

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft in Bern  
**Band:** 7 (1950)

**Vereinsnachrichten:** Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SITZUNGSBERICHTE

## der Mathematischen Vereinigung in Bern

*158. Sitzung, Freitag, den 21. Januar 1949 (Mitteilungsabend)*

1. Herr Dr. Arnold Streit (Bern) spricht über die «Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung ohne Wegschaffen des quadratischen Gliedes».

Ausgehend von der leicht zu verifizierenden Identität

$$(u+v)^6 - 6uv(u+v)^4 + 9u^2v^2(u+v)^2 - (u^3+v^3)^2 \equiv 0$$

erhält man die für  $z = (u+v)^2$  richtige Gleichung

$$(1) \quad z^3 - 6uv \cdot z^2 + 9u^2v^2 \cdot z - (u^3+v^3)^2 = 0$$

oder abgekürzt

$$(2) \quad z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

mit der Nebenbedingung  $a^2 = 4b$ .

Zur Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung

$$(3) \quad x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

ergibt sich danach folgendes Verfahren:

Vermöge der Transformation

$$x = z+k \text{ mit } k = \frac{-A + 2\sqrt{A^2 - 3B}}{3}$$

wird (3) in (2) übergeführt. Die Nebenbedingung ist dann erfüllt und es folgt aus dem Vergleich mit (1)

$$uv = -\frac{a}{6}; \quad u^3 + v^3 = \sqrt{-c},$$

also

$$u^3 = \frac{\sqrt{-c} + \sqrt{-c + \frac{a^3}{54}}}{2};$$

$$v^3 = \frac{\sqrt{-c} - \sqrt{-c + \frac{a^3}{54}}}{2}$$

und schließlich

$$z = (u+v)^2.$$

*Anmerkung:*

Wendet man obiges Auflösungsverfahren auf die übliche Normalform der kubischen Gleichung ( $A = 0$ ;  $B = 3p$ ;  $C = 2q$ ) an, so folgt die *Cardansche Formel*.

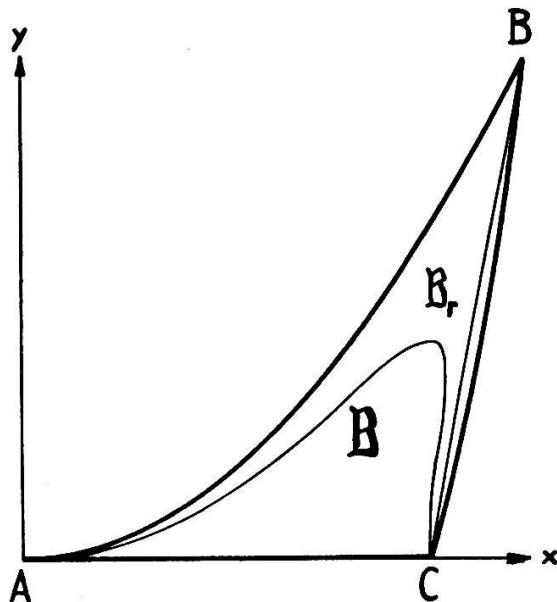
2. Herr Dr. Hans Bieri (Bern) berichtet über «Gelöste und ungelöste Probleme der konvexen Körper».

Einem konvexen Körper mit dem Volumen  $V$ , der Oberfläche  $F$  und dem Integral der mittleren Krümmung  $M$  wird vermöge der Abbildung

$$x = \frac{4 \pi F}{M^2}; \quad y = \frac{48 \pi^2 V}{M^8}$$

eindeutig ein Punkt der  $(x; y)$ -Ebene zugeordnet. Die Menge  $\mathcal{B}$  dieser Bildpunkte ist zusammenhängend und abgeschlossen. Für die Theorie der konvexen Körper ist nun die Kenntnis der Ränder von  $\mathcal{B}$  und der zugehörigen Relationen zwischen den Maßzahlen  $V$ ,  $F$  und  $M$ , ferner der entsprechenden Grenzkörper von fundamentaler Bedeutung. Hier besteht eine empfindliche Lücke:

Dem einen Randstück  $y = 0$  ( $AC$ , siehe Abb.) entspricht die Relation  $V = 0$ , dem andern  $x^2 - y = 0$  ( $AB$ ) ist die Relation  $F^2 - 3MV = 0$  zugeordnet; Grenzkörper sind im einen Fall die ebenen konvexen Bereiche, im zweiten Fall die Kappenkörper der Kugel. Das Randstück  $BC$  aber, die zugehörige Maßzahlrelation sowie die Grenzkörper sind bis heute nicht aufgefunden worden. Dieser Umstand verhinderte eine erschöpfende Charakterisierung der Klasse  $\mathcal{K}$  der konvexen Körper durch scharfe Ungleichungen.



Es war nun naheliegend, durch eine Beschränkung des Problems auf eine Teilklasse von  $\mathcal{K}$  die Schwierigkeiten zu verringern und vorläufig Teilresultate sicherzustellen. Die natürlichste, vom elementaren Standpunkt aus einleuchtendste Teilklasse ist wohl die Klasse  $\mathcal{K}_r$  der Rotationskörper. Zur Aufgabe, die Berandung des reduzierten Bildbereiches  $\mathcal{B}_r$  aufzufinden, kann folgendes mitgeteilt werden:

Der obere Rand von  $A$  nach  $B$  ist derselbe wie beim Bereich  $\mathcal{B}$ , da die Relation  $F^2 - 3MV = 0$  durch die Maßzahlen der rotationssymmetrischen Kugelkappenkörper erfüllt wird. Weiter weiß man nun, daß die Punkte der Randkurve von  $B$  nach  $C$  Bilder der symmetrischen Kugelzonen sind, indem H. Hadwiger be-

wiesen hat, daß diese Körper bei vorgegebenen  $M$  und  $F$  kleinstes  $V$  besitzen<sup>1)</sup>. Dagegen ist die Sachlage noch nicht abgeklärt für die Randkurve von  $A$  nach  $C$ . Diese scheint aus mehreren glatten Bogen zusammengesetzt zu sein, wie wenn verschiedengestaltige Körperscharen wie Einfach- und Doppelkegel und Zylinder beteiligt wären.

In bezug auf das allgemeinere Problem der Berandung von  $B$  können weitere Mitteilungen gemacht werden. Zunächst ergab die Analyse von Kurvensteigungen in den Endpunkten  $B$  und  $C$ , daß die Kugelzonen in der Klasse  $\mathbb{K}$  nicht extremal sind. Dies bedeutet, daß die gesuchten Grenzkörper im Gegensatz zu denjenigen für die Berandung  $AB$  nicht rotationssymmetrisch sind. Von P. Glur und dem Referenten wurden deshalb die Maßzahlen zweier Kalottenkörper (ein solcher entsteht aus einer Kugel durch Abschneiden von sich nicht überschneidenden Kalotten) berechnet, der günstigere unterbot bei gleichen  $M$  und  $F$  das  $V$  der Kugelzone um  $2^{1/4} \%$ .

Mit Hilfe der Variationsrechnung kommt der Referent zum Schluß, daß die gesuchten Grenzkörper zur Klasse der Kreispolyeder (Kalottenkörper mit unendlich vielen Abschnitten derart, daß kein Kugelflächenstück übrigbleibt) gehören müssen. Dieses Resultat wird erreicht durch Analyse der Bedingungen, welche notwendig und hinreichend sind für das Verschwinden der ersten Variation bei bestimmten Deformationen des existierenden Grenzkörpers. Die gefundene Bedingung ist zwar nicht hinreichend für die Bestimmung dieses Grenzkörpers, hat aber doch große einschränkende Kraft. Die endgültige Ermittlung desselben scheint sich auf ein gewöhnliches Extremalproblem, allerdings mit lästigen Nebenbedingungen und unendlich vielen Variablen, zu reduzieren.

