Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern

Band: 23 (1965)

Artikel: Vorstellungen vom Raum in mathematischer Sicht

Autor: Debrunner, Hans E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319542

Hans E. Debrunner

Vorstellungen vom Raum in mathematischer Sicht [1]

Die Vorstellung vom Raum ist wandelbar. Wenn im Alten Testament der Himmel halbkugelig begrenzend über die Erdscheibe gewölbt erscheint, etwa im Bericht über Jakobs Traum, «eine Leiter sei auf die Erde gestellt, die mit der Spitze an den Himmel rührte» (1. Mose 28, 12), oder im 104. Psalm «Der Herr spannt den Himmel auf wie ein Zeltdach», so haben wir im Zeitalter der Weltraumfahrt Mühe, diese Vorstellung in ihrer ursprünglichen Bildhaftigkeit zu belassen. Welches mag die Vorstellung sein, die sich heute beispielsweise ein Student, der ein Studium naturwissenschaftlicher Richtung aufnimmt, vom Raume macht? Sicher wird bei ihm der Geometrieunterricht seine Spuren zurückgelassen haben. So ist ihm klar, «daß man genau eine gerade Linie von einem beliebigen Punkt bis zu jedem andern ziehen kann», «und daß man jede begrenzte Strecke in gerader Linie beliebig verlängern kann». Wörtlich so formuliert stehen diese beiden Sachverhalte im Lehrbuch, das ums Jahr 300 v. Chr. Euklid verfaßt hat. Der im neugegründeten Alexandria wirkende Gelehrte hat die damals bekannte Geometrie nach der platonischen Lehre dialektisch und von den Fundamenten her logisch dargestellt. Zwei Jahrtausende lang hat man aus seinem Buch Geometrie gelehrt und gelernt. Deshalb bezeichnen wir heute alles, was von jenen Fundamenten her gefunden werden kann, als euklidische Geometrie. In diesem Sinne ist es auch euklidische Geometrie, nur im neuen Gewand, in Koordinaten verkleidet, auf die unser Student im Unterricht der *analytischen* Geometrie gestoßen ist. In erweitertem Rahmen ist ihm die euklidische Geometrie im Physikunterricht erschienen, etwa bei der Untersuchung der Wurfbewegung oder bei der Charakterisierung der Planetenbahnen, oder in kleinern Dimensionen in der kinetischen Gas-

[1] Für den Druck überarbeitete Fassung der Antrittsvorlesung, gehalten am 8. Mai 1965 an der Universität Bern. Mathematisches Institut der Universität Bern, Sidlerstraße 5.

theorie, wo sich doch die Gasmoleküle zwischen aufeinanderfolgenden Zusammenstößen geradlinig bewegen. Von solchen Beispielen her hat sich wahrscheinlich bei unserm Studenten die einseitige Ansicht gebildet, daß die euklidische Geometrie eine abstrahierende Nachbeschreibung gibt von einem wirklichen Raume, den wir mit unsern Sinnen wahrnehmen und in dem sich sowohl Himmelskörper wie Atome bewegen. Er respektiert diese Geometrie als das Musterbeispiel einer exakten Naturwissenschaft, weil es ihr gelingt und schon vor über 2000 Jahren gelungen ist, eine Reihe evidentester Grundbeziehungen für den Raum herauszuheben und aus ihnen, den Axiomen, alle weitern räumlichen Beziehungen rein logisch herzuleiten.

Diese Ansicht ist Ausdruck einer Erkenntnistheorie, welche davon ausgeht, daß uns durch unsere Sinneswahrnehmungen Wissen von der Realität zuströmt, das wir in unserer Anschauung sammeln; dieses Wissen ist vorerst chaotisch, aber indem wir es der analysierenden Abstraktion und den ordnenden Kräften des Verstandes unterwerfen, gelingt es uns, in unserem Denken ein das Wesen der Realität wiedergebendes, übersehbares Bild zu gewinnen. Dabei ist der Raum zu vergleichen mit dem Diamanten, der erst im Schoß der Erde liegt, zutage geschürft wird und schließlich in der Werkstatt des Spezialisten durch Schliff die seinem innern Wesen gemäße Form erhält. Man bezeichnet diese Erkenntnistheorie als naiven Realismus, wobei der Hinweis «naiv» im Sinn von «ursprünglich, eingeboren» zu verstehen ist.

Von diesem Standpunkt her gesehen hat nun um den Raumbegriff in neuerer Zeit eine schlecht zu begreifende Entwicklung eingesetzt. Einmal haben die geometrischen Begriffe die Tendenz angenommen, sich selbständig zu gebärden und sich der behütenden Gewalt des anschaulichen und des realen Raumes zu entziehen. Wie ein trotziges Pochen auf die Eigenständigkeit tönt der Beginn von David Hilberts «Grundlagen der Geometrie». Dies ist das Werk, mit dem um die Jahrhundertwende lange Bemühungen um die Vervollständigung der axiomatischen Gestalt der euklidischen Geometrie ihr Ziel erreicht haben. «Wir denken uns», heißt es hier, «drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte, die des zweiten nennen wir Gerade und die des dritten Ebenen [2].» Im weitern ist schon in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts durch Abänderung des am wenigsten

[2] Wir zitieren hier und im folgenden mit einiger Freiheit und verweisen den interessierten Leser auf die angegebene Quelle.

evidenten unter den etwa zwanzig Axiomen, des Parallelenpostulats, der euklidischen Geometrie ein erster Konkurrent entstanden, die sogenannte «nichteuklidische Geometrie». Seither aber haben die Mathematiker dem euklidischen Raum eine stattliche Zahl weiterer Raumbegriffe zur Seite gestellt, so daß in einem neuen mathematischen Lexikon unter dem Stichwort «Raum» an die 30 Raumsorten verzeichnet sind, wie «sphärischer Raum», «Linsenraum», «Mannigfaltigkeit», «Funktionenraum» usw. Kann man sich diese Räume vorstellen? Und kann man anschaulich fassen, was zum Beispiel die Physiker meinen, wenn sie erwägen, unser Weltall sei eine dreidimensionale Spähre, zwar unbegrenzt, aber endlich und gekrümmt? Oder sind alle diese Raumtypen bloß noch logische Konstruktionen?

