steiner darauf hin, daß er im Anhang auch eine sphärische gemeinsame Potenz nachweisen werde.

³⁶ Bei Steiner gemeinschaftliche.

zwar heißt sie äußerlich, wenn die Kreise auf derselben, innerlich, wenn die Kreise auf verschiedenen Seiten des Ähnlichkeitspunktes liegen. Das Produkt ist gleich der Potenz der Kugelfläche in bezug auf die erwähnten Ähnlichkeitspunkte und deshalb konstant (Abb. 8, siehe S. 18).

Je zwei Punkte der Kugelfläche, die mit einem Ähnlichkeitspunkt in gerader Linie liegen, heißen potenzhaltende Punkte. Ihre Potenz ist in bezug auf den Ähnlichkeitspunkt gleich und gleichartig ³⁷ der gemeinsamen Potenz der gegebenen Kreise. Desgleichen soll jeder Kugelkreis, dessen Ebene durch einen der Ähnlichkeitspunkte geht, potenzhaltend heißen, denn auch seine Potenz bezüglich des Ähnlichkeitspunktes ist gleich und gleichartig der gemeinsamen Potenz der gegebenen Kreise.

Die äußere gemeinsame Potenz zweier Kreise ist gleich dem Quadrat der vom äußern Ähnlichkeitspunkt an die Kugel gelegten Tangente. Der Berührungskreis aller dieser Tangenten heißt äußerer Potenzkreis der Kreise.

Die innere gemeinsame Potenz der Kreise ist gleich dem Quadrat der halben, durch den innern Ähnlichkeitspunkt gelegten kürzesten Sehne der Kugel. Der sphärische Kreis über dieser Sehne als Durchmesser heißt innerer Potenzkreis der Kreise.

Jeder Kreis, der in bezug auf einen Ähnlichkeitspunkt potenzhaltend ist, schneidet den zugehörigen Potenzkreis potenzhaltend, d. h. je nach Ähnlichkeitspunkt rechtwinklig oder im Durchmesser ³⁸.

8. Vermöge des Hilfssatzes läßt sich aus den bei Kugeln gefundenen Ergebnissen folgender Satz ableiten: Jeder Kreis μ , der die Kreise μ_1 und μ_2 gleich- oder ungleichartig ³⁹ unter gleichen Winkeln schneidet, schneidet den äußern bzw. innern Potenzkreis der gegebenen Kreise μ_1 und μ_2 potenzhaltend, und seine Ebene geht durch den äußern bzw. innern Ähnlichkeitspunkt der Kreise ^{40, 41}.

9. Die Ebenen aller Kreise μ , die drei gegebene Kreise μ_1, μ_2, μ_3 unter gleichem Winkel schneiden, gehen durch eine ihrer vier Ähnlichkeitslinien, je nach-

³⁷ Innerlich oder äußerlich.

³⁸ Der Satz gilt auch umgekehrt. Er ist leicht einzusehen, da ja die Ebene jedes potenzhaltenden Kreises durch einen Ähnlichkeitspunkt (= äußerer Mittelpunkt des Potenzkreises) geht. Vergleiche § 43.2.

³⁹ Beim Schneiden zweier Kreise entstehen durch die Tangenten in einem Schnittpunkt bekanntlich zwei Winkel. Der äußere Schnittwinkel der beiden Kreise liegt vollständig inner- oder außerhalb der Kreise, der innere Schnittwinkel ist sein Supplement. Siehe auch § 25.

⁴⁰ Siehe § 34. Sei K die Grundkugel, die von den Kugeln M_1 und M_2 in den Kreisen μ_1 und μ_2 rechtwinklig geschnitten wird. Jede Kugel M , die M_1 und M_2 unter gleichem Winkel schneidet, ist in bezug auf den Ähnlichkeitspunkt der Kugeln potenzhaltend. Dieser Ähnlichkeitspunkt ist aber zugleich derjenige der Kreise. Wenn nun M K rechtwinklig schneidet, so schneidet nach dem Hilfssatz auch der Kreis μ die Kreise μ_1 und μ_2 unter gleichem Winkel.

