

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern
Band: 10 (1953)

Vereinsnachrichten: Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SITZUNGSBERICHTE

der Mathematischen Vereinigung in Bern

175. Sitzung, Freitag, den 18. Januar 1952

1. Mitteilung von Herrn Dr. Hans Bieri (Bern): «Beiträge zum Hauptproblem der konvexen Körper».

Das Hauptproblem der Theorie der konvexen Körper kann als Abbildungsproblem behandelt werden: Jeder konvexe Körper besitzt drei eindeutig bestimmte Maßzahlen, nämlich ein Volumen V , eine Oberfläche F und ein sogenanntes Integral der mittleren Krümmung M . Mit Hilfe von zweien der drei Ausdrücke

$$(1) \quad x = \frac{4 \pi F}{M^2}; \quad y = \frac{48 \pi^2 V}{M^3}; \quad \omega^2 = \frac{36 \pi V^2}{F^3}$$

wird die abgeschlossene Klasse aller konvexen Körper als Punktmenge auf eine Ebene abgebildet (BLASCHKESches Diagramm). Die Menge der Bildpunkte ist zusammenhängend und abgeschlossen, und das Hauptproblem besteht nun im Aufsuchen des Bildrandes. Aus diesem lassen sich dann leicht Ungleichungen zwischen V , F und M ableiten.

In der vollen Klasse aller konvexen Körper hält es sehr schwer, neue Resultate zu gewinnen. Das Hauptproblem stellt sich aber für jede abgeschlossene Teilklasse, und die vorliegende Mitteilung enthält neue Ergebnisse für die Klassen der Zylinderkörper, der Rotationskörper und der aus Elementarkegeln aufgebauten konvexen Körper.

Zylinderkörper. Mit Hilfe des isoperimetrischen Defizites

$$(2) \quad \varepsilon = L^2 - 4 \pi f \geq 0$$

eines ebenen konvexen Bereiches gewinnt man folgende Darstellung der Maßzahlen eines Zylinderkörpers:

$$(3) \quad V = \frac{(L^2 - \varepsilon) h}{4 \pi}; \quad F = \frac{L^2 - \varepsilon + 2 \pi L h}{2 \pi}; \quad M = \frac{\pi (L + 2 h)}{2}.$$

Infolge der Ähnlichkeitsinvarianz der Ausdrücke (1) darf ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $L = 1$ gesetzt werden, und es wird

$$(4) \quad x = \frac{8 (1 - \varepsilon + 2 \pi h)}{\pi^2 (1 + 2 h)^2}; \quad y = \frac{96 (1 - \varepsilon) h}{\pi^2 (1 + 2 h)^3}.$$

Gestützt auf die Isoperimetrieeigenschaft des Kreises ($\varepsilon = 0$) lassen sich Schranken für x und y gewinnen, die aber nur für je einen geraden Kreiszylinder scharf sind. Den

exakten Bildrand erhält man durch die Abbildung des Streifens $0 \leq \varepsilon \leq 1$; $0 \leq h < \infty$ auf die x, y -Ebene. Die Funktionaldeterminante verschwindet längst der Parabel

$$(5) \quad 4 \pi h^2 - 2 \pi h + (1 - \varepsilon) = 0$$

und es folgt:

Der Teilstreifen $0 \leq \varepsilon \leq 1 - \frac{\pi}{4}$; $0 \leq h < \infty$ wird eineindeutig auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet der x, y -Ebene abgebildet, dessen äußerer Rand die Bildkurve der Kreiszylinder (Zylinderkurve), dessen innerer Rand die Bildkurve aller Quader mit quadratischer Grundfläche (Würfelkurve) ist. Diese besitzt im Bildpunkt des Würfels eine Spitze und liegt ganz innerhalb der Zylinderkurve.

Der Teilstreifen $1 - \frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq 1$; $0 \leq h < \infty$ wird eindeutig auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit der Würfelkurve als oberem und der x -Achse als unterem Rand abgebildet.

Damit erweist sich die Zylinderkurve als äußerer Bildrand, und es folgt aus (3) durch Elimination von ε und h das vollständige Ungleichungssystem für Zylinderkörper.