Die ganze historische Entwicklung des Raumbegriffs zeigt nun mit aller Deutlichkeit, wie fragwürdig die Ansicht des naiven Realisten ist, wonach der Raumgedanke und seine Ausgestaltung zur Geometrie sich durch Abstraktion aus den anschaulichen Wahrnehmungen der Sinne bildet. Welche Wahrnehmung könnte hierzu mehr beitragen als der Blick auf den Himmel? Aber wie flächenhaft unräumlich bleibt doch das dabei zustandegekommene biblische Bild vom Himmel als Zeltdach! Richtig räumlich gesehen wurde der Himmel erst, als man den Sinneswahrnehmungen zu mißtrauen anfing. Anaximander, der mit Thales um 600 v. Chr. am Anfang der griechischen Philosophie steht, hatte als erster die Vision von der im Raum freischwebenden Erde, eine kühne logische Spekulation, die das Rätsel vom täglichen Untergang der Sonne und ihrem Verbleib bei Nacht löste. Noch sind alle Einzelheiten deutlich vom Denken her bestimmt, wenn in seinem Weltbild «die Erde sich in der Schwebe befindet, wegen des gleichen Abstandes von den Grenzen der Welt im Gleichgewicht verharrend. Ihre Gestalt sei gewölbt, einem Säulenstumpf vergleichbar; auf der einen Grundfläche wohnen wir, eine andere liegt ihr gegenüber» (Diels A 11). 150 Jahre später entwirft Demokrit das auch räumlich kühne spekulative Bild, «daß die Atome im unendlichen Leeren, wo es kein Oben und Unten, keine Mitte und keine äußerste Grenze gibt, sich so bewegen, daß durch ihre gegenseitige Annäherung und durch Zusammenstöße alles das entsteht, was in der sichtbaren Welt besteht. Aber die Atome sind Ideen», betont Demokrit, «allein dem Denken zugänglich und aller sinnlichen Natur bar» (Diels A 56, 57, 59). Gerade dieser vom Denken her erschlossene Raum Demokrits ist es nun, dessen geometrische Gesetzmäßigkeiten in Euklids Werk untersucht werden, und die spekulative Seite tritt in Euklids Darstellung ebenso klar hervor, wenn er beispielsweise seine Grundaussagen nicht als Axiome, als evidente Tatsachen, sondern als Postulate bezeichnet. Er schreibt nicht: «Es ist klar», sondern: «Es wird gefordert, daß man eine gerade Linie von einem beliebigen Punkt bis zu jedem andern ziehen kann.»

Die aktive Gestaltungskraft des Denkens wird noch deutlicher, wenn wir den meist viel zu wenig gewürdigten Anteil der Theologie an der Ausbildung der Raumvorstellung bedenken. Es hat nämlich nicht nur die Erforschung des Weltalls im Sinne der Naturwissenschaften, sondern ebenso das Nachdenken über Gottes Allgegenwart das Raumproblem zu einer der zentralen Fragen des abendländischen Denkens werden lassen. Der Gott Abrahams, der sich an keinen festen Ort bindet, der sich nicht wie Labans Gott bei Jakobs Wegzug aus Mesopotamien entführen und in einer Satteltasche verbergen ließ (1. Mose 31, 30 ff.), dieser Gott mußte zu Betrachtungen über den Raum Anlaß geben. Wie räumlich vermochte sich deshalb zum Beispiel schon König Salomo auszudrücken, wenn er bei der in allen Einzelheiten farbig überlieferten Einweihung des Tempels von Jerusalem im Jahre 950 v. Chr. in seiner Ansprache zum Volk fragte: «Aber sollte Gott denn wirklich auf Erden wohnen? Siehe der Himmel und aller Himmel Himmel mögen Dich nicht fassen, wie viel weniger dies Haus, das ich gebaut habe» (1. Kön. 8, 27).