⁴¹ Steiner fügt in Klammern an, daß alle äußern Mittelpunkte der Kreise μ , die die Kreise μ_1 und μ_2 gleichartig unter gleichem Winkel schneiden, in der Ebene des äußern Potenzkreises (§ 43.2.) liegen und ihre wahren Mittelpunkte in einer Kugel, deren Durchmesser vom äußern Mittelpunkt des Potenzkreises und K begrenzt wird.

$$\overline{A\mu_1} \cdot \overline{Av_1} = \overline{A\mu_2} \cdot \overline{Av_2} = \text{konst.}$$

$$\overline{\mu_1 I} \cdot \overline{\mu_2 I} = \overline{\mu_2 I} \cdot \overline{\mu_1 I} = \text{konst.}$$

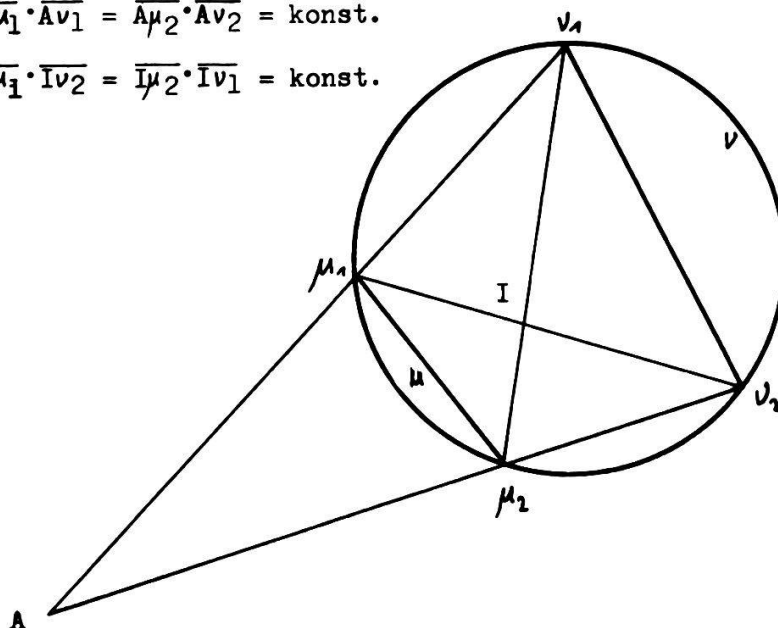


Abb. 8 (siehe S. 17)

dem sie die Kreise gleich- oder ungleichartig schneiden. Die äußern Mittelpunkte der vier Kreisscharen liegen in vier Geraden, die je zur entsprechenden Ähnlichkeitslinie senkrecht stehen. Die vier Geraden schneiden sich in einem Punkt, dem äußern Mittelpunkt des Kreises, der die gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet ⁴². Ebenso schneiden sich die vier Hauptkreise, auf denen die Pole, und die vier Kreise, auf denen die wahren Mittelpunkte der vier Kreisscharen liegen in je einem Punkt, dem Pol und dem wahren Mittelpunkt des erwähnten Kreises. Die drei Schnittpunkte liegen auf einer Geraden durch den Mittelpunkt der Grundkugel, senkrecht zur äußern Mittelpunktsebene der gegebenen Kreise ⁴³.

10. In jeder der acht Ähnlichkeitsebenen, die zu vier gegebenen Kreisen gehören, liegt im allgemeinen ein Kreis, der sie unter gleichem Winkel schneidet ⁴⁴.

11. Wenn von zwei sich berührenden Kreisen s_1 und s_2 jeder die zwei gegebenen Kreise μ_1 und μ_2 auf gleiche Art (d. h. entweder jeder gleichartig oder jeder ungleichartig) unter gleichem Winkel schneidet, so liegt ihr Berührungspunkt in

⁴² Denn dieser Kreis gehört notwendig zu allen vier Kreisscharen.