Rotationskörper. Bei konvexen Rotationskörpern darf man sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf solche mit einer festen Länge $l > 0$ beschränken. Für die abgeschlossene Klasse \mathfrak{R}_0 aller Rotationskörper mit der festen Länge $l > 0$ hat der Referent folgende Teilresultate erreicht:

1. Im Intervall $\frac{\pi l^3}{24} \leq V < \infty$ besitzen genau die Kegel bei festem Volumen V größte Oberfläche F .
2. Im Intervall $V_2 \leq V < \infty$ besitzen genau die Kegel bei festem Volumen V größtes Integral der mittleren Krümmung M ; V_2 bestimmt sich hier als einzige

Wurzel einer transzendenten Gleichung, und es ist $V_2 \leq \frac{\pi l^3}{24}$.

Somit besitzen die Kegel im Intervall $\frac{\pi l^3}{24} \leq V \leq \infty$ beide Maximaleigenschaften. Daraus folgt weiter im Hinblick auf (1), daß die Kegel bei vorgegebenem V aus obigem Intervall innerhalb von \mathfrak{R}_0 kleinstes y und zugleich kleinstes ω aufweisen. Damit ist im BLASCHKE-Diagramm eine unscharfe Abgrenzung des Bildrandes nach unten gewonnen in der Form $y \geq y_0$; $\omega \geq \omega_0$, von welcher allerdings der Punkt (y_0/ω_0) zum tatsächlichen Bildrand gehört.

Läßt man nun nachträglich V im oben angegebenen Intervall variieren, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Lage der Bildkurve der Kegel bezüglich der Koordinatenlinien $y = \text{konst.}$; $\omega = \text{konst.}$ ein Intervall $\frac{\pi l^3}{24} \leq V \leq V^*$, für welches die Bildkurve der Kegel tatsächlich den unteren Rand des Bildes darstellt. V^* ist das Volumen desjenigen Kegels fester Länge l , für den der Quotient V/M^3 ein Maximum erreicht.

Damit ist für die durch $\frac{\pi l^3}{24} \leq V \leq V^*$ charakterisierte Teilklasse \mathfrak{R}_{00} von \mathfrak{R}_0 das Hauptproblem gelöst.

2. Mitteilung von Herrn Dr. Alfred Maret (Biel): «Bemerkungen zur Vorzeichenregel der elementaren Algebra».

Diese Regel, für Addition und Subtraktion einerseits und Multiplikation und Division andererseits äußerlich dieselbe, lautet bekanntlich:

$$(1) \quad + + = +$$

$$(3) \quad - + = -$$

$$(2) \quad + - = -$$

$$(4) \quad - - = +$$

Ersetzen wir nun $+$ durch das Symbol i (nicht $\sqrt{-1}$!) und $-$ durch j , so können wir das obige System wie folgt schreiben, wobei wir die Beziehungen (1) und (4), ferner (2) und (3) zusammenziehen und noch $ii = i^2$ und entsprechend $jj = j^2$ setzen:

$$i^2 = j^2 = i \text{ und } ij = ji = j. \quad (a)$$

Dieses System ist formallogisch einem andern vollständig äquivalent, nämlich:

$$i^2 = j^2 = j \text{ und } ij = ji = i, \quad (b)$$

was sofort durch Vertauschung von i und j in (a) einleuchtet. Schreiben wir nun (b) mit den früheren Symbolen, so wird:

$$(1') \quad + + = -$$

$$(3') \quad - + = +$$

$$(2') \quad + - = +$$

$$(4') \quad - - = -$$

Diese «neue» Zeichenregel ist formallogisch ebenso «richtig» wie die in der Algebra angewendete. Die Bevorzugung des ersten Systems beruht also einzig auf einer (stillschweigenden) Konvention.