Das Bewußtsein von der schöpferischen Kraft des Denkens einerseits, die Kritik an der Zuverlässigkeit unserer Sinne anderseits sind nun der Boden, von dem aus dem naiven Realismus schon vor zweieinhalb Jahrtausenden eine diametrale Sicht entgegengestellt wurde, eine Sicht, in welcher das wahre Sein nicht den Dingen zukommt, die sich unsern Sinnen zeigen, sondern einer Welt der Ideen, zu der wir durch unser Denken Zugang haben. Diese Welt der Harmonie und Ordnung, so lautet das Grundaxiom der auf Parmenides zurückgehenden idealistischen Erkenntnistheorie, ist nicht erdacht, sondern wird durch das Denken erkannt, sie ist nicht Wunschbild, sondern sie existiert; diejenige Welt jedoch, die wir mit den Sinnen wahrnehmen und die uns als selbstverständlich gegeben erscheint, hat keine Wahrheit. Von hier aus hat Plato als erster ausgesprochen, daß die mathematischen Gebilde von aller äußeren Erfahrung unabhängig sind und ihr sogar vorangehen. «Die mathematischen Begriffe sind Schöpfungen der Seele, und diese erhält die Begriffe, die sie bildet, nicht von den Sinnendingen; die letzteren sind vielmehr Offenbarungen der ersteren, und das Erzeugen und Gebären der Seele bringt ewige Begriffe ans Licht.» So faßt einer der letzten Philosophen des Altertums, der Neuplatoniker Proclus, Platos Gedanken in einer Einleitung zu Euklids Lehrbuch in Worte (Proclus, Euklidkommentar; ed. M. Steck 1945, pp. 171, 471 ff.). Der Raum selbst allerdings, das sehen wir in Proclus' Ausführungen weiter, ist kein derartiger mathematischer Begriff, keine Schöpfung der Seele. In der Tat tritt der Begriff des Raumes in Euklids Lehrwerk kein einziges Mal auf; es gibt in ihm Punkte, Linien, Flächen und Körper, aber alle diese Gebilde sind begrenzt, die Linien durch Punkte, die Körper durch Flächen. Das Räumliche wird bei Euklid nur im Hinweis angedeutet, ein Körper sei, was Länge, Breite und Tiefe habe (Elemente, XI, Def. 1); im übrigen aber verbirgt es sich in den Schnitteigenschaften der Ebenenstücke und Strecken. Sogar jede Aussage über eine Gerade in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung als die Gesamtheit aller Punkte, die man durch Verlängerung einer Strecke erreichen kann, hat Euklid umgangen. Entsprechend hat erst eine viel spätere Zeit, welche gegenüber dem Aktualunendlichen weniger Bedenken hegte, das 17. Jahrhundert, den Raum, den wir heute den euklidischen nennen, als Gesamtheit aller Punkte, die man durch Verlängerung der Sehnen eines Körpers erreichen kann, zum Objekt der Geometrie gemacht. Der Raum im ursprünglichen Sinne nun wird uns nach Proclus von der Phantasie, von der anschaulichen Vorstellung, geliefert. «Unser Verstand», schreibt er (loc. cit., pp. 203, 204, 486), «ist unfähig, die geometrischen Gebilde zusammengefaßt zu schauen, und er bringt sie aus sich heraus und führt sie in die anschauliche Vorstellung hinein, die vor seiner Tür liegt. In der anschaulichen Vorstellung und mit ihrer Hilfe läßt er die Erkenntnis sich abspielen. Wenn es jemals dem Verstand gelänge, die Ausspannungen der Figuren im Raum zusammenzufalten und die Begriffe und ihre Beziehungen gestaltlos und einsartig zu schauen, dann würde er freilich ganz anders seine ungeteilten, unausgedehnten, wesenhaften geometrischen Schöpfungen erblicken können. Dann wäre die Geometrie emporgezogen in eine vollkommenere und geistigere Erkenntnisweise; sie wäre erlöst von dem Zwang, räumliche Formen anzunehmen, dem sie in der Anschauung unterworfen ist».

Bis hierher hat unsere Betrachtung zwei recht gegensätzliche Ansichten über den Raum und die Geometrie einander gegenübergestellt. Wenn wir das Kraftfeld, in dem eine mathematische Raumlehre entsteht, richtig einschätzen wollen, können wir keinen der beiden Gesichtspunkte entbehren. Eine Vereinigung und zugleich Überwindung der zwei Erkenntnistheorien ist nun im Rahmen der Kantischen Philosophie erreicht worden. Drei Thesen Kants sind für unsere Fragestellung wesentlich, und wir legen sie zugleich mit Folgerungen dar, die sich für uns daran knüpfen.

1. Unsere Erkenntnis ist zusammengewachsen aus zwei Stämmen: sinnlicher Erfahrung und schöpferischem Verstand.

Die Vorstellungen des naiven Realismus und des Idealismus sind deshalb verschiedene Aspekte von Vorgängen, die in Wirklichkeit eng und unlösbar ineinander verflochten sind. Der Realismus macht den Zwang deutlich, dem eine mathematische Theorie vom Raum unterliegt, indem sich die geometrischen Begriffe in der Auseinandersetzung mit den Wahrnehmungen der Sinne bilden. Die idealistische Betrachtungsweise macht dagegen die Freiheit sichtbar, welche die Geometrie genießt: der Verstand formt nach seinen eigenen, bis zur spielerischen Willkür neigenden Gesetzen, und verschiedene logisch aufgebaute Geometrien mögen imstande sein, Wahrnehmungen der Sinne zu ergreifen und zu gliedern.

2. Alle unsere sichere Erkenntnis betrifft nicht eine außer uns liegende Realität, sondern unsere sinnlichen Wahrnehmungen, und nicht eine außer uns liegende Ideenwelt, sondern unsere Gedanken.

Es wäre äußerst lehrreich, in diesem Licht den Wandlungen im Selbstverständnis der exakten Wissenschaften nachzugehen. Wir müssen uns aber mit dem speziellen Hinweis begnügen, daß erst von hier aus verständlich wird, wie die verschiedenen mathematischen Raumbegriffe und die verschiedenen Geometrien friedlich nebeneinander bestehen und nicht die Mathematik in einander bekämpfende Richtungen spalten.

3. Der Raum ist eine Anschauungsform der Dinge für uns, und als Form der Anschauung geht er allen sinnlichen Wahrnehmungen voraus.

In diesem Zusammenhang besteht für uns die Möglichkeit, vollwertige Beispiele von mathematischen Räumen aus der unmittelbarsten Anschauung herzuleiten, und die komplizierteren Denkschemata, zu denen die moderne Physik für die logische Erfassung kosmischer und atomarer Vorgänge zwingt, ohne Schaden beiseite zu lassen.

Kant selbst hat versucht, von der Auffassung des Raumes als Anschauungsform her die durch die zweite These radikal aufgeworfene Frage nach Wahrheit für die Geometrie zu lösen. Weil ihm und seinen Zeitgenossen nur eine Geometrie bekannt war, verfiel er dabei der Täuschung, den Anschauungsraum mit dem mathematischen Raum als dem Inbegriff dieser Geometrie zu identifizieren. Die seither von der Mathematik geschaffene Vielfalt von Räumen führt uns aber zum Schluß, daß der Anschauungsraum noch so unfertig ist, daß aus ihm verschiedene mathematische Raumbegriffe entstehen können, und daß die ernsthafte Beschäftigung mit einem solchen Raumbegriff die Form der Anschauung wiederum beeinflußt und strukturiert.

