

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft in Bern  
**Band:** 17 (1959)

**Vereinsnachrichten:** Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern aus dem Jahre 1958

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**SITZUNGSBERICHTE**  
**der Mathematischen Vereinigung in Bern**  
**aus dem Jahre 1958**

*212. Sitzung, Freitag, den 24. Januar 1958*

Vortrag von Herrn **Dr. F. Bichsel**, Bern: «**Kann die Mathematik vollständig formalisiert werden? (Satz von Gödel)**».

---

*213. Sitzung, Donnerstag, den 27. Februar 1958*

Vortrag von Herrn **Prof. Dr. H. Hadwiger**, Bern: «**Normale Körper im euklidischen Raum und ihre topologischen und metrischen Eigenschaften**».

---

*214. Sitzung, Freitag, den 2. Mai 1958*

Vortrag von Herrn **PD Dr. Th. Erismann**, Zürich: «**Mechanische Analogiegeräte, ihre mathematischen Grundlagen und ihr praktischer Einsatz**» (mit Lichtbildern und Film).

---

*215. Sitzung, Freitag, den 30. Mai 1958*

1. Geschäftssitzung: **Präsident, Kassier und Rechnungsrevisoren** verlesen ihre Berichte, die von der Versammlung genehmigt werden. Der Jahresbeitrag bleibt auf **Fr. 5.—**. Herr **Dr. H. Debrunner**, Sekretär der Vereinigung, wird sich ins Ausland begeben und muß daher seine Tätigkeit im Vorstand einstellen; die Versammlung entläßt ihn mit den besten Wünschen. Als neuer Sekretär wird gewählt: Herr **Georg Burkhard**, Gymnasiallehrer, Bern.

2. Vortrag von Herrn **J. Schär**, Bern: «**Einführung in die Theorie des Hilbert'schen Raumes**».

---

*216. Sitzung, Donnerstag, den 19. Juni 1958*

Festsitzung anlässlich des 60. Geburtstages von Herrn **Prof. Dr. A. Alder**. Nach einer musikalischen Einleitung, dargeboten von **Dr. O. Louis** und Herrn **J.-P. Marchand**, begrüßt Herr **Prof. Dr. W. Wegmüller** die Versammlung und den Jubilar. Herr **Regie-**

rungspräsident W. Siegenthaler überbringt die Grüße der kantonalen Finanzdirektion. Anschließend hält Herr Prof. Dr. W. Scherrer einen Vortrag über «Das Unbeweisbare (eine philosophische Betrachtung)». Eine Musikdarbietung beschließt den gehaltvollen Abend, der gemeinsam mit dem Mathematischen und dem Mathematisch-versicherungswissenschaftlichen Seminar durchgeführt wurde.

217. Sitzung, Freitag, den 14. November 1958

Vortrag von Herrn Prof. Dr. W. Scherrer, Bern: «Bemerkungen zum Thema: Philosophie der exakten Wissenschaften».

Die folgende Abhandlung stellt einen Ausschnitt aus diesem Vortrag dar.

GIBT ES ELEKTRONENBAHNEN?

EINSTEIN<sup>1</sup>, SCHRÖDINGER und seit einigen Jahren wiederum auch DE BROGLIE vertreten die Auffassung, «daß der grundsätzlich statistische Charakter der gegenwärtigen Quantentheorie einfach dem Umstande zuzuschreiben ist, daß diese mit einer unvollständigen Beschreibung der physikalischen Systeme operiert».

Die einfachste Illustration zu dem, was hier mit unvollständiger Beschreibung gemeint ist, ergibt sich, wenn man die Frage nach der Bahn eines Elektrons aufwirft. Die oben genannten Autoren und ihre Anhänger, sagen wir kurz die Feldtheoretiker, halten die Existenz von Bahnen für eine notwendige Folge des Korpuskelbegriffs. Die Existenz von Bahnen leugnen, so argumentieren sie, wäre gleichbedeutend mit der Preisgabe von Raum und Zeit als Rahmen des physikalischen Geschehens<sup>2</sup>.