Worin besteht diese inhaltlich? Einfach darin, daß die Menschen gewohnt sind, das Ergebnis von Operationen (Handlungen) von der anfangs vorgegebenen Ausgangszahl aus zum Resultat hin zu bewerten. Wir könnten aber ebenso richtig den «Erfolg» von Operationen vom Resultat her gegen das anfangs Gegebene hin beurteilen. Wir messen gewöhnlich ein Resultat vom Nullpunkt her zur erhaltenen Resultatzahl und nicht vom Resultat zu einem im voraus bestimmten Nullpunkt.

Für das Aufkommen dieser Gewohnheit, die dann zu einer Konvention wurde, ist wohl ganz unbewußt der zeitliche Ablauf des Geschehens, für das es kein Zurück gibt, verantwortlich zu machen. Sie ist also psychologisch bestimmt. Diese Andeutungen mögen zeigen, daß in Grundlagenfragen der Mathematik man ohne Berücksichtigung von zeitlichen und psychologischen Erwägungen nicht auskommen kann.

176. Sitzung, Freitag, den 1. Februar 1952

Vortrag von Herrn Dr. Waldemar Michael (Bern) über: «Der gegenwärtige Stand der Ortskurvengeometrie».

Die mit Hilfe von komplexen Größen entwickelte Theorie der Wechselstrom-Maschinen und -Apparate führt auf Gleichungen folgender Art:

$$V(v) = (A + Bv + Cv^2 + \dots) / (D + Ev + Fv^2 + \dots). \quad (1)$$

Darin bedeuten $A, B \dots D, E \dots$ im allgemeinen komplexe Konstanten und v einen reellen Parameter, der von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren kann und ein Maß für eine physikalische Größe darstellt, von der die gesuchte Größe $V(v)$ abhängt. In der komplexen Zahlenebene kann $V(v)$ als Vektor abgebildet werden, der sich als Funktion von v stetig ändert, wobei seine Spitze eine Kurve beschreibt, die man als die «Ortskurve» der Größe $V(v)$ bezeichnet. Die Ortskurven spielen bekanntlich beim Studium der

Wirkungsweise der genannten Maschinen und Apparate eine wichtige Rolle. Sie erfordern eine besondere Behandlungsweise, da der in deren Gleichung enthaltene Parameter — wegen seiner physikalischen Bedeutung — nicht eliminiert werden darf.

Aufgabe der «Ortskurvengeometrie» ist es, aus der vektoriellen Gleichung einer Ortskurve deren charakteristische Merkmale und Konstruktionselemente zu ermitteln, die eine exakte Aufzeichnung der Kurve mit einer beschränkten Anzahl von Punkten ermöglichen.

Der Vortragende zeigte in großen Zügen und an Hand klarer Abbildungen, wie diese Aufgabe, besonders für die in der Starkstromtechnik am häufigsten auftretenden Ortskurven, gelöst werden kann.

Es sind dies die folgenden Kurven:

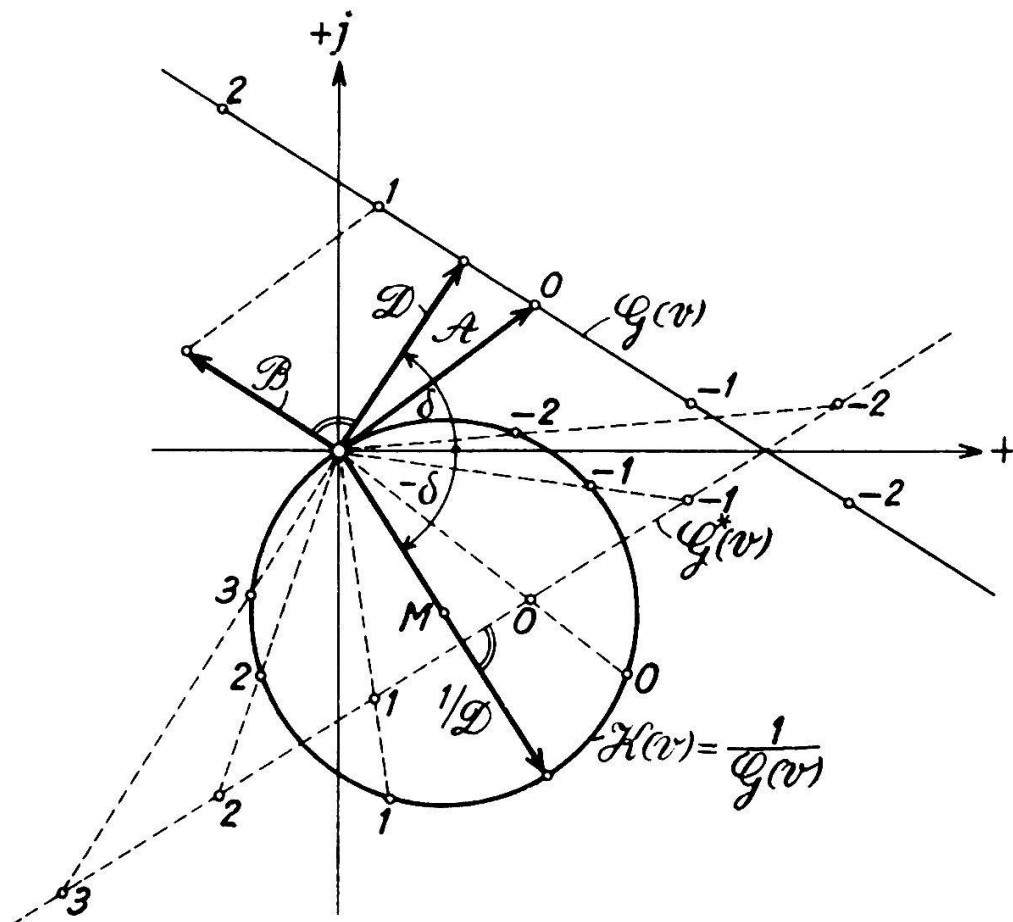
Der Kreis: $K(v) = (A + Bv) / (C + Dv)$ (2)

Die zirkuläre Kubik: $P(v) = (A + Bv + Cv^2) / (D + Ev)$ (3)

Die bizirkuläre Quartik: $Q(v) = (A + Bv + Cv^2) / (D + Ev + Fv^2)$ (4)

Beim Kreis wurde unter anderem gezeigt, wie man dessen Mittelpunktsvektor und dessen Radius durch Einsetzen des zur Wurzel des Nenners $w = -C/D$ konjugierten Wertes $w^* = -C^*/D^*$ berechnen kann und wie man die Parameterverteilung auf dem Kreis graphisch leicht bestimmen kann.

Bei der zirkulären Kubik ergab sich durch Ausdividieren des Zählers durch den Nenner ihre Konstruktion als vektorielle Summe einer Geraden und eines Kreises, wobei die Gerade zugleich die Asymptote der Kurve ist.



Konstruktion des Kreises $K(v)$ als Inverse der Geraden $G(v)$

Auf Grund eines früher vom Vortragenden bewiesenen Satzes wurde bei der bizirkularen Quartik die Konstruktion ihres reellen singulären Punktes als Schnittpunkt von drei Kreisen vorgeführt, deren Gleichungen unmittelbar aus (4) ablesbar sind.

Der Vortragende behandelte insbesondere auch die Sonderfälle, die sich aus den Gleichungen (2) bis (4) ergeben, wenn die Konstanten im Nenner derselben alle reell statt — wenigstens zum Teil — komplex sind. Durch diese Spezialisierung erhält man aus (2) die Gleichung einer Geraden:

$$G(v) = (A + Bv) / (c + dv); \quad (5)$$

aus (3) die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch den Ursprung geht:

$$K(v) = (A + Bv + Cv^2) / (d + ev) \quad (6)$$

und aus (4) die Gleichung eines Kegelschnittes in allgemeiner Lage:

$$K(v) = (A + Bv + Cv^2) / (d + ev + fv^2). \quad (7)$$

(d, e, f = reelle Zahlen). (5) läßt sich durch die Parametersubstitution $v' = 1/(c + dv)$ auf die einfachere Form reduzieren:

$$G(v') = A' + B'v'. \quad (5')$$

Eine einfache Konstruktion der Kegelschnitte läßt sich durch Zerlegung der Gleichung (7) in Partialbrüche gewinnen, wozu man die Wurzeln des Nenners benötigt. Sind sie reell und verschieden, dann erhält man eine Hyperbel mit ihren Asymptoten; sind sie reell und gleich, dann ergibt sich eine Parabel; sind sie konjugiert komplex, dann erhält man eine Ellipse als Summe zweier Kreise.