⁴³ Steiner führt für die genannten Linien wieder seine anschaulichen Symbole ein: die äußern Mittelpunkte der vier Scharen liegen auf den Geraden $L(123,)$, $L(12,3)$, $L(13,2)$, $L(23,1)$. Ihr Schnittpunkt ist $K[123,]$. Die Pole auf den Hauptkreisen $\lambda(123,)$, $\lambda(12,3)$... und die wahren Mittelpunkte auf den Kreisen $1(123,)$, $1(12,3)$... Dabei werden Kreise, deren Indices in der Klammer auf einer Seite des Kommas stehen, gleichartig, solche, deren Indexzahlen durch das Komma getrennt werden, ungleichartig geschnitten.

⁴⁴ $Kr(1234,)$, $Kr(123,4)$, $Kr(124,3)$, $Kr(134,2)$, $Kr(234,1)$, $Kr(12,34)$, $Kr(13,24)$. In ihren äußern Mittelpunkten schneiden sich je vier von insgesamt 16 Geraden L . Analoges gilt für die Pole und wahren Mittelpunkte.

einem der Potenzkreise der Kreise μ_1 und μ_2 (bei gleichartigem Schnitt im äußern, bei ungleichartigem im innern) ⁴⁵.

Umgekehrt gilt, daß ein Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise μ_1 und μ_2 , je aus der Schar μ_i , welche einen gegebenen Kreis s_1 unter einem Winkel α_1 und einen zweiten s_2 unter α_2 schneiden, in der Potenzgeraden der Kreise s_1 und s_2 liegt.

Je zwei Kreise der Schar μ_i , die die Kreise s_1 und s_2 entweder äußerlich oder innerlich unter den Winkeln α_1 und α_2 schneiden, haben einen Ähnlichkeitspunkt in den Potenzgeraden von s_1 und s_2 ⁴⁶. Diese Potenzgerade ist also eine Ähnlichkeitslinie der Schar μ_i .

Alle Kreise s_k mit gleicher Potenzgeraden schneiden die Kreise μ_i , deren Ähnlichkeitslinie mit der Potenzgeraden zusammenfällt, unter einem bestimmten Winkel α_k . Unter den Kreisen s_k existieren sicher zwei, die alle Kreise μ_i berühren ^{47, 48}.

12. Die Pole der Kreise s , die zwei gegebene Kreise μ_1 und μ_2 gleichartig (ungleichartig) berühren, liegen auf einer sphärischen Hyperbel (Ellipse) mit den Polen μ_1 und μ_2 als sphärischen Brennpunkten. Die äußern Mittelpunkte der Kreise s liegen bei gleichartiger (ungleichartiger) Berührung in einer Hyperbel (Ellipse) in der Ebene des äußern (innern) Potenzkreises der gegebenen Kreise. Die sich entsprechenden ebenen und sphärischen Kurven liegen zusammen je in einem Kegel zweiten Grades, dessen Scheitel im Zentrum K der Grundkugel liegt. Die Strahlen aus K durch die Pole μ_1 und μ_2 kann man Brennlinsen der Kegel nennen. Es gilt, daß entweder die Summe oder der Unterschied der Winkel, die sie mit einer beliebigen Mantellinie des Kegels bilden, konstant ist ⁴⁹.

⁴⁵ Die Ebenen aller Kreise s_i , die μ_1 und μ_2 unter gleichem Winkel schneiden, gehen durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise μ_1 und μ_2 , desgleichen ihre Schnittgerade. Diese Durchschnittslinie entspricht der Potenzgeraden und bei Berührung außerdem der Tangente im Berührungspunkt der beiden Kreise s_1 und s_2 . Im letztern Fall ist sie zugleich Tangente an die Grundkugel und alle Tangenten aus einem Ähnlichkeitspunkt an die Grundkugel berühren diese im entsprechenden Potenzkreis.

⁴⁶ Der äußere (bzw. innere) Ähnlichkeitspunkt der Kreise μ_1 und μ_2 liegt in der genannten Potenzgeraden, wenn die Kreise s_1 und s_2 von μ_1 und μ_2 gleichartig geschnitten werden. Steiner zählt acht verschiedene Schnittmöglichkeiten auf. Es sind aber nur sechs.