In einem gewissen Sinn ist es übrigens gar nicht richtig, daß Kant nur einen einzigen begrifflich fixierten Raum, den euklidischen, hätte kennen können. Bis zum Ende des Mittelalters waren nämlich fast alle Erörterungen des Raumbegriffs Auseinandersetzungen mit der aristotelischen Vorstellung vom Raum gewesen. In verschiedenen Gestalten hat uns Aristoteles seine Raumlehre vermittelt: in der «Kategorienlehre» mit wenigen grundsätzlichen Bemerkungen, in den «Physikalischen Vorlesungen» sehr sorgfältig an die Sinneserfahrungen anschließend, und in der Schrift «Über den Himmel» kühn spekulierend zum Weltsystem ergänzt. Diese Raumlehre ist ein begriffliches, logisches System, allerdings weder vollständig noch widerspruchsfrei; und weil dabei der Raumbegriff von der Materie her gefaßt ist, handelt es sich nicht um eine geometrische, sondern um eine physikalische Theorie. Daß aber auch deren geometrische Aspekte von der euklidischen Vorstellung des Raumes abweichen, sehen wir schon aus dem bekanntesten Teil der aristotelischen Raumlehre, dem Bild vom Weltall: Die Erde ruht im Zentrum des Raumes, umringt von Wasser, Luft und Feuer, darum herum, den irdischen Anschauungen nur noch unvollständig zugänglich, liegen in je eigenen Sphären die Wandelgestirne, eine weitere Kugelschale enthält die Fixsterne, und alles ist umschlossen vom primum mobile, der Sphäre, die den vorgenannten ihre Bewegung überträgt; mit ihr endet der Raum, jenseits von ihr nach Raum und Zeit zu fragen, ist sinnlos. Wollten wir diesem Weltbild entsprechend eine aristotelische Geometrie aufbauen, so wäre es im Prinzip möglich, vom euklidischen Raum auszugehen. Dieser besteht ja vorerst aus einer Gesamtheit von Punkten, nämlich so vieler, wie die euklidischen Axiome in Betracht zu ziehen erlauben; in dieser Punktgesamtheit ist dann eine Distanzmessung festgelegt, und daraus ergibt sich die euklidische Kongruenzstruktur als die Mannigfaltigkeit der möglichen distanzerhaltenden Bewegungen. Für eine aristotelische Geometrie wäre nun die in Betracht zu ziehende Punktgesamtheit nur noch ein Ausschnitt aus dem euklidischen Raum, nämlich eine Kugel. Behalten wir darin die euklidische Distanzmessung bei, so ergibt sich in der Kongruenzstruktur eine Abstufung: diejenigen Bewegungen nämlich besitzen eine Sonderstellung, welche den ganzen aristotelischen Raum,

d. h. die Kugel, in sich überführen, also die Rotationen um das Raumzentrum; mit deren Bevorzugung zeichnet sich die sphärenartige Schichtung des Raumes nach je gleichwertigen Punkten ab.

Solange wir nun freilich den Zugang zur mathematischen Seite der aristotelischen Raumtheorie mit den euklidischen Begriffen suchen, bleibt eine wichtige Seite dieser Raumlehre verborgen. Dann nämlich entgehen uns die Betrachtungen über die Kontinuität, die Stetigkeit des Raumes. Aristoteles zählt den Raum neben der Zeit als Musterbeispiel einer stetigen Größe auf, und er versucht ausführlich, den Sinn dieser Aussage zu bestimmen. Nun läßt sich, was Stetigkeit bedeutet, auch heute nicht einfach, in Kürze und präzis zugleich ausdrücken. Grob gesagt verläuft die Bewegung eines Punktes stetig, wenn dieser keine Sprünge macht, also: wenn wir die Stelle ins Auge fassen, an der sich der Punkt zu einer bestimmten Zeit befindet, so soll er beliebig nahe bei dieser Stelle zu finden sein, solange wir ihn nur während einer hinreichend kurzen Zeitspanne suchen. Wie nahe und wie lange, dies läßt sich durch den Abstand und das Zeitmaß zahlenmäßig angeben. Auffallenderweise hat nun Aristoteles versucht, Stetigkeit ohne Benutzung des Zahlbegriffs zu umschreiben. Die Fachmathematik hat erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts einen Stand erreicht, von dem aus ein solcher Versuch als mathematisches Problem erscheint, und erst seit 50 Jahren, seit dem Erscheinen von F. Hausdorffs Buch über «Mengenlehre», kann die Aufgabe als gelöst gelten. 20 Jahre vorher war es R. Dedekind gelungen, wenigstens den speziellen Sachverhalt, daß eine Gerade kontinuierlich sei, ohne offene oder versteckte Benutzung der Zahlen in präzise mathematische Begriffe zu fassen, und es ist erstaunlich, wie nahe seine Definition der von Aristoteles versuchten allgemeinen Stetigkeitsumschreibung kommt, wonach eine Menge stetig ist, wenn ihre Teile eine gemeinsame Grenze haben (Kat. 6, 4 b—5 a; Phys. Vorl. V 3, 227 a). Die moderne Mathematik hat nun den aristotelischen Gedanken, daß der Raum zuallererst etwas Kontinuierliches sei, übernommen und ausgestaltet, und sie bezeichnet als Raum im weitesten Sinne des Wortes jede Gesamtheit von Dingen, in der eine Stetigkeitsstruktur festgelegt ist, d. h.: in welcher ein Gerüst von exakten Begriffen gestattet, die übliche Vorstellung der stetigen Bewegung eindeutig als solche zu definieren. In einem solchen Raum können im allgemeinen nicht mehr die Gesetzmäßigkeiten bei kongruenten Bewegungen der Figuren untersucht werden, weil es keine Kongruenz gibt, wohl aber diejenigen bei stetigen Veränderungen der Figuren.

