

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern
Band: 22 (1964)

Artikel: Mathematische Erkenntnis
Autor: Wilker, Peter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319531>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Peter Wilker

Mathematische Erkenntnis¹

Sie kennen sicher alle die Anekdote über Archimedes, die vom römischen Architekturschriftsteller Vitruvius erzählt wird. Archimedes, mit der Aufgabe beschäftigt, den Silbergehalt eines angeblich rein goldenen Kranzes zu ermitteln, sei in ein Bad getreten und habe beim Eintauchen seines Körpers in die Wanne das Austreten des Wassers aus ihr beobachtet. Dies ließ ihn plötzlich die Lösung des Problems erkennen, worauf er — so schreibt Vitruvius — von Freude getrieben aus der Wanne sprang und unbekleidet nach seinem Hause gelaufen sei mit dem Rufe: Eureka, Eureka, ich habe es gefunden.

Ich möchte dieser bekannten, wenn auch wahrscheinlich nur erfundenen Geschichte eine andere, diesmal wahre, gegenüberstellen. Sie handelt von Karl Friedrich Gauss, der sich als Student mit dem Problem der Konstruktion von Vielecken beschäftigte. Er berichtete später in einem Brief, daß ihm die Lösung am Morgen des 30. März 1796 gelang: «Durch angestregtes Nachdenken», so schrieb er, «glückte es mir bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) die Zusammenhänge auf das Klarste anzuschauen».

Die beiden Geschichten haben etwas gemeinsam: sie handeln von der plötzlichen Erkenntnis, die einen Menschen geradezu überfallen kann, wo auch immer er sich aufhält. Andererseits besteht zwischen ihnen doch ein wichtiger Unterschied. Die Erkenntnis des Archimedes betraf einen physikalischen Sachverhalt, also eine Frage über die Natur, während Gauss mit einem rein mathematischen Problem beschäftigt war, dessen Lösung keinerlei naturwissenschaftliche Bedeutung zukommt. Entdeckungen wie die Gausssche, die sich ganz in der Gedankenwelt des Mathematikers bewegen und keine unmittelbare Beziehung zur Außenwelt haben — solche Entdeckungen sind es, die ich in der Folge als «Ma-

¹ Antrittsvorlesung, gehalten am 31. Oktober 1964 an der Universität Bern. Institut für angewandte Mathematik der Universität Bern.

thematische Erkenntnis» bezeichnen möchte. Meine Vorlesung will versuchen, an Hand einiger einfacher Beispiele Eigenschaften solcher Erkenntnis zu demonstrieren und zu besprechen.

Ich beginne gerade mit dem Problem von Gauss, das ich zuerst kurz präzisieren muß. Es handelt sich um die folgende Aufgabe: gegeben sei ein Kreis — gesucht ist eine Methode, in diesen Kreis ein regelmäßiges n -Eck einzubeschreiben, also ein Vieleck mit einer vorgegebenen Zahl n von gleichlangen Seiten. Zur Konstruktion darf dabei, das ist entscheidend, ausschließlich Zirkel und Lineal verwendet werden. Die Frage lautet: für welche Seitenzahlen n ist dies möglich? Man weiß von altersher, daß 3-, 4- und 5-Eck konstruierbar sind, sowie weitere, etwa 6-Eck oder 10-Eck, deren Seitenzahlen sich aber aus den erstgenannten leicht kombinieren lassen. Gauss stellte sich die Aufgabe, überhaupt alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Vielecke zu finden.

Ich möchte nun das Hauptgewicht auf die folgende Feststellung legen: sobald das Problem einmal gestellt ist, erfordert seine Lösung einen Erkenntnisakt. Zu jeder Zahl n gehört entweder ein konstruierbares Vieleck oder nicht. Wir können an dieser Tatsache in keiner Weise etwas ändern, sie ist gewissermaßen eine der Zahl n innewohnende Eigenschaft, die aufzudecken wir versuchen müssen. Der Mathematiker steht also einer Erscheinungswelt gegenüber, deren Gesetze er ergründen muß, die er aber in keiner Weise beeinflussen kann, genau so wie zum Beispiel ein Astronom die Bewegungsvorgänge im Planetensystem studieren, sie aber nicht abzuändern vermag.

Der damit angeschnittene Vergleich mit naturwissenschaftlicher Erkenntnis zeigt sogleich besondere Eigentümlichkeiten der mathematischen. Während der Naturforscher oft die Möglichkeit hat, ihm noch unbekannte Naturgesetze wenigstens genähert zu erfassen, ist das in der Mathematik in den meisten Fällen sinnlos. So ist zum Beispiel die angenäherte Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks irgendeiner Seitenzahl überhaupt kein Problem, da sie sich stets, und zwar mit beliebiger Genauigkeit, durchführen läßt. Sie hat mit der uns beschäftigenden Frage der exakten Konstruktionsmöglichkeit überhaupt nichts zu tun. Was erreicht werden muß, ist eine exakte Erkenntnis, welche jede Seitenzahl n zur Konstruierbarkeit oder Nicht-Konstruierbarkeit des zugehörigen Vielecks in Beziehung setzt.

Es läßt sich aber noch mehr sagen. Die Geschichte der Naturforschung lehrt uns, daß fast alle der von uns erkannten Naturgesetze nur provisorisch sind, da sie durch weitergehende Beobachtungen und neue Über-

legungen verbessert oder verschärft zu werden pflegen. In der Mathematik ist das nicht der Fall: ist einmal, um bei unserem Beispiel zu bleiben, erkannt, welche regelmäßigen n -Ecke eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal gestatten, so kann diese Erkenntnis nicht mehr umgestoßen oder abgeändert werden: sie ist unveränderlich. Während also viele naturwissenschaftliche Erkenntnisse vergangener Jahrhunderte heute nur noch historisches Interesse beanspruchen, sind die meisten der gesicherten mathematischen Ergebnisse vergangener Zeiten heute noch ebenso gültig wie zur Zeit ihrer Entdeckung.

Wenn ich soeben mathematische Erkenntnis «exakt» und «unveränderlich» nannte, so darf man allerdings diese beiden Worte nicht allzu absolut verstehen. Unser menschliches Vermögen, exakte Gedanken zu fassen und exakte Begriffe zu verwenden, ist begrenzt. Außerdem ist der Begriff «exakt» selber Wandlungen unterworfen, im allgemeinen in Richtung auf seine Einengung und Verschärfung hin. Das zwingt manchmal zu einer Revision bestehender Erkenntnisse, die aber in den meisten Fällen nur deren Form oder deren Beweis, sehr selten ihren eigentlichen Inhalt betrifft.