⁴⁷ Wenn sie einen Kreis μ der μ_i berühren (= unter 0° oder 180° schneiden), dann auch alle andern. Alle sphärischen Sehnen, die einer der Kreise μ_i mit den Kreisen s_k gemeinsam hat, schneiden sich in einem Punkt π der sphärischen Potenzlinie der s_k . Die äußere Achse der μ_i ist gleich ihrer gemeinsamen Ähnlichkeitslinie (§ 42.3.). Die Ebenen aller μ_i gehen demnach durch eine feste Achse, so daß ihre Radialprojektion und die der genannten Potenzgeraden sich im Punkt π treffen. Wenn μ einen Kreis s_k berührt, geht die Tangente im Berührungspunkt durch π . Aus π lassen sich aber zwei Tangenten an μ ziehen, in deren Berührungspunkten er von je einem Kreis der s_k berührt werden kann.

⁴⁸ Steiner wandelt den Satz noch etwas ab: Alle Kreise μ_i , die zwei Kreise s_3 und s_4 berühren, schneiden deren innern oder äußern Potenzkreis potenzhaltend. Alle Kreise μ_i , die einen Kreis π entweder rechtwinklig oder im Durchmesser und einen Kreis s_1 unter gegebenem Winkel α schneiden, werden von zwei Kreisen s_3 und s_4 berührt, welche mit s_1 und π eine gemeinsame Potenzlinie haben.

⁴⁹ Steiner baut den Abschnitt ziemlich anders auf. Er stellt zuerst fest, daß entweder die

Allgemein gilt ⁵⁰: Der Ort der äußern Mittelpunkte aller Kreise s , die zwei gegebene Kreise μ_1 und μ_2 ⁵¹ gleichnamig unter gegebenen Winkeln α_1 und α_2 schneiden, ist ein ebener Kegelschnitt, derjenige ihrer Pole ein sphärischer. Beide gehören zum selben Kegel mit Scheitel in K .

Differenz oder die Summe der sphärischen Abstände des Pols des Kreises s von den Polen der gegebenen Kreise konstant gleich $|\rho_1 - \rho_2|$ (bzw. $\rho_1 + \rho_2$) ist. Zum Beispiel: Liegen μ_1 und μ_2 mit den sphärischen Radien ρ_1 und ρ_2 auseinander, und berührt ein Kreis s mit sphärischem Radius r dieselben äußerlich, so gilt:

$$\left. \begin{array}{l} s \mu_1 = r + \rho_1 \\ s \mu_2 = r + \rho_2 \end{array} \right\} s \mu_1 - s \mu_2 = \rho_1 - \rho_2.$$

Analog lassen sich die Formeln für die übrigen Fälle herleiten. Es sind dies notabene die einzigen Formeln, die sich in Steiners Manuskript finden. Aus dem Hilfssatz und § 38.8. folgert Steiner anschließend, daß die äußern Mittelpunkte der Kreise s in einer Kurve zweiten Grades in der Ebene eines Potenzkreises liegen, und stellt weiter fest, daß diese Kurve mit dem oben beschriebenen Ort der Pole in ein und demselben Kegel zweiten Grades liegen, für den die am Schluß des Abschnitts erwähnten Eigenschaften gelten. Damit fällt zum ersten Mal auch der Name «sphärischer Kegelschnitt».

⁵⁰ Ergebnisse von § 43.12. auf § 43.11. anwenden.

⁵¹ Der eine der Kreise μ kann wieder (vgl. Anm. 48) durch den Potenzkreis π ersetzt werden, der dann rechtwinklig oder im Durchmesser geschnitten wird.