Der Vortragende zeigte dann noch, wie man durch einfache Operationen die Achsen, die Tangenten und die Krümmungskreise bei den verschiedenen Kegelschnitten bestimmen kann, wobei sich — wie bei der zirkularen Kubik und bizirkularen Quartik — neue Sätze und Konstruktionen ergaben, die auf anderem Wege nicht so leicht zu finden sein dürften. Die beiliegende Abbildung gibt einen Einblick in solche Konstruktionen.

Es dürfte damit erwiesen sein, daß die «Ortskurvengeometrie» auch in rein mathematischer Hinsicht ein gewisses Interesse beanspruchen darf. Die wichtigsten bisherigen Ergebnisse dieser neuartigen Kurvenbehandlung hat der Vortragende in seinem Buche über «Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene» übersichtlich dargelegt.

177. Sitzung, Freitag, den 15. Februar 1952

1. Mitteilung von Herrn Dr. Hans Bieri (Bern): «Beiträge zum Hauptproblem der konvexen Körper», 2. Teil.

2. Mitteilung von Herrn Dr. Arnold Streit (Bern): «Ein zweites Näherungsverfahren zur Dreiteilung des Winkels».

Vergleiche die Berichte zu den Sitzungen 168 und 175.

178. Sitzung, Freitag, den 29. Februar 1952

(gemeinsam mit der Philosophischen Gesellschaft Bern)

Vortrag von Herrn Prof. Dr. Willy Scherrer (Bern): «Der Begriff des Axioms und seine erkenntnistheoretische Bedeutung».

Der Referent erläutert folgende Thesen, die bei Gelegenheit ausführlicher publiziert werden sollen.

1. Ein Axiom ist eine als streng gültig anerkannte Aussage, für die kein Beweis gefordert wird.
Speziell die Problematik der geometrischen Axiome im Laufe der historischen Entwicklung beruht auf folgenden zwei Umständen:
 - a) Die geometrischen Axiome erweisen sich als implizite Definitionen (Postulate), von denen man nicht von vornherein weiß, ob sie in logisch widerspruchsfreier Weise bestehen können.
 - b) Ihre Entstehung und Anwendung hängt gerade in den interessanten Fällen mit den empirischen Raumverhältnissen zusammen. Durch diesen Umstand wird also das erkenntnistheoretische Problem von Geometrie und Erfahrung aktuell.
2. Die logische Klärung der geometrischen Axiomatik wird nach dem Vorgange von HILBERT durch die Arithmetisierung der Geometrie erreicht. Die geometrischen Axiome werden auf explizite Definitionen im Zahlenraum zurückgeführt. Die Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Geometrie ist damit auf ein internes Problem der Arithmetik im weitesten Sinne des Wortes (Mengenlehre) zurückgeführt, das heute noch im Fluß ist.
3. Die Frage nach dem Verhältnis von Geometrie und Erfahrung reduziert sich damit auf das Problem, ob, wie und mit welchem Erfolg die arithmetisierten Grundgebilde der Geometrie in der Erfahrung aufgewiesen werden können. Den einzigen objektiven Maßstab für diesen Erfolg aber bilden die Häufigkeit und Genauigkeit der gelungenen Voraussagen. Diese auf dem Boden der Geometrie gewonnene erkenntnistheoretische Klärung hat grundsätzliche Bedeutung: Sie gilt ganz allgemein für das Verhältnis von Theorie und Erfahrung.