Ich will noch ganz kurz vom Ergebnis berichten, das Gauss an jenem denkwürdigen Morgen erzielt hat. Man kann leicht das allgemeine Problem der Vieleckkonstruktion auf gewisse Grundvielecke zurückführen, aus denen sich alle weiteren elementar gewinnen lassen. Man hat dann nur nötig, die Seitenzahlen der konstruierbaren Grundvielecke zu ermitteln.

Gauss gelang es auf Grund sehr tiefsinniger algebraischer Überlegungen — die um so bewunderungswürdiger erschienen, als er damals noch nicht einmal 19 Jahre alt war — es gelang ihm also zu beweisen, daß diese Seitenzahlen Primzahlen sein müssen, also Zahlen aus der Reihe 2, 3, 5, 7, 11, 13 usw., Zahlen, die sich nicht in kleinere Faktoren zerlegen lassen. Außerdem kommen aber nicht irgendwelche Primzahlen in Frage, sondern nur solche, welche die Form $F_k = 2^{(2^k)} + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, haben.

Gauss setzte für k der Reihe nach die angegebenen Werte ein und fand als Seitenzahlen konstruierbarer Grundvielecke zuerst $F_0 = 3$ und $F_1 = 5$, also die altbekannten 3- und 5-Ecke, dann aber neu $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ und $F_4 = 65\,537$, alles Primzahlen und somit auch Seitenzahlen von Vielecken, die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Die nächste, in Frage kommende Zahl ist $F_5 = 4\,294\,967\,297$; sie war

aber schon von Euler 1739 als zerlegbar erkannt worden, so daß zu ihr kein konstruierbares Vieleck gehört.

Auch weiterhin hat sich die Suche nach neuen Primzahlen F_k bisher als ergebnislos erwiesen. Das phantastisch schnelle Anwachsen dieser Zahlen, hervorgerufen durch die Potenz im Exponenten von 2, erschwert dabei diese Suche sehr bald bis zur praktischen Undurchführbarkeit. Bis heute sind — unter anderen — alle Zahlen von F_5 bis F_{16} als zerlegbar bekannt. Die zuletzt untersuchte war F_{14} , die im August 1963 auf einer elektronischen Maschine getestet und als zerlegbar befunden wurde, was eine Rechenzeit von rund 50 Stunden erforderte. Die erste Zahl, über deren Charakter man heute noch nichts weiß, ist F_{17} , eine Zahl, die ausgeschrieben rund 40 000 Dezimalziffern benötigt. Sie ist vielleicht eine Primzahl und würde dann die Seitenzahl eines konstruierbaren Vielecks darstellen. Die vielen negativen Ergebnisse haben allerdings die Vermutung aufkommen lassen, daß es außer den von Gauss betrachteten fünf Primzahlen F_0 bis F_4 keine weiteren dieser Art mehr gebe. Ein Nachweis dieser Vermutung ist aber bis heute nicht gelungen.

Ich gehe nun zu einem andern Beispiel über, an welchem ich nochmals zu demonstrieren versuchen will, warum man das Auffinden mathematischer Gesetzmäßigkeiten, warum man Entdeckungen in der Welt der mathematischen Objekte und Regeln als Erkenntnisakte ansehen muß. Das Beispiel handelt von den Grundlagen der Geometrie; ich muß zu seiner Erklärung etwas ausholen.

Wenn man die gewöhnliche Geometrie folgerichtig aufbauen will, muß man gewisse Grundforderungen aufstellen, von denen die Beweise und Konstruktionen ausgehen können. Eine der berühmtesten dieser Forderungen steht schon bei Euklid. Es seien in einer Ebene eine Gerade g und ein nicht auf ihr liegender Punkt gegeben; gesucht ist durch diesen Punkt eine Parallele zu g , also eine zweite Gerade, welche die erste nicht schneidet. Eine solche Parallele läßt sich leicht durch zweimaliges Lotfällen erhalten. Die Forderung nun, die Euklid aufstellt, lautet: mehr als diese eine, soeben gefundene Parallele soll es nicht geben.

Aus Gründen, auf die ich hier nicht eingehen kann, haben in den ersten Dezennien des letzten Jahrhunderts verschiedene Mathematiker versucht, von dieser Forderung abzugehen. Was geschieht, so fragten sie sich, wenn man zuläßt, daß man die eine Parallele noch ein wenig drehen kann, ohne schon die gegebene Gerade zu schneiden. Da dies in der alten, Euklidischen Geometrie nicht zulässig ist, wird man mit dieser

Forderung eine neue Geometrie erzwingen, deren Gesetzmäßigkeiten es zu erforschen gilt.

Eines der ersten dabei auftretenden Probleme ist das folgende. Denken wir uns die Euklidische Parallele aus ihrer Lage gedreht, so wird es natürlich durch zu starke Drehung zum Schnitt mit der gegebenen Geraden g kommen. Es muß also, so verlangt die neue Geometrie, irgendwo eine Grenzlage geben, in welcher die Paralleleneigenschaft gerade aufhört. Damit ist eine Grenzgerade definiert, welche die Schneidenden von den Nichtschneidenden trennt. Sie bildet mit dem Lot einen bestimmten Winkel p , den sogenannten Parallelwinkel. In der Geometrie Euklids ist dieser Winkel immer ein rechter, in der neuen Geometrie ist er kleiner.