Daß diese Verallgemeinerung des Raumbegriffes auch in der Alltagssprache möglich ist, zeigt sich etwa darin, daß in den Berichten über das Kunstleben im Feuilletonteil der Zeitungen von einem «Klangraum» oder von einem «Farbraum» die Rede sein könnte. Ein Farbraum zum Beispiel wäre die Gesamtheit aller möglichen Farbeindrücke. Daß eine Farbe sich kontinuierlich in eine andere verwandelt, in eine andere übergeht, vermögen wir uns leicht vorzustellen, und es ist auch klar, daß dieser kontinuierliche Übergang auf verschiedenen Wegen, wenn nötig auch über eine beliebig vorgeschriebene Zwischenstation, erfolgen kann. Dies entspricht der geometrischen Vorstellung, wie ein Punkt längs verschiedenen kontinuierlichen Kurven in einen andern übergehen kann; man beachte aber, daß für die Farben wohl schwerlich allgemeine, genaue Einigung zu erzielen ist, welche dieser Überführungsarten als kürzeste oder als geradeste bezeichnet werden könnte. Dieses nichtmathematische Beispiel zeigt die Richtung, in der die von der modernen Mathematik geschaffene allgemeine Raumlehre liegt, in deren Zentrum die Untersuchung der Stetigkeit steht.

Analog wie das euklidische Axiomensystem der Geometrie durch die implizite Definition der Strecken, der Kongruenz usw., die Möglichkeit schafft, die Distanzmessung einzuführen, so ermöglicht es das von F. Hausdorff angegebene Axiomensystem der Raumlehre, die Stetigkeit zu erklären, indem der Begriff der Umgebung eines Punktes axiomatisch charakterisiert wird. Ein Axiom zum Beispiel, das auf das Vorhandensein großer Umgebungen hinzielt, besagt, daß auch der ganze Raum als Umgebung zu gelten habe, ein anderes, das auf das Vorhandensein kleiner Umgebungen hinzielt, fordert, daß je zwei verschiedene Punkte auch immer Umgebungen hätten, die nirgends zusammenstoßen. Dies ist nur eine bruchstückhafte Andeutung, aber sie illustriert zugleich die Bemerkung von Aristoteles, daß die Stetigkeit vom Begriff des Benachbartseins her zu bestimmen sei (Phys. Vorl. V 3, 227a).

Eine solch allgemeine Auffassung vom Raum läßt sich nun schwerlich noch unter der Bezeichnung Geometrie, was Erd-Messung bedeutet, unterbringen. Einmal ist ja die Vorstellung des Raumes nicht mehr von der Erde, nicht einmal mehr vom Weltraum abgeleitet, sondern sie schließt ebensosehr an die Anschauung des Farb- und Klangraumes an. Weiter werden aber auch nicht mehr die Gesetzmäßigkeiten des Messens untersucht, sondern die Gesetze der stetigen Abbildungen. Die Geometrie im herkömmlichen Sinn erscheint als hochspezialisierter Einzelfall dieser neuen mathematischen Disziplin, die zutreffenderweise mit dem griechischen Wort für Raumlehre als Topologie bezeichnet wird. In der modernen Gliederung erscheint die Topologie neben der Algebra als zweiter Hauptstamm der Mathematik. Es ist aber nur einer ihrer Zweige, der sich mit dem Raumbegriff in seiner vollen Allgemeinheit befaßt; andere ihrer Zweige untersuchen spezielle Räume, wie sie sich in verschiedenen Gebieten der Mathematik, etwa der Funktionenlehre, aufdrängen; ganz besonders kräftig haben sich auch die Zweige entwickelt, die sich mit Räumen beschäftigen, welche unserer anschaulichen Vorstellung vom Weltraum nahestehen. Auf diese wollen wir nun näher eingehen.

Wenn ich den Raum überprüfe, wie ich ihn etwa bei geschlossenen Augen in meiner innern Anschauung finde, so scheint es mir, daß er nicht mit dem von der euklidischen Geometrie beschriebenen Raum in seiner bis ins Unendliche reichenden Ganzheit übereinstimmt, wohl aber (kürzehalber sei auf Vorbehalte und Präzisierungen verzichtet) recht gut mit einem gegen außen hin verschwimmenden kugelförmigen Ausschnitt daraus. Dabei bin ich mir verstandes- und erfahrungsmäßig bewußt, daß ich nur einen Teil des Weltraumes in meiner Anschauung erfasse. Folge ich nun dem ursprünglichsten Verfahren, das sich auch bei Aristoteles noch abzeichnet, so lege ich in der Spekulation, also durch eine Bewegung des Verstandes, um diese Raumkugel meiner Anschauung noch einige zusätzliche Schichten, in denen ich die mir rätselhaftern Dinge, von denen ich Kunde habe, unterbringe, beispielsweise die Gestirne. Folge ich hingegen der euklidischen Geometrie, so erweitere ich meine Anschauungskugel nicht durch Darumlegen weiterer Schichten, sondern indem ich diese Kugel durch eine Denkbewegung in die Welt hinein ausspanne. Ich stelle mir beispielsweise einen Maßstab vor und lasse ihn wachsen, und mit ihm wachsen alle übrigen geometrischen Figuren und besitzen, wie sehr sie auch gewachsen und meiner Anschauung entschlüpft sind, in meinem Denken genau die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie im Anfangsstadium des Wachsens, bloß daß sie nicht mit dem ursprünglichen, sondern mit dem mitgewachsenen Einheitsmaß auszumessen sind. Und umgekehrt: wenn das durch viele Einzelbeobachtungen erschlossene Wissen vom Planetensystem meine Anschauung bei weitem überschreitet, so lasse ich durch eine Bewegung des Verstandes alle Distanzen, nicht aber mein Bewußtsein, zusammenschrumpfen, bis ich vor mir, im Feld meiner Aufmerksamkeit, die Planeten als kleinste Stäubchen ihre fast kreisförmige Bahn um die stecknadelkopfgroße Sonne ziehen sehe. Dieses teleskopische Denken, mit dem ich einen beliebig großen Ausschnitt des Weltraums in den Anschauungsraum hinein verkleinere und dann diesen samt seiner Kongruenzstruktur wieder ausspanne, diese doppelte Verstandesbewegung ist es, welche uns glauben macht, unser Weltraum sei der euklidische Raum und anders lasse er sich gar nicht denken. Aber gibt es nicht vielleicht auch andere, vielleicht sogar natürlichere Denkbewegungen, welche die Enge der Anschauung auszuweiten gestatten und welche sich mathematisch so präzisieren lassen, daß ein exakter geometrischer Raumbegriff entsteht? Als Antwort auf diese Frage schlägt der Topologe in seinem umfangreichen Katalog von Räumen das Kapitel auf, das den Titel trägt: «Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten». Es ist dies ein Fachausdruck, die Bezeichnung für eine ganz bestimmte Sorte von Räumen mit Stetigkeitsstruktur, und demgemäß hat der Leser zur Vermeidung von Ungereimtheiten im folgenden den Sinn, den die Alltagssprache mit dem Wort «Mannigfaltigkeit» verbindet, beiseite zu lassen. Es soll jetzt aber nicht eine Definition für die Mannigfaltigkeiten vorgelegt werden, sondern einige unmathematische Beispiele mögen das Raumgefühl aufzeigen, das sich im mathematischen Begriff widerspiegelt.