179. Sitzung, Freitag, den 9. Mai 1952

(gemeinsam mit dem Mathematischen Seminar der Universität Bern)

Vortrag von Herrn Prof. Dr. Wilhelm Süss (Freiburg i. Br.): **«Einige neuere Ergebnisse über ebene und räumliche Eibereiche».**

An Stelle eines Vortragsberichtes verweisen wir auf zwei Publikationen des Referenten, die sich auf Fragen ähnlicher Art beziehen:

1. Über eine Affininvariante von Eibereichen; *Archiv der Math.* 1, 1948, 127/128.
2. Über Eibereiche mit Mittelpunkt; *Math.-Phys. Semesterberichte* 1, 1950, 273—287.

180. Sitzung, Freitag, den 23. Mai 1952

Vortrag von Herrn Prof. Dr. B. L. van der Waerden (Zürich) über: **«Lagerung von Punkten auf der Kugel».**

An Stelle eines Vortragsberichtes verweisen wir auf zwei Publikationen des Referenten und seiner Mitarbeiter, die sich auf Fragen gleicher Art beziehen:

1. Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?
Math. Ann. 123, 1951, 96—124 (gemeinsam mit K. SCHÜTTE).
 2. Lagerung von Punkten auf der Kugel; Math. Ann. 123, 1951, 223—234 (gemeinsam mit W. HABICHT).
-

181. Sitzung, Freitag, den 14. November 1952

Vortrag von Herrn Prof. Dr. Willy Scherrer (Bern): «**Metrisches Feld und vektorielltes Materiefeld**».

Referat über eine unter demselben Titel erschienene Abhandlung (Comm. Math. Helv. 26 (3), 1952, 184—201).

182. Sitzung, Freitag, den 5. Dezember 1952

Vortrag von Herrn Prof. Dr. Louis Locher (Winterthur): «**Wieviele regelmässige Vielfläche gibt es?**»

Der vom Referenten betrachtete Begriff des regelmäßigen Polyeders stützt sich auf die Gleichberechtigung der Kanten. Ein solches Polyeder mit k Kanten gestattet 2 k kongruente Abbildungen auf sich selbst, wobei die mit einer festen Orientierung versehenen Kanten transitiv vertauscht werden, und zwar je mit Erhaltung und mit Wechsel der Orientierung. Diese Charakterisierung gestattet bereits, eine Reihe von Aussagen, welche das Baugesetz regelmäßiger Vielfläche weitergehend festlegen, mit einfachen geometrischen Schlüssen herzuleiten. So gilt zum Beispiel: 1. Alle Raumecken sind kongruent und regelmäßig; 2. Alle Seitenflächen sind kongruent und regelmäßig; 3. Alle Ecken liegen auf einer Umkugel; 4. Alle Seitenflächen berühren eine mit der Umkugel konzentrische Inkugel.

Der Referent führt nun den Nachweis, daß es genau 12 verschiedene regelmäßige Vielfläche gibt, wenn man kongruente Exemplare identifiziert. Es handelt sich um die folgenden Vielfläche: 1. Tetraeder; 2. Hexaeder; 3. Oktaeder; 4. Dodekaeder; 5. Ikosaeder; 6. Sterneckiges Dodekaeder; 7. Sterneckiges Ikosaeder; 8. Achteckiger Tetraederstern; 9. Zwölfeckiges Sterndodekaeder; 10. Zwanzigeckiges Sterndodekaeder; 11. Erster zwanzigeckiger Tetraederstern; 12. Zweiter zwanzigeckiger Tetraederstern.

Die Vielfläche 11 und 12 sind spiegelbildlich gleich, so daß, wenn auch uneigentlich kongruente Exemplare identifiziert werden, die Anzahl der regelmäßigen Polyeder von 12 auf 11 sinkt.

Kunstvoll verfertigte Fadenmodelle und ansprechende Lichtbilder veranschaulichten die verschiedenen Körper und brachten den sonderbaren Reiz, der von diesen schönsten Realisierungen regelmäßiger und symmetrischer Baugesetze des Raumes ausgeht, dem sich auch Bewunderer früherer Jahrhunderte (EUKLID, PLATON, KEPLER, LEONARDO DA VINCI, DÜRER) nicht verschließen konnten, zur vollen Entfaltung.