Man kann nun auf elementarem geometrischem Wege zeigen, daß der Parallelwinkel vom Abstand Punkt—Gerade — nennen wir ihn x — abhängt, und zwar so, daß er ganz in der Nähe der Geraden fast $\pi/2$ mißt, beim nach außen Gehen aber immer kleiner wird und schließlich zu null

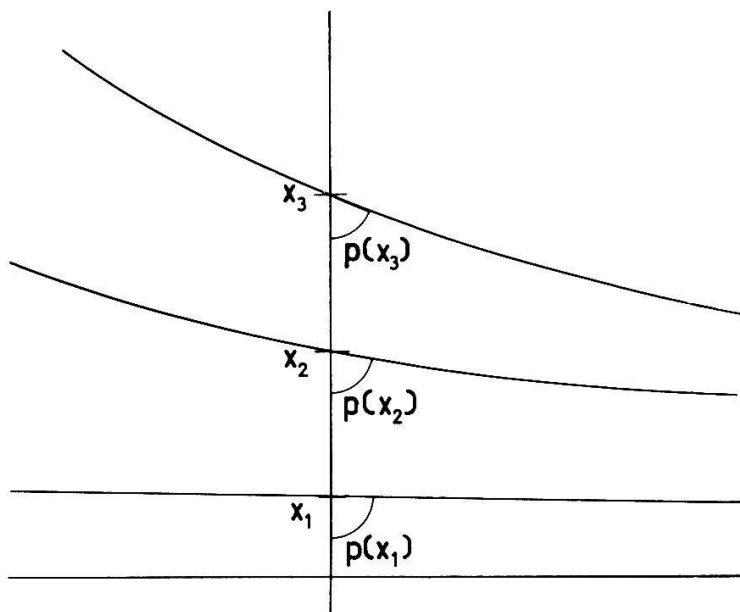


Fig. 1

abfällt (Fig. 1). Der Parallelwinkel ist also eine Funktion $p(x)$ des Abstandes x , die ungefähr den in Figur 2 gezeigten Verlauf hat.

Was man nun sucht, ist die genaue Gestalt dieser Funktion. Damit stehen wir wieder vor derselben Erscheinung wie beim ersten Beispiel. Durch das Abgehen von der Euklidischen Forderung sind wir in ein unbekanntes neues Gebiet eingedrungen und haben dabei eine Funktion

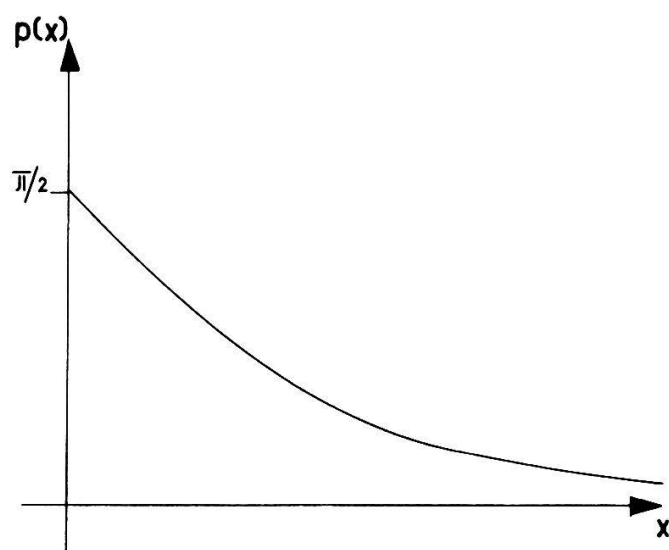


Fig. 2

vorgefunden, deren Eigenschaften in der Natur der neuen Geometrie verankert sind. Wir können ihren Verlauf in keiner Weise beeinflussen oder gar erfinden. Die Funktion ist unabhängig von unserem Willen vorhanden und wir sind gezwungen, durch Nachdenken über die Grundgesetze der neuen Geometrie ihren Verlauf zu ermitteln. Diesem Unternehmen standen bedeutende Schwierigkeiten entgegen, vor allem die Anschaulichkeit und die jahrtausendealte Vertrautheit mit der alten, Euklidischen Geometrie, die es abzuschütteln galt, wollte man die Gesetze der neuen Geometrie erkennen. Daß das Unternehmen gelang, verdankt man den Leistungen zweier Mathematiker, des Russen Lobatschewski und des Ungarn Bolyai, die um das Jahr 1830 herum die neue Geometrie erforschten. Die Mitwelt dankte ihnen leider ihre bedeutsamen Entdeckungen mit völliger Nichtbeachtung.

Ihr den Parallelwinkel betreffendes Ergebnis, das uns hier nur am Rande interessiert, will ich nur der Vollständigkeit halber anschreiben. Aus technischen Gründen verwendet man nicht den Parallelwinkel $p(x)$ selber, sondern den Tangens seiner Hälfte, und hat dann im wesentlichen $\operatorname{tg} \frac{p(x)}{2} = e^{-x}$.

Diese Erkenntnis ist nur die erste in einer ganzen Reihe weiterer, dem es geht ja darum, die gesamte neue Geometrie aufzubauen, also gewissermaßen ein noch unbekanntes Land zu erforschen. Dies erfordert die Revision aller derjenigen Sätze der alten Geometrie, in denen die Eukli-

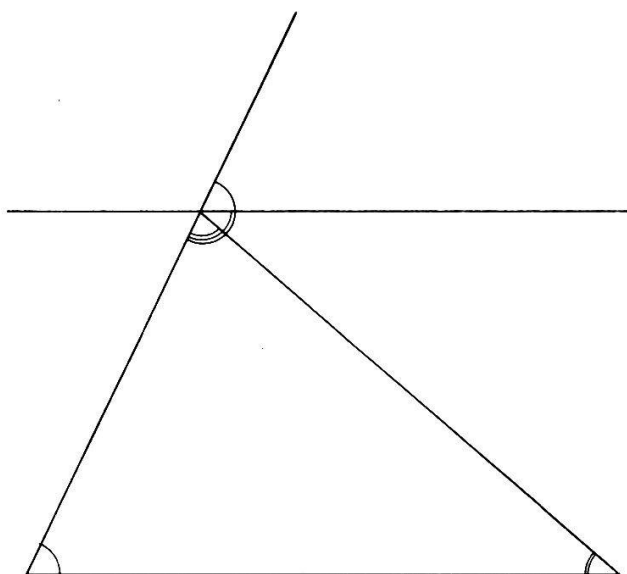


Fig. 3

dische Forderung der eindeutigen Parallelen verwendet werden muß. So wird zum Beispiel beim wohlbekannten Beweis dafür, daß die Winkelsumme in jedem Dreieck zwei Rechte beträgt, von der Parallelen Gebrauch gemacht (Fig. 3); der Beweis ist in der neuen Geometrie hinfällig und tatsächlich stellen sich die Winkelsummen der Dreiecke dort als kleiner als zwei Rechte heraus. Unter anderem müssen auch die ganze Trigonometrie und die Kreismessung neu begründet werden. Wie in den meisten andern Gebieten der Mathematik (und natürlich auch der Naturwissenschaften) tritt also hier mathematische Erkenntnis nicht in Form von Einzelresultaten, sondern in Form einer ganzen, zusammenhängenden Theorie auf.