V. Abschied.



S 46

Der ^{große} ~~große~~ ^{größte} und
glücklichste Gewinn

[illegible]

~~Alte~~ ^{Alte} ~~mitte~~ ^{in der} ~~in der~~ ^{Abf. 1} ~~Abf. 1~~ ² ~~Abf. 2~~ ³ ~~Abf. 3~~ ⁴ ~~Abf. 4~~ ⁵ ~~Abf. 5~~ ⁶ ~~Abf. 6~~ ⁷ ~~Abf. 7~~ ⁸ ~~Abf. 8~~ ⁹ ~~Abf. 9~~ ¹⁰ ~~Abf. 10~~ ¹¹ ~~Abf. 11~~ ¹² ~~Abf. 12~~ ¹³ ~~Abf. 13~~ ¹⁴ ~~Abf. 14~~ ¹⁵ ~~Abf. 15~~ ¹⁶ ~~Abf. 16~~ ¹⁷ ~~Abf. 17~~ ¹⁸ ~~Abf. 18~~ ¹⁹ ~~Abf. 19~~ ²⁰ ~~Abf. 20~~ ²¹ ~~Abf. 21~~ ²² ~~Abf. 22~~ ²³ ~~Abf. 23~~ ²⁴ ~~Abf. 24~~ ²⁵ ~~Abf. 25~~ ²⁶ ~~Abf. 26~~ ²⁷ ~~Abf. 27~~ ²⁸ ~~Abf. 28~~ ²⁹ ~~Abf. 29~~ ³⁰ ~~Abf. 30~~ ³¹ ~~Abf. 31~~ ³² ~~Abf. 32~~ ³³ ~~Abf. 33~~ ³⁴ ~~Abf. 34~~ ³⁵ ~~Abf. 35~~ ³⁶ ~~Abf. 36~~ ³⁷ ~~Abf. 37~~ ³⁸ ~~Abf. 38~~ ³⁹ ~~Abf. 39~~ ⁴⁰ ~~Abf. 40~~ ⁴¹ ~~Abf. 41~~ ⁴² ~~Abf. 42~~ ⁴³ ~~Abf. 43~~ ⁴⁴ ~~Abf. 44~~ ⁴⁵ ~~Abf. 45~~ ⁴⁶ ~~Abf. 46~~ ⁴⁷ ~~Abf. 47~~ ⁴⁸ ~~Abf. 48~~ ⁴⁹ ~~Abf. 49~~ ⁵⁰ ~~Abf. 50~~ ⁵¹ ~~Abf. 51~~ ⁵² ~~Abf. 52~~ ⁵³ ~~Abf. 53~~ ⁵⁴ ~~Abf. 54~~ ⁵⁵ ~~Abf. 55~~ ⁵⁶ ~~Abf. 56~~ ⁵⁷ ~~Abf. 57~~ ⁵⁸ ~~Abf. 58~~ ⁵⁹ ~~Abf. 59~~ ⁶⁰ ~~Abf. 60~~ ⁶¹ ~~Abf. 61~~ ⁶² ~~Abf. 62~~ ⁶³ ~~Abf. 63~~ ⁶⁴ ~~Abf. 64~~ ⁶⁵ ~~Abf. 65~~ ⁶⁶ ~~Abf. 66~~ ⁶⁷ ~~Abf. 67~~ ⁶⁸ ~~Abf. 68~~ ⁶⁹ ~~Abf. 69~~ ⁷⁰ ~~Abf. 70~~ ⁷¹ ~~Abf. 71~~ ⁷² ~~Abf. 72~~ ⁷³ ~~Abf. 73~~ ⁷⁴ ~~Abf. 74~~ ⁷⁵ ~~Abf. 75~~ ⁷⁶ ~~Abf. 76~~ ⁷⁷ ~~Abf. 77~~ ⁷⁸ ~~Abf. 78~~ ⁷⁹ ~~Abf. 79~~ ⁸⁰ ~~Abf. 80~~ ⁸¹ ~~Abf. 81~~ ⁸² ~~Abf. 82~~ ⁸³ ~~Abf. 83~~ ⁸⁴ ~~Abf. 84~~ ⁸⁵ ~~Abf. 85~~ ⁸⁶ ~~Abf. 86~~ ⁸⁷ ~~Abf. 87~~ ⁸⁸ ~~Abf. 88~~ ⁸⁹ ~~Abf. 89~~ ⁹⁰ ~~Abf. 90~~ ⁹¹ ~~Abf. 91~~ ⁹² ~~Abf. 92~~ ⁹³ ~~Abf. 93~~ ⁹⁴ ~~Abf. 94~~ ⁹⁵ ~~Abf. 95~~ ⁹⁶ ~~Abf. 96~~ ⁹⁷ ~~Abf. 97~~ ⁹⁸ ~~Abf. 98~~ ⁹⁹ ~~Abf. 99~~ ¹⁰⁰ ~~Abf. 100~~ ¹⁰¹ ~~Abf. 101~~ ¹⁰² ~~Abf. 102~~ ¹⁰³ ~~Abf. 103~~ ¹⁰⁴ ~~Abf. 104~~ ¹⁰⁵ ~~Abf. 105~~ ¹⁰⁶ ~~Abf. 106~~ ¹⁰⁷ ~~Abf. 107~~ ¹⁰⁸ ~~Abf. 108~~ ¹⁰⁹ ~~Abf. 109~~ ¹¹⁰ ~~Abf. 110~~ ¹¹¹ ~~Abf. 111~~ ¹¹² ~~Abf. 112~~ ¹¹³ ~~Abf. 113~~ ¹¹⁴ ~~Abf. 114~~ ¹¹⁵ ~~Abf. 115~~ ¹¹⁶ ~~Abf. 116~~ ¹¹⁷ ~~Abf. 117~~ ¹¹⁸ ~~Abf. 118~~ ¹¹⁹ ~~Abf. 119~~ ¹²⁰ ~~Abf. 120~~ ¹²¹ ~~Abf. 121~~ ¹²² ~~Abf. 122~~ ¹²³ ~~Abf. 123~~ ¹²⁴ ~~Abf. 124~~ ¹²⁵ ~~Abf. 125~~ ¹²⁶ ~~Abf. 126~~ ¹²⁷ ~~Abf. 127~~ ¹²⁸ ~~Abf. 128~~ ¹²⁹ ~~Abf. 129~~ ¹³⁰ ~~Abf. 130~~ ¹³¹ ~~Abf. 131~~ ¹³² ~~Abf. 132~~ ¹³³ ~~Abf. 133~~ ¹³⁴ ~~Abf. 134~~ ¹³⁵ ~~Abf. 135~~ ¹³⁶ ~~Abf. 136~~ ¹³⁷ ~~Abf. 137~~ ¹³⁸ ~~Abf. 138~~ ¹³⁹ ~~Abf. 139~~ ¹⁴⁰ ~~Abf. 140~~ ¹⁴¹ ~~Abf. 141~~ ¹⁴² ~~Abf. 142~~ ¹⁴³ ~~Abf. 143~~ ¹⁴⁴ ~~Abf. 144~~ ¹⁴⁵ ~~Abf. 145~~ ¹⁴⁶ ~~Abf. 146~~ ¹⁴⁷ ~~Abf. 147~~ ¹⁴⁸ ~~Abf. 148~~ ¹⁴⁹ ~~Abf. 149~~ ¹⁵⁰ ~~Abf. 150~~ ¹⁵¹ ~~Abf. 151~~ ¹⁵² ~~Abf. 152~~ ¹⁵³ ~~Abf. 153~~ ¹⁵⁴ ~~Abf. 154~~ ¹⁵⁵ ~~Abf. 155~~ ¹⁵⁶ ~~Abf. 156~~ ¹⁵⁷ ~~Abf. 157~~ ¹⁵⁸ ~~Abf. 158~~ ¹⁵⁹ ~~Abf. 159~~ ¹⁶⁰ ~~Abf. 160~~ ¹⁶¹ ~~Abf. 161~~ ¹⁶² ~~Abf. 162~~ ¹⁶³ ~~Abf. 163~~ ¹⁶⁴ ~~Abf. 164~~ ¹⁶⁵ ~~Abf. 165~~ ¹⁶⁶ ~~Abf. 166~~ ¹⁶⁷ ~~Abf. 167~~ ¹⁶⁸ ~~Abf. 168~~ ¹⁶⁹ ~~Abf. 169~~ ¹⁷⁰ ~~Abf. 170~~ ¹⁷¹ ~~Abf. 171~~ ¹⁷² ~~Abf. 172~~ ¹⁷³ ~~Abf. 173~~ ¹⁷⁴ ~~Abf. 174~~ ¹⁷⁵ ~~Abf. 175~~ ¹⁷⁶ ~~Abf. 176~~ ¹⁷⁷ ~~Abf. 177~~ ¹⁷⁸ ~~Abf. 178~~ ¹⁷⁹ ~~Abf. 179~~ ¹⁸⁰ ~~Abf. 180~~ ¹⁸¹ ~~Abf. 181~~ ¹⁸² ~~Abf. 182~~ ¹⁸³ ~~Abf. 183~~ ¹⁸⁴ ~~Abf. 184~~ ¹⁸⁵ ~~Abf. 185~~ ¹⁸⁶ ~~Abf. 186~~ ¹⁸⁷ ~~Abf. 187~~ ¹⁸⁸ ~~Abf. 188~~ ¹⁸⁹ ~~Abf. 189~~ ¹⁹⁰ ~~Abf. 190~~ ¹⁹¹ ~~Abf. 191~~ ¹⁹² ~~Abf. 192~~ ¹⁹³ ~~Abf. 193~~ ¹⁹⁴ ~~Abf. 194~~