---

159. Sitzung, Freitag, den 11. Februar 1949.

Vortrag von Herrn Rolf Nüseler (Bern) über «Mathematische Probleme der äußeren Ballistik».

Die Untersuchung der Geschoßflugbahnen liefert eine große Zahl interessanter mathematischer Probleme und Lösungsmöglichkeiten. Neben Anfangsgeschwindigkeit und Abgangswinkel beeinflussen Schweren, Luftwiderstand, Drall, Erdrotation die Geschoßbahn. So liefert die Flugparabel des luftleeren Raumes für den wirklichen Fall nur eine ganz grobe Näherung, da bei größeren Geschwindigkeiten der Luftwiderstand ein Mehrfaches des Geschoßgewichtes beträgt.

Unter den Näherungen erster Ordnung unterscheidet man geometrische und physikalische Verfahren. Bei den ersten wird der Flugbahn eine einfache geometrische Kurve unterschoben, wie eine schiefliegende Parabel, eine Parabel dritten Grades oder eine Flugparabel wie beim luftleeren Raum aber mit variablem Abgangswinkel. Bei den physikalischen Näherungen wird zum Beispiel eine schiefer gerichtete Erdbeschleunigung eingesetzt, oder man stellt eine Parabel dritten Grades auf, indem man neben Anfangsgeschwindigkeit und Abgangsrichtung die

---

<sup>1)</sup> H. Hadwiger: Beweis einer Extremaleigenschaft der symmetrischen Kugelzone. *Portugaliae Mathematica* 7, 1948, 73—85.

Schußweite berücksichtigt. Dieses letzte Verfahren von Piton-Bressant liefert für Ueberschlagsrechnungen rasch Näherungen mit meist weniger als 10 % Abweichungen.

Bei den exakten Untersuchungen spielt die Kenntnis des Luftwiderstandes die Hauptrolle. Dieser ist in komplizierter Art von der Geschwindigkeit abhängig (Gesetz von Eberhard), nach neuern Erkenntnissen aber auch vom Verhältnis zwischen Geschoß- und Schallgeschwindigkeit (Dupuis 1928). Außerdem hängt der Luftwiderstand vom Luftgewicht und von der Geschoßform ab, wobei letztere Abhängigkeit wieder eine Funktion der Geschwindigkeit ist. Grundlegend für alle Berechnungen ist die Hodographengleichung, eine Differentialgleichung zwischen der Geschoßgeschwindigkeit  $v$  und dem Flugbahneigungswinkel  $\vartheta$ , in der das Luftwiderstandsgesetz  $f(v)$ , die Erdbeschleunigung  $g$  und ein Formfaktor  $c^*$  auftreten:

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{c^*}{g} v f(v).$$

Die Lösung dieser Gleichung kann mechanisch gefunden werden, wenn man ein Gesetz für  $f(v)$  annimmt (Curti-Flugbahntograph der ETH). Zur rechnerischen Lösung muß man Vereinfachungen vornehmen, indem man zum Beispiel dem Luftwiderstandsgesetz die Form  $v^n$  gibt mit für gewisse Geschwindigkeitsbereiche konstantem Exponenten. — Bei der Teilbogenberechnung wird die Flugbahn in Teilstücke von wenigen hundert Meter Länge eingeteilt. Jeder Bogen wird aus den am Anfang herrschenden Bedingungen berechnet. Aus den am Ende vorhandenen Größen von Geschwindigkeit, Richtung, Luftgewicht und den Anfangswerten wird der Bogen mit gemittelten Werten nochmals durchgerechnet. Dieses Verfahren bedingt einen riesigen Rechenapparat. — Sacci sucht durch Einführen der Pseudogeschwindigkeit, der auf die Anfangstangente projizierten Geschwindigkeit, und zweier durch Schießversuche zu bestimmenden Ausgleichsfaktoren die Gleichung integrabel zu machen. Er erhält verschiedene Hilfsfunktionen, deren Tabellen erlauben, die Flugbahngrößen (Schußweite, Flugbahnhöhe, Flugdauer, Bahnneigung, Fluggeschwindigkeit) zu ermitteln.