Die Entdeckungen von Lobatschewski und Bolyai hatten aber noch eine weitere, über die unmittelbaren mathematischen Ergebnisse weit hinausgehende Folge. Die neue Geometrie erscheint uns vielleicht fremdartig, ja geradezu unmöglich; mathematisch ist sie der alten aber durchaus gleichwertig. Da man nun zwei logisch gesicherte geometrische Systeme zur Verfügung hatte, die aber nicht übereinstimmten und die man nicht gleichzeitig zur Erklärung der im natürlichen Raum herrschenden Verhältnisse verwenden konnte, wurde es klar, daß die Mathematik gar keine unmittelbaren Aussagen über die Natur machen kann, oder, um es vorsichtiger auszudrücken, daß die Beziehungen zwischen mathematischer und Naturerkenntnis viel tiefer liegen müssen als man vorher anzunehmen geneigt war. Die Mathematik stellt gewissermaßen logisch ein-

wandfreie Gerüste zur Verfügung; welcher unter ihnen sich der Naturforscher zu bedienen hat, um seine Gebäude zu errichten, kann nur die Erfahrung, nicht aber die mathematische Überlegung zeigen.

Dieselbe Erscheinung hat sich übrigens, nur viel weniger beachtet, in der Arithmetik abgespielt. Der irische Mathematiker Hamilton entdeckte 1843 ein System von Zahlen — er nannte sie Quaternionen —, welches nicht denselben arithmetischen Gesetzen gehorcht wie das der gewöhnlichen Zahlen. Vier Jahre später folgte ihm der Engländer Cayley nach mit einem weiteren Zahlbereich, der noch mehr arithmetische Gesetze bricht als derjenige Hamiltons, wobei aber beide Systeme logisch untadelig aufgebaut sind.

Dies alles liegt mehr als hundert Jahre zurück. Heute besitzen wir eine ganz unerschöpfliche Fülle sowohl geometrischer als auch arithmetisch-algebraischer Systeme mit den verschiedensten Gesetzmäßigkeiten — Systeme, deren sich der Naturforscher nach Belieben bedienen kann und zu einem kleinen Teil auch bedient. Ich möchte aber betonen, daß die allermeisten dieser Systeme nicht ihrer möglichen Anwendungen, sondern rein als Selbstzweck und ihrer innermathematischen Bedeutung willen ausgearbeitet wurden.

Mein drittes Beispiel, an dem ich weitere Spielarten mathematischer Erkenntnis erläutern möchte, handelt von einem berühmten Problem aus dem Gebiete der Zahlenlehre. Ein Mathematiker des 18. Jahrhunderts, Christian Goldbach, war bei seinen Untersuchungen auf eine merkwürdige Erscheinung gestoßen. Er versuchte nämlich, gerade Zahlen als Summe zweier Primzahlen zu schreiben, etwa $100 = 17 + 83$ oder $500 = 193 + 307$ usw. Weil er offenbar keine Ausnahmen finden konnte, weil also alle der von ihm untersuchten geraden Zahlen sich so aufspalten ließen, stellte Goldbach in einem 1742 an Euler geschriebenen Brief die Vermutung auf, daß dies für alle geraden Zahlen möglich sein müsse. Euler stimmte dem zu, aber weder er noch Goldbach konnten einen Beweis für diese Tatsache erbringen.

Man muß sich zuerst im klaren darüber sein, worin die gesuchte Erkenntnis bestehen soll. Es läßt sich ja für jede gerade Zahl durch Probieren feststellen, ob sie sich als Summe zweier Primzahlen schreiben läßt oder nicht. Dies mag für große Zahlen bedeutende rechnerische Schwierigkeiten mit sich bringen, ist aber im Prinzip jedesmal in endlich vielen Schritten durchführbar. Man hat tatsächlich, wieder mit Hilfe elektronischer Geräte, die Aufspaltung schon für alle geraden Zahlen bis zu 2 Millionen verwirklicht. Ein Naturwissenschaftler, der ein Gesetz in

einer Million von Fällen bestätigt findet, würde kaum mehr an seiner allgemeinen Gültigkeit zweifeln. In der Mathematik ist das anders. Auch Trillionen und Quadrillionen von Bestätigungen können niemals völlige Gewißheit von der Richtigkeit eines Gesetzes geben. Der Bereich der Zahlen ist eben unendlich, und Einzelfälle noch so riesiger Anzahl können ihn niemals erschöpfen. Was wir suchen müssen, ist etwas ganz anderes, nämlich einen allgemeinen, sich auf die Gesamtheit aller geraden Zahlen beziehenden Sachverhalt, eine Erkenntnis also über die Natur dieser Zahlen selber.

Ich möchte gleich vorausschicken, daß, obwohl schon sehr viel Arbeit zum Goldbachschen Problem geleistet wurde, ein einwandfreier Nachweis seiner Richtigkeit noch fehlt. Goldbachs Feststellung ist also immer noch nur eine Vermutung, die vielleicht sogar — was allerdings höchst unwahrscheinlich ist — falsch sein könnte. Bevor ich von einigen zugehörigen Ergebnissen berichte, möchte ich kurz auf die Rolle von Vermutungen beim mathematischen Erkenntnisprozeß hinweisen.

Jedem Forscher — irgendwelcher Richtung — ist wohl die Methode des intuitiven Vortastens in unerforschte Bereiche geläufig. Bei der Lösung von Problemen, beim Aufstellen neuer Theorien, ganz allgemein beim Gewinn neuer Erkenntnisse ist man, in mehr oder weniger größerem Ausmaße, gezwungen, vorgreifend Vermutungen anzustellen über das zu Erreichende und sie hinterher in irgend einer Weise nachzuweisen oder zu verwerfen zu suchen. Auch die Mathematik verwendet diesen Denkvorgang ausgiebig. Sie geht aber mit ihren gewissermaßen «offiziell» aufgestellten Vermutungen weit darüber hinaus. Es handelt sich bei diesen um sehr oft von bedeutenden Gelehrten ausgesprochene und meist ihren Namen tragende Erkenntnisse, deren Nachweis nicht unmittelbar glückte und zu deren Bewältigung — sei es Bestätigung, sei es Verwerfung — einige Zeit, manchmal sogar Jahrhunderte notwendig sind.