Die Quantentheoretiker dagegen gehen aus von der aus den Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelationen folgenden und von beiden Parteien anerkannten

**These A:** Es ist unmöglich, für ein freies Elektron Ort und Impuls respektive Zeit und Energie simultan empirisch festzulegen.

Hierauf wird, gestützt auf eine absolut positivistische Grundeinstellung, die — um Einsteins Worte zu gebrauchen — mit dem Berkeley'schen Grundsatz «esse est percipi» zusammenzufallen scheint<sup>3</sup>, geschlossen auf

**These B:** Es ist sinnlos, für ein freies Elektron die simultane Existenz von Ort und Impuls respektive Zeit und Energie anzunehmen.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist nun zu zeigen, daß man gestützt auf die kräftefreien Dirac'schen Wellengleichungen und deren statistische Interpretation beweisen kann, daß Elektronenbahnen existieren. Ja es gilt sogar

**These C:** Ein freies Elektron besitzt an jeder Weltstelle, welche es passiert, sowohl einen bestimmten Impuls als auch eine bestimmte Energie.

<sup>1</sup> ALBERT EINSTEIN als Naturforscher und Philosoph, Deutsche Ausgabe, W. Kohlhammer Verlag, Stuttgart 1955, S. 494.

<sup>2</sup> LOUIS DE BROGLIE, La physique quantique restera-t-elle indeterministe? Gauthier-Villars, Paris 1953, S. 16.

<sup>3</sup> l. c. 1), S. 496.

**Beweis :**

1. Das über einen Querschnitt  $t = \text{const.}$  erstreckte Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  des Elektrons ist unabhängig von der Zeit und überdies lorentzinvariant. Normiert auf den Wert 1 bringt es zum Ausdruck, daß sich das Elektron im Zeitmoment  $t$  an genau einer Stelle dieses dreidimensionalen Querschnitts (Raumes) befindet.

2. Sind  $A(x_1, x_2, x_3, t)$  und  $B(y_1, y_2, y_3, u)$  irgend zwei vom Elektron eingenommene Weltstellen, so gilt

$$\left| \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \right| \leq c |u - t|, \quad (1)$$

wo  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Andernfalls wäre der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  raumartig und es gäbe ein Koordinatensystem, in bezug auf welches das Elektron sich gleichzeitig an zwei verschiedenen Orten A und B befände, was im Widerspruch zu 1. stünde.

3. Nach 1. sind die räumlichen Koordinaten des Elektrons eindeutige Funktionen der Zeit, und nach 2., Gleichung (1) gilt für irgend zwei Positionen

$$|y_i - x_i| \leq c |u - t|; \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Dies aber bedeutet, daß diese räumlichen Koordinatenfunktionen beschränkte Steigung besitzen. Hieraus folgt weiter (aus den Begriffen), daß diese Funktionen in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung sind.

4. Gestützt auf 3. folgt nun nach Sätzen aus der Theorie der reellen Funktionen<sup>4</sup>, daß die räumlichen Koordinaten des Elektrons als Funktionen der Zeit folgende Eigenschaften besitzen:

- a) Sie sind eindeutig und stetig.
- b) Sie sind überall differenzierbar mit Ausnahme höchstens einer Menge vom Maße Null.

In anderen Worten, die Bahn des Elektrons ist stetig und besitzt praktisch überall eine Vierergeschwindigkeit. Physikalisch gesprochen: Das Elektron besitzt an jeder Stelle seiner Bahn einen Energie-Impuls-Vektor. W. z. b. w.

Nimmt man nun an, daß während des Übergangs des Elektrons von der Weltstelle A zu der Weltstelle B keinerlei Austausch von Impuls oder Energie mit der Umgebung

stattfindet, so folgt natürlich weiter, daß das Bahnstück  $\overrightarrow{AB}$  eine gerade Strecke sein muß. Wir sehen also: Aus den Dirac'schen Gleichungen ergibt sich zwingend die Existenz von Elektronenbahnen.