Raum meint in erster Linie Weltraum, und die Welt braucht nicht notwendigerweise mit den Absichten und mit den Augen und Apparaten des Physikers betrachtet zu werden. Sie läßt sich u. a. auch so sehen, wie dies Thomas Mann in einer Episode seines Romans über den biblischen «Joseph und seine Brüder» schildert. Von seinen Brüdern verkauft, zieht Joseph recht- und namenlos in der Karawane der ismaelitischen Kaufleute gegen Ägypten und überrascht bald seine neuen Herren mit der vorlauten Frage, wohin sie ihn führten. «Wir führen dich doch gar nicht! Du bist zufällig bei uns und ziehst mit uns, wohin wir ziehen. Das kann man doch nicht gut ‚führen' nennen. Meinst du Heda, wir reisen, damit du irgendwohin kommst?» «Ich denke nicht daran», versetzte Joseph, «weiß ich doch, daß ihr, meine Herren, auf eigene Hand reist, nach euren Zwecken und wohin euch der Sinn steht, und will gewiß eurer Würde und Selbstherrlichkeit nichts anhaben mit meiner Frage. Aber siehe, die Welt hat viele Mitten, eine für jedes Wesen, und um ein jedes liegt sie in eigenem Kreise. Du stehst nur eine halbe Elle von mir, aber ein Weltkreis liegt um dich her, dessen Mitte nicht ich bin, sondern du bist's. Ich aber bin die Mitte von meinem. Darum ist beides wahr, wie man redet, von dir aus oder von mir. Denn unsere Kreise sind nicht weit voneinander, daß sie sich nicht berührten, sondern Gott hat sie tief ineinandergerückt und verschränkt, also daß ihr Ismaeliter zwar ganz selbstherrlich reist und nach eigenem Sinn, wohin ihr wollt, außerdem aber und in der Verschränkung Mittel und Werkzeug seid, daß ich an mein Ziel gelange. Darum fragte ich, wohin ihr mich führt.»

Was an dieser Ansicht von der Welt und damit auch vom Raum verblüfft, ist sicher vielmehr die Sehweise als das zustandekommende Raumbild; denn der Gedanke von den verschränkten Weltkreisen steht in keinem Widerspruch zur euklidischen Vorstellung. Die Betonung der Sehweise ist jedoch wesentlich, denn wie die Kreise verschränkt sind, ist offen gelassen. Die Vielzahl der Verschränkungsmöglichkeiten erlöst nun den vorgestellten Weltraum vom Zwang, euklidisch sein zu müssen, aber läßt ihm die Möglichkeit, eventuell doch euklidisch zu sein.

Den Gedanken von der Freiheit in der Verschränkung individueller Weltkreise finden wir von Ricarda Huch in ihrer Einleitung zu den Betrachtungen über «Urphänomene» folgerichtig weitergeführt. Das Erlebnis, wie sie, in ihre eigene Welt versponnen, während längerer Zeit ihren Ferienort mit ganz traumhaft unwirklichen Maßstäben betrachtete, erinnert sie an einen Ausspruch Heraklits: daß wir wachend in einer gemeinsamen Welt leben, daß aber im Traume jeder sich von ihr ab seiner eigenen Welt zuwendet. Beunruhigt durch ihre Erkenntnis, wie sehr unsere Träume auch in den Tag hinein wirken, stellt sie sich die Frage: Wenn jeder seine eigene Welt hat, wie kommt es überhaupt zu einer gemeinsamen Welt? Als Antwort drängt sich ihr die Einsicht auf, daß die vielen Einzelwelten nicht einfach von vornherein verschränkt sind, sondern zu einer gemeinsamen Welt zusammengeschweißt werden müssen, und daß dieses Zusammenschweißen aus Übereinkünften besteht. Wenn üblicherweise ein solches Übereinkommen durch die gemeinsame Heranbildung in Übereinstimmung mit einer starken Tradition zustande kommt, so macht doch gerade dieses Beispiel mit der ständigen Gefährdung der Tradition auch die weitgehende Willkür dieser Übereinkünfte deutlich; diese Willkür im Zusammenschweißen bewirkt, daß die Welt vielfacher Gestalt fähig ist. Wir leiten diesen Gedanken, von Ricarda Huch abweichend, ins Mathematische weiter: eine Mannigfaltigkeit ist ein Raum, der sich durch die Verschweißung individueller Einzelräume ergibt, von denen jeder eine euklidische Kugel ist; die Verschweißung kommt durch eine mathematisch zu präzisierende Übereinkunft zwischen je zwei dieser Kugeln zustande, welche Punkte einander entsprechen und als ein- und derselbe gelten sollen.