Mathematische Vermutungen sind zu unterscheiden von den in der Naturforschung vielfach verwendeten Hypothesen, die mehr breiter formulierte Meinungen über noch nicht voll verstandene Sachverhalte darstellen. Eine mathematische Vermutung ist ein äußerst präzise formuliertes Gesetz, eine intuitiv erfaßte Erkenntnis also, oder etwas vorsichtiger ausgedrückt: eine mögliche Erkenntnis. Sie regt an zu wertvollen mathematischen Arbeiten, die in erster Linie Versuchen zu ihrer Bewältigung gewidmet sind, manchmal aber weit über sie hinausführende Ideen und Methoden zu Tage fördern, die sich sogar als wichtiger herausstellen können als die ursprüngliche Vermutung selber. Nicht selten

werden unter der Annahme ihrer Richtigkeit Folgerungen aus ihr gezogen, oder Beweise auf sie gegründet, die dann natürlich Gefahr laufen, sich bei Verwerfung der vermuteten Aussage als gegenstandslos zu entpuppen. Eine der bedeutsamsten, von Bernhard Riemann 1859 aufgestellte Vermutung hat schon zu so vielen verzweifelten, aber bisher ergebnislosen Anstrengungen Anlaß gegeben, daß man vom Mathematiker Hilbert die folgende Anekdote erzählt: Wenn er, sagte er, nach tausendjährigem Todesschlaf wieder erwachen könnte, so wäre seine erste Frage: Ist die Riemannsche Vermutung schon bestätigt?

Doch kehren wir zurück zu der uns hier beschäftigenden, zur Goldbachschen Vermutung. Ob sie richtig ist, weiß man, wie ich schon sagte, nicht, doch möchte ich kurz von einigen Ergebnissen, Teilerkenntnissen, berichten, die es jedenfalls als außerordentlich wahrscheinlich erscheinen lassen, daß Goldbach seinerzeit auf eine wirkliche Erkenntnis stieß.

Im Jahre 1937 konnten gleichzeitig drei Mathematiker den strengen Nachweis führen, daß Ausnahmen von der Goldbachschen Vermutung, wenn überhaupt vorhanden, äußerst selten sein müssen. Genauer gesagt: es gibt vielleicht gerade Zahlen, die sich nicht als Summe zweier Primzahlen schreiben lassen, und es gibt ihrer vielleicht sogar unendlich viele. Sie müssen aber im Bereich aller Zahlen ganz außerordentlich dünn verteilt sein, so daß zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, beim Herausgreifen einer geraden Zahl eine solche Ausnahme zu erwischen, praktisch gleich null ist. Wenn auch noch weit entfernt von der erstrebten Erkenntnis, war dies doch ein erster wichtiger Schritt auf sie zu, fast zweihundert Jahre nach ihrem ersten Auftreten.

Ein anderes Ergebnis zeigt besonders schön den Kampf um die Bewältigung eines schwierigen mathematischen Problems. In Erweiterung der ursprünglichen Aufgabe versucht man, jede gerade Zahl als Summe zweier anderer Zahlen zu schreiben, die selber vielleicht keine Primzahlen sind, also in Faktoren zerlegt werden können, bei deren Zerlegung aber möglichst wenige dieser Faktoren auftreten sollen. So ist zum Beispiel $1000 = 600 + 400 = 2.2.2.3.5.5 + 2.2.2.2.5.5$ eine Zerlegung mit je 6 Faktoren, während die etwas geschicktere $1000 = 620 + 380 = 2.2.5.31 + 2.2.5.19$ nur je 4 Faktoren benötigt. Das Problem war nun, herauszufinden, mit wie wenigen Faktoren man allgemein auskommen kann; Goldbach meinte: mit je einem.

Als erster bewies 1920 der Norweger Brun mittels der revolutionären Erneuerung einer uralten Methode, daß — wenigstens für genügend große Zahlen — 9 Faktoren immer ausreichen. Vier Jahre später schon

wurde diese Zahl auf 7 herunter gedrückt, 1932 auf 6, 1940 auf 4 und endlich 1950 vom Finnen Selberg auf 3, jedesmal unter beständig größerem Aufwand mathematischer Findigkeit. Man weiß also heute, daß sich jede genügend große gerade Zahl als Summe zweier anderer schreiben läßt, bei deren Zerlegung höchstens je drei Primfaktoren auftreten werden. Ein noch besseres Ergebnis, noch nicht ganz gesichert allerdings, wurde 1962 vom chinesischen Mathematiker Wang erzielt, dem es gelang, die eine der beiden Faktorenzahlen von 3 auf 1 zu erniedrigen. Das letzte Ziel, der noch notwendige Schritt von der andern 3 auf die 1, scheint nun nicht mehr in so unerreichbarer Ferne zu liegen wie noch vor etwa fünfzig Jahren.

Ich habe vorhin erwähnt, daß das intuitive Vortasten in unerforschte Bereiche beim Erkenntnisprozeß eine wichtige Rolle spielt, natürlich nicht nur in der Mathematik. Ein auffälliger Unterschied besteht aber in der Art und Weise, in welcher Form der eigentliche Erkenntnisprozeß in der Wiedergabe seines Ergebnisses verwertet wird. Ein Beispiel soll wieder hierher gehörige Fragen illustrieren.

Im Jahre 1689 stellte der Basler Mathematiker Jakob Bernoulli in einer Abhandlung die Aufgabe, die Summe der Reihe der reziproken Quadratzahlen, das heißt der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$, zu bestimmen. Obwohl er leicht feststellen könne, daß die Summe existieren müsse, die Reihe also konvergiere, so ist doch, sagte er, merkwürdigerweise die Erforschung der Summe schwieriger als man erwarten sollte. Es vergingen auch tatsächlich fast fünfzig Jahre, bis die Aufgabe bewältigt werden konnte, und zwar von Leonhard Euler. Die Methode, die er zur Lösung des schwierigen Problems anwendete, war außerordentlich kühn, ja man ist versucht zu sagen: tollkühn.