---

*160. Sitzung, Freitag, den 25. Februar 1949.*

**Herr Prof. Dr. Hugo Hadwiger (Bern)** spricht über das Thema: «Elementarer Nachweis der Isoperimetrie der Kugel».

Zwischen dem Volumen  $V$  und der Oberfläche  $F$  eines konvexen Körpers gilt die bekannte klassische isoperimetrische Ungleichung

$$(1) \quad \sqrt{F^3} - 6 \sqrt{\pi} V \geq 0.$$

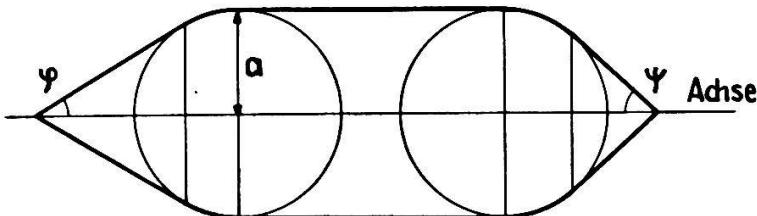
Für konvexe Rotationskörper mit dem Äquatorradius  $a$  läßt sie sich verschärfen zu (Bonnesen)

$$(2) \quad \sqrt{F^3} - 6 \sqrt{\pi} V \geq (\sqrt{F} + \sqrt{\pi} a) (\sqrt{F} - 2 \sqrt{\pi} a)^2.$$

Im ersten Teil des Vortrages<sup>2)</sup> zeigt nun der Referent, daß sich eine noch weitergehende Verschärfung der Form

$$(3) \quad \begin{aligned} \sqrt{F^3} - 6\sqrt{\pi}V &\geq (\sqrt{F} + \sqrt{\pi}a)(\sqrt{F} - 2\sqrt{\pi}a)^2 \\ &+ \sqrt{\pi^3}a^3 \left[ \frac{(1 - \sin\varphi)^2}{\sin\varphi} + \frac{(1 - \sin\psi)^2}{\sin\psi} \right] \end{aligned}$$

auf rein elementarem Wege für konvexe polygonale Rotationskörper gewinnen läßt. Dabei bedeutet ein polygonaler Rotationskörper einen solchen, welcher sich aus endlich vielen Kegelstumpfsegmenten zusammensetzt, Anfangs- und Schlußsegment seien indessen als Kegel mit den halben Öffnungswinkeln  $\varphi$  und  $\psi$  vorausgesetzt. Da ein beliebiger konvexer Rotationskörper  $K$  durch polygonale Rotationskörper beliebig genau approximiert werden kann, läßt sich (3) auf jenen übertragen,  $\varphi$  und  $\psi$  bedeuten dann die halben Öffnungswinkel der in beiden Achsenendpunkten an  $K$  gelegten Tangentialkegelflächen. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn  $K$  ein Kappenkörper eines Kugelzylinders (Abb.) ist.



Im zweiten Teil des Vortrages<sup>3)</sup> gibt der Referent eine Beweisskizze zu (1) für beliebige beschränkte und abgeschlossene Punktmengen. An die Stelle von  $V$  und  $F$  treten hier das Lebesguesche Maß und die untere Minkowskische Oberfläche.

161. Sitzung, Dienstag, den 24. Mai 1949.

Vortrag von Herrn Prof. Dr. R. Risser (Paris) über «Les courbes de distribution et les surfaces de probabilités».