Wenn nun ein geometrisches Gebilde zugleich von mehreren dieser Kugeln erfaßt wird, weil es in überlappenden Teilen liegt, so läßt sich, je nach der Verschweißung, von diesen Kugeln her Verständigung über die Eigenschaften dieses Gebildes erzielen oder nicht. Was in einer Kugel als gerade Strecke erscheint, braucht von einer andern her gesehen nicht gerade zu sein. Genau gleich erscheint beispielsweise in einem Atlas die südliche Landesgrenze von Kanada, die auf einer Nordamerikakarte weithin gerade verläuft, dem Betrachter einer Zirkumpolarkarte durchwegs als gekrümmt. Aber auch losgelöst von diesem Vergleich ist die Eigenschaft, etwas mit einem Blick als gerade zu erkennen, unserm Auge weit weniger eingeboren, als wir meist glauben. Davon kann man sich schon durch einige einfache Anordnungen für optische Täuschungen überzeugen; vor allem aber zeigen dies (vgl. M. von Senden, Diss. Kiel 1931) die Berichte über Fälle, wo Erwachsene, welche blind geboren wurden, durch eine Operation das Augenlicht wieder erlangten; sie waren in den ersten Monaten nicht in der Lage, ein Dreieck als geradlinig und einen Kreis als rund zu erkennen. Dem entsprechend ist im allgemeinen in einer Mannigfaltigkeit keine Übereinkunft über Geradheit zu erzielen: die Mannigfaltigkeit besitzt dann keine lineare Struktur. Was wir aber von einer Mannigfaltigkeit minimal fordern, ist die Verständigungsmöglichkeit über Stetigkeit: eine Bewegung, die in zwei zusammengeschweißten Einzelwelten verläuft, soll von beiden in gleicher Weise als stetig oder als nichtstetig wahrgenommen werden. Eine Mannigfaltigkeit besitzt nach dieser Forderung also eine Stetigkeitsstruktur, und die vorhin erwähnten Berichte über Blindgeborene rechtfertigen diese Forderung, wenn wir die Verwurzelung einer Raumlehre in der Anschauung als Maßstab setzen. Die genannten Möglichkeiten sind nur die zwei Enden eines ganzen Spektrums: ist man sich in den überlappenden Teilen von den verschiedenen Kugeln her für alle Funktionen einig, ob sie differenzierbar sind, so entsteht die Klasse der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, für deren Untersuchung nun der ganze machtvolle Apparat der Differentialrechnung eingesetzt werden kann. Ist man sich zusätzlich über die Längenmaßzahl von Kurven einig, so erhält man die Klasse der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, welche in der allgemeinen Relativitätstheorie zur Beschreibung der Naturgesetze benutzt werden. Mit ihnen hat der geniale Mathematiker B. Riemann vor etwas über 100 Jahren den Grund gelegt zu der erst in unserem Jahrhundert zur Entfaltung gelangten modernen Raumlehre. Wir brauchen nur für eine der genannten oder der weitern möglichen Klassen die Frage nach einer Klassifizierung der zu ihr gehörenden Räume zu stellen, um schon in die Mitte der aktuellen Forschung zu gelangen.

Obgleich der Begriff der Mannigfaltigkeit in seiner vollen Allgemeinheit verhältnismäßig jung ist, wurde das schönste und nach dem euklidischen Raum einfachste Beispiel einer Mannigfaltigkeit, die dreidimensionale Sphäre, schon vor Jahrhunderten als Raumform des Weltalls vorgeschlagen, nämlich von Dante Alighieri. Auch in dieser Konstruktion zeigt sich die in ihm geistesgeschichtlich einzigartige Vereinigung von Gelehrtheit und Unbefangenheit, von Phantasie- und Formkraft. Es ist ratsam, sich vor dem Eingehen auf Dantes Gestaltung eine dreidimensionale Sphäre durch ihre Analogie zur zweidimensionalen, etwa zur Erdoberfläche, zu veranschaulichen. Diese zerfällt durch den Äquatorkreis in zwei Teile, welche wir durch zwei kreisscheibenförmige Kartenbilder, eines für die Süd- und eines für die Nordhalbkugel, wiedergeben. Bewegt sich ein Punkt vom Südpol her gegen den Nordpol, so entfernt er sich in der ersten Karte vom Mittelpunkt gegen deren Randkreis, im Moment, wo er den Äquator überschreitet, tritt er aus der ersten Karte aus und in die zweite ein und bewegt sich gegen deren Zentrum. Um eine korrekte Vorstellung von der Kugeloberfläche zu bekommen, genügen uns diese zwei Karten, vielleicht mit einem Netz von Meridianen und Breitenkreisen versehen, wenn wir uns noch vor Augen halten, wie sie am Äquatorkreis miteinander zu verheften sind. Genau gleich zerfällt nun in einer Dimension höher eine dreidimensionale Sphäre durch eine Kugelfläche in zwei Teile, welche wir durch gewöhnliche Vollkugeln wiedergeben können; die Zentren dieser beiden Kugeln sind ein Pol und ein Gegenpol der Sphäre, und bewegt sich ein Punkt der Sphäre stetig vom Pol zum Gegenpol, so zeigt sich dies in den Kugeln als eine Bewegung vom Zentrum der einen gegen deren Rand, im Augenblick, wo er diesen erreicht, erscheint er auch auf der Oberfläche der zweiten Kugel, von wo aus er sich dann deren Zentrum, dem Gegenpol zu bewegt. Zwei Vollkugeln zusammen mit der Verheftungsvorschrift für ihre Oberflächen geben uns so eine vollständige Vorstellung von der dreidimensionalen Sphäre.