Wunderlich kann es sich machen, dass alle
Nützen, welche in der Masse des über Kap-
st. in d. Luft liegt, aufgestellt werden,
gleich auf einerlei Höhe für jedes Kind
welche in gleichem Maße beschaffen sind.

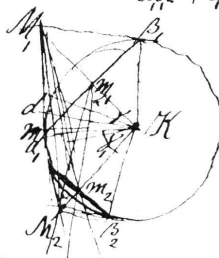
Deutsch 342. 
 French 342. 

16. Ein jeder (Kleinere) nimmt aus der
 fol die letzte Melly. ~~Stücke~~ Heide
 1. Ein den folget und sein bin ein (Klein)
 und auf die Kugelfl. 3 auf 4 Melly. und
 fird; wieder folgend:

[illegible]

$$x_1, y_1, z_1$$

$$a_{11}^2 z^2 + a_{12}^2 y^2 + b_{11}^2 x^2 \leq a_{11}^2 b_{11}^2$$



$200 = 2$
 $400 = 40$
 $800 = 800$
 $9000 = 9000$
 $90000 = 90000$
 $900'000 = 900'000$
 $9000'000 = 9000'000$

2. *Uzistorf*

*Kino and I saw Ray Hobbs & Co.
1949 1027 Julian St. Jan. 15 1944
Have got the record off right now*

man bin die Grundlage für $h(\delta) \approx \delta$
 man fließt bez. f.:

$$a.) \mu[123,], \mu[12,3], \mu[13,2], \mu[23,1]$$
$$\mu[1,23], \mu[2,13], \mu[3,12], \mu[123]$$

~~Es folgt ein Auszug aus dem~~

Ten za ix 2 che shin was ha. To wall

nauf (B3.) fersigt 4 L. (A.) u. 4 d.

(B.) mit 4. 24 (C.) 19. 2. 1871, 1. 2. 1871

12.7 12.7

... 1, 2, 3, 4, ...
voll auf nur die 12 Kr

$$\lambda^{[1,2]}, \lambda^{[1,2]}, \dots$$

für mich auf dem 2ten 2ten.

$[1^{(2)}], [4, 2], \dots$
 4 und 2: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

in der Mitte d. d. d. d.

(a.) 3. H. in 3 L. $L[1,2]$ $L[1,2]$.

2 [113], 2 [223] pfad wieder zum vorigen
Mittelpunkt [113, 223] d.h. d. C. = F.

и. п. п. $\mu[1,23]$;

5.) Auf bin R_4 auf der Kugelfl. steht

die Lili des gleichen Genus (3.) in der
Gabelung, des (nach S.).

Erstlich ist Klaus, Sohn von 2. bei der

I beg to inform you, that the same

gibst Platz zu, und ich hoffe, da

regulär mit einer perfekten L. in $GL_2(F)$