Es gibt einen einfachen Satz der Algebra, der eine Beziehung herstellt zwischen der Summe der reziproken Wurzeln einer algebraischen Gleichung und gewissen ihrer Koeffizienten. Euler suchte nun eine Gleichung, die im wesentlichen die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, ... als Wurzeln besitzt und fand die folgende: $1 - x/3! + x^2/5! - x^3/7! + \dots = 0$. Die linke Seite dieser Gleichung ist identisch mit dem Ausdruck $\sin \sqrt{x} / \sqrt{x}$, und man stellt leicht fest, daß ihre Wurzeln wirklich $1 \cdot \pi^2, 4 \cdot \pi^2, 9 \cdot \pi^2, 16 \cdot \pi^2, \dots$ sein müssen. Der erwähnte algebraische Satz liefert dann sofort für die Summe der reziproken Werte dieser Wurzeln die Zahl $1/3! = 1/6$, und damit war das Problem von Jakob Bernoulli

gelöst: die Reihe der reziproken Quadratzahlen hat die Zahl $\pi^2/6$ zur Summe.

Was uns hier an diesem Vorgehen interessiert, ist die Tatsache, daß Euler seine Erkenntnis auf einem Weg gefunden hatte, der logisch ganz unzulässige Schlüsse enthielt und daher strengen mathematischen Anforderungen keineswegs genügen konnte. Der zitierte algebraische Satz gilt nämlich nur für Gleichungen endlichen Grades, während ihn Euler unbedenklich auf eine Gleichung unendlich hohen Grades anwendet. Außerdem ist er nur richtig, wenn wirklich alle Wurzeln erfaßt werden, was bei der herangezogenen Gleichung alles andere als selbstverständlich ist. Trotzdem ist das Ergebnis, wie Euler dank seiner besonderen Einfühlungsgabe erkannte, richtig, und er zögerte nicht, seine Arbeit 1740 in den Petersburger Commentarien zu veröffentlichen. Immerhin, so schrieb er später seinem Freund Nicolaus Bernoulli, habe er sich vorher durch numerische Rechnung davon überzeugt, daß sein Resultat mit dem direkt aus der Reihe gewonnenen gut übereinstimmte.

Die Entdeckung Eulers ist ein sehr schönes Beispiel für die Art und Weise, wie mathematische Erkenntnis gewonnen wird, wie also beim Erkenntnisprozeß selber gewissermaßen der Zweck die Mittel heiligt, indem der Vorstoß zur Erkenntnis auch mit unbewiesenen oder geradezu unrichtigen Schlüssen geführt werden kann. Natürlich ist die gewonnene Erkenntnis im Nachhinein durch logisch einwandfreie Beweise zu sichern; sowohl Euler selber als viele andere Mathematiker haben bis in unsere Zeit hinein scharfsinnige, strenge Nachweise des berühmten Fundes geliefert. Der Unterschied zwischen Mathematik und andern Wissenschaften liegt nun darin, daß die Anforderungen der ersteren an die absolute logische Strenge so stark sind, daß Veröffentlichungen wie die Eulersche, in denen der eigentliche Erkenntnisvorgang deutlich zum Ausdruck kommt, äußerst selten sind, während man über den Werdegang zum Beispiel naturwissenschaftlicher Ideen und Erkenntnisse wesentlich mehr weiß.

Wenn auch nicht alle Mathematiker so weit gehen wie Gauss, dessen Arbeiten bewußt nicht die geringste Spur seiner eigentlichen Forschungsarbeit mehr enthalten, so ist doch zwangsweise eine sehr große Diskrepanz zwischen dem Gewinn der Erkenntnis und ihrer publizierten Darstellung vorhanden. Dies wirkt sich nicht nur für den Wissenschaftshistoriker oder — wenn es so etwas überhaupt gibt — den Wissenschaftspsychologen nachteilig aus. Auch im Unterricht erleben die Studierenden der Mathematik den Wissensstoff in einer bereinigten und, man ist ver-

sucht zu sagen, vom Menschlichen geläuterten Form, während sie später, wenn sie ihre eigenen Forschungen betreiben, merken, daß es in Wirklichkeit beim Erkenntnisgewinn ganz anders zugeht als sie in Vorlesung oder Lehrbuch erfuhren.

Einer wichtigen Eigenschaft mathematischer Erkenntnis, die ich bisher kaum angedeutet habe, muß ich mich nun zuwenden. Sowohl das eingangs beschriebene Problem von Gauss, wie auch das Goldbachsche oder das Bernoullische sind Beispiele für mathematische Sachverhalte, die keinerlei Anwendungsmöglichkeiten auf naturwissenschaftliche oder andere außermathematische Fragen in sich zu bergen scheinen. Es wird wohl niemand daran denken, ein Vieleck von 65 537 Seiten konstruieren oder gar verwenden zu wollen, geschweige denn eines, das vielleicht zu der noch unerforschten Riesenzahl F_{17} gehört. Es ist auch nicht zu erkennen, inwieweit die Aufspaltung gerader Zahlen in Primzahlen für außermathematische Fragen bedeutsam werden könnte.

Natürlich besteht zwischen den Natur- und andern Wissenschaften und der Mathematik ein reger, die letztere sehr befruchtender Ideenaustausch. Man muß sich aber über zweierlei im Klaren sein. Erstens besteht der größte Teil der gesammelten mathematischen Erkenntnisse aus solchen, die um ihrer selbst willen gesucht wurden, etwa weil sie durch ihre Eleganz, ihre Tiefsinnigkeit, durch ihre innermathematische Bedeutung bestachen, und nicht, weil sie auf Probleme der Naturwissenschaften oder der Technik Anwendung finden könnten. Der Erfolg davon ist zweitens, daß nur ein kleinerer Teil der Mathematik auch wirklich anwendbar ist, wobei außerdem begrenzte Teilgebiete, vor allem die Analysis, das Material liefern, während die restlichen Gebiete oft nur Bruchteile ihrer Ergebnisse beisteuern können.

Es wird allerdings sehr oft darauf hingewiesen, daß manchmal rein mathematische Ergebnisse erst lange nach ihrer Entdeckung wirksam werden können, indem die Naturwissenschaften oder die Technik neue Resultate erzielen, zu denen überraschender Weise schon vorhandene, rein mathematische Hilfsmittel wie geschaffen erscheinen. Eines der ersten dieser Beispiele dürfte die Kegelschnittslehre des Appolonius sein, die fast zwei Jahrtausende nach ihrer Entwicklung von Kepler und Newton als die zur Beschreibung von Planeten- und Kometenbahnen geeignetste erkannt wurde. Eines der letzten Beispiele ist vielleicht die sogenannte Algebra der Logik, die seit rund 1850 besteht und von welcher der amerikanische Mathematiker Shannon 1938 zeigen konnte, daß sie

für den Aufbau elektrischer Schaltsysteme, später auch elektronischer Rechenanlagen, wesentlich ist.