Im zweidimensionalen Falle sind die beschriebenen beiden Erdkarten nun allerdings nicht recht handlich, wenn wir die Länder der Äquatorialzone betrachten, denn wir haben unsere Vorstellungen immer aus zwei getrennten Stücken zusammenzusetzen. Wann man dies vermeiden will, so kann man die Karte der Südhalbkugel nach außen hin noch erweitern, so daß sie in die nördliche Hemisphäre hineingreift; nach außen hin werden auf diese Weise der südlichen Karte diejenigen Zonen angefügt, die auf der nördlichen Karte nach innen hin geschichtet schon vorhanden sind. Wenn wir wollen, können wir so jeden nördlichen Punkt auch noch auf der Südkarte darstellen, außer den Nordpol selbst. In gleicher Weise können wir die Nordkarte erweitern, und einzig der Südpol kann auf ihr nicht als ein Punkt erscheinen. Es ist klar, daß die Betrachter der beiden Karten ihre Vorstellungen nicht mehr bloß am Äquator verheften, sondern gebietsweise verschweißen müssen. Das entsprechende Verfahren im dreidimensnionalen Fall liegt auf der Hand: jede der beiden Vollkugeln, in welche die dreidimensionale Sphäre zerfallen ist, kann nach außen hin durch diejenigen Schichten noch erweitert werden, die in der andern Kugel nach innen hin aufeinanderfolgend schon dargestellt sind, einzig Pol und Gegenpol sind bloß in einer der Vorstellungen erfaßbar, aber dort im Zentrum. Die Gesetze, nach denen die Betrachter der beiden Kugeln ihre Vorstellungen zu verschweißen haben, lassen sich durch einfache Formeln angeben und sind derart, daß sich die beiden sogar über Längen und Winkel verständigen können. Auf diese Weise entsteht die dreidimensionale Sphäre bei passender Verschweißung zweier kugeliger Weltkreise.

Genau diese Erfassung des Weltganzen durch zwei sich polar entsprechende Vorstellungen schildert Dante im 28. Paradiesgesang der göttlichen Komödie. Nach seinem Aufflug durch immer lichtere Himmel sieht er, in der obersten, neunten Sphäre angelangt, in den Augen Beatrices, die ihn führt, einen leuchtenden Punkt gespiegelt, und als er sich wendet, schaut er den Punkt selber: so unendlich klein, daß die kleinsten Sterne sich neben ihm wie Monde ausnehmen müßten, aber von so durchdringendem Licht, daß er dessen Glanz nicht zu ertragen vermag. Um diesen Punkt kreist in Mondhofabstand ein Lichterkranz mit ungeheurer Schnelle, und um ihn ein zweiter, ein dritter, und noch zweimal eine Dreiheit, immer blasser und weiter werdend und immer langsamer sich drehend. Dante ahnt, daß er in dem unbewegten hellsten Punkt, der all den Kreisen um ihn ihr Licht und ihre Bewegung spendet, eine Offenbarung der Gottheit und in den sich bewegenden Kreisen die geistigen Wesenheiten der neun Sphären sieht; aber Zweifel plagen ihn, denn in der körperlichen Welt liegen die Sphären um so weiter außen, je göttlicher sie sind, während ihm jetzt die Ordnung umgestellt erscheint. Um ihm die Wahrheit zu eröffnen, lehrt ihn Beatrice, daß er die beiden

Erscheinungsweisen, die körperliche und die geistige, verschmelzen darf, und sie gibt ihm gleichsam eine Formel für die Verschweißung an:

Li cerchi corporai sono ampi e arti
secondo il più e 'l men de la virtute.

Teils weit, teils enge sind die Körperkreise
Der Kraft nach, die durch ihre Teile rinnt
Bei dem in stärkrer, dem in schwächrer Weise.

Größre Güte größres Heil ersinnt
Und größres Heil den größrern Körper weist,
Wenn alle Teile gleich erfüllet sind.

Die Sphäre, die das Weltall mit sich reißt,
Das restliche, von außen her, entspricht
Dem Kreis mit größter Liebe, größtem Geist.

Drum, wenn du auf die Kraft nur legst Gewicht
und nicht, wie groß und klein sie scheinen
Die Kreise, die sich zeigen deiner Sicht,

Kannst du in voller Konsequenz vereinen
Den Sphärenhimmeln ihre Wesenheit,
Den großen mehr, und minder nur den kleinen.

Dante hat weder den Symbolgehalt noch die im Rahmen der zeitgenössischen Aristoteleskritik aktuelle naturwissenschaftliche Seite dieses Raumbildes weiter ausgeführt. Aber aus dem Zusammenhang, in dem seine Verse stehen, ergibt sich unbezweifelbar, wie sehr er sich bewußt war, daß er im poetischen Gewand eine der Wissenschaft zugehörige Fragestellung darstellte, wie er sie auch im fachwissenschaftlichen Stil seiner Zeit, mit Begründungen und Beweisen versehen, hätte darlegen können. Aber auch in dieser knappen Fassung vermag Dantes Gestaltung, wie überhaupt die Beschäftigung mit den Vorstellungen vom Raum in ihren geschichtlichen Formen, dem heutigen Mathematiker mit seltener Deutlichkeit den Zusammenhang seines speziellen Fachgebietes mit dem allgemeinen Strom philosophischen Denkens vor Augen zu führen. Umgekehrt ermöglicht die Erörterung dieser Fragen dem Laien ein Verständnis für die zweck- und zeitlosen Aspekte mathematischer Forschung und einen Blick zwar nicht auf die Arbeitsweise aber doch auf einige zentrale Problemstellungen der modernen Geometrie.