Damit ist nun also diejenige geometrische Bestimmtheit, welche die eingangs zitierten Forscher schon aus erkenntnistheoretischen Gründen gefordert haben, mathematisch sichergestellt auf Grund von Prämissen, welche beide Parteien anerkennen. Mit Rücksicht auf den grundsätzlichen Charakter dieses Ergebnisses mögen noch einige Erläuterungen und Ausblicke Platz finden.

I. Es mag als Härte empfunden werden, wenn im Beweise das Elektron als praktisch punktförmig behandelt wird. Tatsächlich verfährt aber die Wellenmechanik so — notgedrungen, weil dem Elektron nicht eine invariante Gestalt zugeschrieben werden

<sup>4</sup> Vgl. HAUPT und AUMANN, Differential- und Integralrechnung, Bd. II, S. 90—96.

kann — und ungestraft, weil sein «Radius» nach theoretischen Erwägungen und experimentellen Befunden den Wert  $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$  cm nicht wesentlich übersteigen dürfte.

Etwas konkreter und relativistisch korrekt könnte daher das Elektron als Kugel respektive abgeplattetes Rotationsellipsoid vom Radius  $r_0$  beschrieben werden. Das relativistisch invariante Zentrum dieses Gebildes hätte dann einfach an die Stelle des punktförmigen Elektrons im obigen Beweis zu treten und am Ergebnis würde sich im Prinzip nichts ändern.

II. Das Ergebnis entspricht nicht dem Komplementaritätsprinzip von BOHR, sondern der statistischen Deutung von BORN. Eine Veränderung der Situation kann nur stattfinden, wenn eine der maßgebenden Prämissen modifiziert wird. Diese maßgebenden Prämissen sind die Dirac'schen Gleichungen und der relativistische Zeitraum.

III. Die Modifikation respektive Preisgabe der Dirac'schen Gleichungen unter Beibehaltung des Zeitraums steht methodisch wohl schon deshalb im Vordergrund, weil man auf diesem Wege eher hoffen kann, einen erheblichen Teil der bewährten Vorstellungen beibehalten zu können. In diese Rubrik gehören der neue Vorschlag von HEISENBERG sowie die Ansätze zu einheitlichen Feldtheorien.

IV. Die Preisgabe des vierdimensionalen Zeitraums schließlich würde einen vollständigen Bruch mit der Tradition bedeuten und eine Situation ohne Vorbild schaffen<sup>5</sup>. Allerdings sprechen gewichtige empirische und logische Gründe dafür, daß der Hintergrund des Naturgeschehens ein Diskontinuum bildet<sup>6</sup>. Das reale Objekt wäre dann die Menge aller Elementarphänomene, aus deren Wechselbeziehungen successive die Attribute Zeitraum, Metrik, Feld und Materie hervorgehen sollten.

Aber genau so wie in der Mathematik würde die Reduktion des Unendlichen respektive des Kontinuums auf endliche, aber beliebig große Mengen entgegen allem äußeren Anschein keine Vereinfachung, sondern eine Steigerung der mathematischen Schwierigkeiten bedeuten. In der mathematischen Grundlagenforschung hat sich ja gezeigt, daß die logisch wünschbare finite Begründung der Analysis vorderhand nicht geleistet werden kann. Die Fiktion des Unendlichen respektive des Kontinuums bildet de facto immer noch ein unentbehrliches Instrument der Mathematik.

Trotzdem sich also jetzt der Eindruck zusehends verstärkt, daß wir in der Physik an der Schwelle vom Kontinuum zum Diskontinuum stehen, ist es noch ungewiß, ob der entscheidende Schritt schon getan werden kann. Solange aber diese Ungewißheit besteht, kann man den kontinuierlichen Aspekt nicht entbehren.

*W. Scherrer*

Manuskript eingegangen am 15. April 1959

<sup>5</sup> Vergleiche dazu EINSTEINS Bemerkungen über das «Makroskopische» und «Mikroskopische» (I. c. 1.), S. 500.

<sup>6</sup> DAVID HILBERT, Über das Unendliche. Math. Annalen 95, 161—190, (1925).