Solche Übereinstimmungen sind natürlich für die Mathematik sehr genugtuend und weisen darauf hin, wie wichtig auch die rein mathematische Forschung für die Anwendungen werden kann. Sie dürfen aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß sie Einzelfälle darstellen und daß sie keineswegs als Rechtfertigung für die Erstrebung mathematischer Erkenntnis genommen werden dürfen. Man kann von den Mathematikern nicht verlangen, daß sie gewissermaßen auf Vorrat prophetisch schaffen. Man muß ihnen zugestehen, daß sie ihre eigenen Ziele unbekümmert um Anwendungsmöglichkeiten verfolgen dürfen, auch wenn sie sich dadurch unweigerlich in eine weitgehende intellektuelle Isolation begeben. Die Außenstehenden sehen in der Mathematik zur Hauptsache ein Werkzeug, dem sie um so geringeres Interesse entgegenbringen, je weniger es sich anwenden läßt; die rein mathematischen Probleme scheinen ihnen auch allzu ferne der sie beschäftigenden, realen Fragen zu liegen. So ist es leicht erklärlich, daß ein großer Teil der mathematischen Erkenntnisse ausschließlich den Mathematikern selber bekannt und nur von ihnen verstanden und geschätzt wird.

Diese Isolation der Mathematik und die Unkenntnis ihrer Ergebnisse beim weitaus größten Teil der Gebildeten ist gewiß sehr bedauerlich, doch zeugt es von der Kraft der reinen Mathematik, daß sie trotzdem eine geradezu überwältigende, ja beängstigende Lebensfülle aufweist. Man kann das mit nüchternen Zahlen belegen, wenn man etwa die Anzahl der zurzeit publizierten, rein mathematischen Arbeiten ermittelt. Man muß dazu allerdings jede Arbeit, von der kleinen Note bis zum ganzen Buch, als eine Einheit zählen. Es stellt sich heraus, daß die heutige Weltproduktion an rein mathematischen Arbeiten durchschnittlich 240 im Tag beträgt.

Ich möchte zum Schluß noch auf einen weiteren, etwas weniger erfreulichen Aspekt mathematischer Erkenntnis hinweisen. Die Sicherung mathematischer Entdeckungen läßt sich natürlich nicht, wie in der Naturforschung, durch Übereinstimmung mit Beobachtungen und Messungen erbringen, sondern einzig und allein durch den logischen Beweis. Beweisen heißt aber im Wesentlichen, von gewissen Grundlagen aus durch logische Schlüsse Gesetzmäßigkeiten abzuleiten. Es ist daher eine ausschlaggebende Forderung, daß diese Grundlagen selber sowie auch das logische Schließen einwandfrei seien. Von der Erfüllung dieser Forderung kann leider in der heutigen Mathematik noch nicht gesprochen

werden. Ich möchte wieder an einem Beispiel einige der hierher gehörenden Fragen besprechen.

Das Beispiel handelt von einer Zwillingsaufgabe zur Goldbachschen Vermutung. Sie betrifft im Gegensatz zu dieser die ungeraden Zahlen, die ebenfalls als Summe von Primzahlen, diesmal aber von dreien solcher, geschrieben werden sollen, wie etwa $99 = 11 + 17 + 71$. Die Vermutung lautet auch hier, daß eine solche Aufspaltung stets möglich sei.

Nun hat der russische Mathematiker Vinogradov im Jahre 1937 folgendes bewiesen: es gibt eine Zahl — nennen wir sie ihm zu Ehren V — mit der Eigenschaft, daß für alle ungeraden Zahlen, die größer als V sind, die Aufspaltung in drei Primzahlen immer möglich ist. Das bedeutet also, daß unsere Vermutung von V an sicher richtig ist, oder umgekehrt, daß Ausnahmen von ihr höchstens bis und mit V auftreten können, nachher nicht mehr. Es scheint nun so zu sein, als ob damit die Vermutung im Prinzip auf ihre Richtigkeit hin abgeklärt werden kann. Denn die Zahlen bis zur Grenzzahl V kann man einzeln untersuchen, was vielleicht einen großen Arbeitsaufwand erfordert, was aber doch in endlicher Zeit möglich sein muß. Dann wäre die Vermutung endgültig bestätigt oder Ausnahmen von ihr nachgewiesen.

Leider hat die ganze Sache einen Haken. Aus dem Beweis von Vinogradov geht nämlich nicht hervor, wie groß die Zahl V eigentlich ist. Es ist ein sogenannter Existenzbeweis, das heißt es wird durch logische Schlüsse einwandfrei die Existenz eines solchen V gesichert, aber keine Möglichkeit gezeigt, wie man V effektiv berechnen könnte.

Wir befinden uns damit in einer recht zwielichtigen Situation. Wollten wir wirklich versuchen, die ungeraden Zahlen bis zu V auf allfällige Ausnahmen hin zu prüfen, so wüßten wir nicht, bis wohin wir diese Prüfungen treiben müßten, von wo an wir also sicher sein könnten, keine Ausnahmen mehr zu finden. Wie weit auch immer wir vorstoßen, nie sind wir bei unserer Unkenntnis der Grenzzahl V sicher, ob nicht doch noch eine größere Ausnahmezahl zu finden wäre. Unsere Methode erweist sich damit als undurchführbar und wir müssen die Hoffnung aufgeben, durch einen letzten Rechnungsaufwand ans Ziel zu kommen. Es ist daher recht schwierig festzustellen, welchen Beitrag zur ursprünglichen Vermutung nun eigentlich der Vinogradovsche Satz geleistet hat — ein Satz übrigens, der daneben eine ganz bedeutende mathematische Leistung war.

Man sieht, daß bei dieser unbequemen Situation die Frage der Existenz mathematischer Objekte im Vordergrund steht. Es hat sich nun

seit ungefähr dem Beginn unseres Jahrhunderts eine Denkrichtung entwickelt, welche ein mathematisches Objekt nur dann als existent anerkennt, wenn es eine Möglichkeit zu seiner effektiven, konstruktiven Bestimmung gibt. Eine Existenzaussage ohne diese Möglichkeit wird als fiktiv verworfen. Diese Richtung, der viele bedeutende Gelehrte angehören, lehnt also zum Beispiel den Vinogradovschen Beweis ab, denn sie sagt, daß er überhaupt keine mathematische Aussage enthalte, solange die Zahl V nicht bestimmt werden könne. Die Konstruktivisten, wie die Vertreter dieser Schule sich nennen, fordern einen Neuaufbau der gesamten Mathematik unter Ausmerzung aller reinen, nicht-konstruktiven Existenzbeweise.

Ganz besonders einschneidend wird die Konstruktivitätsforderung, wenn sie nicht nur die rein mathematischen Aussagen, sondern auch die ihnen zugrunde liegende Logik erfaßt. Der holländische Mathematiker Brouwer hat dies 1925 an einem einfachen Beispiel gezeigt, das seither oft zitiert wird, und das ich hier ganz kurz vorzuführen versuchen will.

In vielen mathematischen Entwicklungen wird an gewissen Stellen eine Entscheidung darüber verlangt, ob eine bestimmte Zahl null sei oder von null verschieden. So sind zum Beispiel die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung einander gleich oder voneinander verschieden, je nachdem eine bestimmte Zahl, die Diskriminante der Gleichung, null ist oder nicht.

Betrachten wir nun nochmals die beim Problem von Gauss aufgetretenen Zahlen $F_k = 2^{(2^k)} + 1$, und schreiben wir, unter Auslassung der ersten fünf, die Reihe F_5, F_6, \dots an. Ich definiere jetzt eine Zahl b folgendermaßen: sie beginne mit 0, — dann werden für sie Dezimalziffern angeschrieben, und zwar je eine für jedes F , wobei nur die Ziffern 0 und 1 verwendet werden mögen nach der folgenden Regel: einem F_k entspreche die Ziffer 0, falls es zerlegbar, die Ziffer 1, falls es eine Primzahl ist. Damit ist die neue Zahl b mathematisch einwandfrei definiert, wenn auch, wie wir wissen, die wirkliche Berechnung auch nur weniger Dezimalstellen enorme Schwierigkeiten bereiten würde. Im Prinzip ist aber b in einer auch für die Konstruktivisten befriedigenden Weise festgelegt.

Wir fragen uns nun, ob die Zahl b gleich null ist oder nicht. Es ist klar, daß dies nach ihrer Definition vom Vorhandensein weiterer Primzahlen in der Folge der F_k abhängen wird. Ganz abgesehen davon wird aber die gewöhnliche Logik ohne weiteres feststellen, daß b entweder null ist oder nicht, und sie wird entsprechende Folgerungen aus dieser Aussage ziehen können. Diese Feststellung gilt aber den radikaleren Vertre-

tern der konstruktivistischen Schule unter Führung von Brouwer als unbrauchbar. Sie argumentieren so: sollte es gelingen, nachzuweisen, daß alle Zahlen F_k für $k \geq 5$ zerlegbar sind, so wäre damit auch erwiesen, daß $b = 0$ ist. Andererseits besteht die Möglichkeit, daß weitere Rechnungen unter den F_k doch noch eine Primzahl zu Tage fördern, womit sich dann b als von 0 verschieden herausgestellt hätte. Wie ich erwähnte, ist aber heute weder das eine noch das andere der Fall; weder wissen wir, ob wirklich alle F_k zerlegbar sind, noch konnten wir bisher eine Primzahl unter ihnen entdecken. Dies bedeutet aber, daß eine konkrete Entscheidung darüber, ob b gleich null ist oder nicht, beim derzeitigen Stand der Mathematik nicht gefällt werden kann. Daher, sagt Brouwer, sind wir gezwungen, diesen Fall als dritte Möglichkeit in Betracht zu ziehen und überall dort, wo das Nullwerden von b entscheidend ist, mit zu berücksichtigen.

Es ist zu betonen, daß nicht etwa die Aussage der gewöhnlichen Logik "b ist entweder 0 oder nicht 0" als falsch hingestellt wird. Diese Aussage ist aber, da uns eine konstruktive Nachweismöglichkeit fehlt, eine reine Existenzaussage und muß daher als fiktiv und für die Mathematik nicht verwendbar angesehen werden. Man kann sich ausmalen, welche Folgen diese Haltung für die bestehende mathematische Erkenntnis haben muß. So hat zum Beispiel jede quadratische Gleichung entweder nachweisbar zwei verschiedene Wurzeln, oder nachweisbar nur eine, eine Doppelwurzel, oder aber es tritt der dritte Fall ein, daß über die genaue Anzahl ihrer Wurzeln nichts ausgesagt werden kann. Zahlreiche mathematische Erkenntnisse fächern sich dadurch in drei und mehr Fälle auf, die Mathematik wird komplizierter, allerdings auch durch die Einführung der Konstruktivitätsforderung in einem gewissen Sinne befriedigender. Man muß der konstruktivistischen Schule zugute halten, daß sie nicht bei einer Kritik der Grundlagen der Mathematik stehen geblieben ist, sondern schon viel Wertvolles zu einem Neuaufbau beigetragen hat. Einer radikalen Anwendung ihrer Grundforderungen würde allerdings ein beträchtlicher Teil der heute vorhandenen mathematischen Erkenntnis zum Opfer fallen.

Ich habe vorhin erwähnt, daß der größere Teil der von Mathematikern geleisteten Arbeit sich in weitgehender Isolation abspielt, daß aber trotzdem die Mathematik dabei glänzend floriert. Es ist merkwürdig, festzustellen, daß auch die von innen her geführte Kritik am Erkenntnisprozeß, obwohl als berechtigt, ja sogar notwendig anerkannt, im gesamten gesehen recht wenig Einfluß auf das Fortschreiten der weitaus meisten

Gebiete dieser Wissenschaft hatte. Etwas unbekümmert um die drohenden Gewitterwolken arbeiten die Mathematiker an der Ausdehnung ihres Wissensgebietes weiter, in der Hoffnung, der Erkenntnisprozeß lasse sich einmal so weit bereinigen, daß sie nichts von ihrer schönen Wissenschaft aufgeben müßten. Am treffendsten hat diesen Standpunkt wohl David Hilbert ausgedrückt, als er in einem Vortrag den Kritikern entgegenschleuderte: «Aus diesem Paradies soll uns niemand vertreiben».