Die Theorie der Häufigkeitsverteilungen spielt in der mathematischen Statistik eine fundamentale Rolle. Einmal hat der Statistiker das Bedürfnis, empirisch vorgegebene Verteilungen mittels bekannter Häufigkeitsfunktionen zu approximieren. Sodann können aus den Gesetzmäßigkeiten theoretischer Verteilungen neue Erkenntnisse gefolgt werden. In diesem Zusammenhang sei an die modernen Prüfverfahren erinnert, die uns beim Auswerten von Versuchsergebnissen zu entscheiden gestatten, ob zwei Durchschnitte, zwei Häufigkeiten oder zwei Streuungen wesentlich oder

<sup>2)</sup> H. Hadwiger: Verschärfte isoperimetrische Ungleichung für konvexe Rotationskörper mit Spitzen. Erscheint voraussichtlich in Math. Phys. Semesterberichte (Münster i. W.) 1950.

<sup>3)</sup> H. Hadwiger: Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für abgeschlossene Punktmengen. Erscheint voraussichtlich in den Portugaliae Math. (Lisboa) 1950.

nur zufällig voneinander abweichen. Vielfach hat man auch den Unterschied zwischen der aus einer Stichprobe berechneten Maßzahl und dem entsprechenden Wert der Grundgesamtheit zu prüfen.

Häufigkeitsfunktionen können auf verschiedene Arten gewonnen werden. Die einen beruhen auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen und finden im Urnenschema ihre Veranschaulichung. So liegt der binomischen oder Bernoulli'schen Verteilung eine solche Versuchsanordnung zugrunde; als Grenzfälle ergeben sich hieraus die Verteilungen von Poisson sowie die Normalverteilung von Gauss-Laplace. Auch die hypergeometrische Verteilung und die von Pólya-Eggenberger als «Wahrscheinlichkeitsansteckung» definierte Verteilung lassen sich wahrscheinlichkeitstheoretisch begründen.

Als weiterer Ausgangspunkt zur Herleitung von Häufigkeitsfunktionen können Differentialgleichungen dienen. Grundlagen sind in dieser Hinsicht die Arbeiten von K. Pearson und seiner Schule; der Referent hat nun diese Studien vertieft. Durch systematische Auswertung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung wird man auf die verschiedensten Kurventypen geführt. Soll jedoch die Lösung der Differentialgleichung eine Häufigkeitsfunktion im mathematisch-statistischen Sinne darstellen, so hat sie gewissen Bedingungen zu genügen, Forderungen, die für die Abgrenzung des Definitionsintervales, für die Beurteilung der Parameter sowie für die Normierung der Integrationskonstanten bestimmend sind.

Vorerwähnte Betrachtungen lassen sich verallgemeinern und führen naturgemäß auf die Häufigkeitsflächen. Die gesuchte Funktionalrelation ist jetzt die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von Moutard, welche einen Spezialfall der bekannten Differentialgleichung von Laplace darstellt. Hieraus können die Häufigkeitsflächen vom Typus Laplace, Gauss, Pearson, ferner elliptische und hyperbolische Paraboloiden u. a. m. gewonnen werden.

---

162. Sitzung, Freitag, den 18. November 1949.

**Vortrag von Herrn Prof. Dr. André Mercier (Bern) «Ueber den kanonischen Formalismus».**

Der Vortrag war ein Auszug aus einer umfangreichen Arbeit, die unter dem Titel « Sur le formalisme canonique, la condition accessoire  $H + p_f + 1 = 0$  et la réversibilité de la mécanique classique et de la théorie des quanta » in den « Archives des Sciences » erscheint. Als eines der Hauptergebnisse sei erwähnt, daß sich die Schrödinger-Gleichung als eine neuartige, besonders zu definierende korrespondenzmäßige Uebersetzung der erwähnten Nebenbedingung (condition accessoire) und zugleich als erstes Integral zur Quantenmechanik erweist. Die Ueberlegungen fußen alle auf der typischen Eigenschaft, die unter Kanonizität bekannt ist, sie heben u. a. deren Gegensatz zur Lorentzischen Relativität hervor.

---

**163. Sitzung, Freitag, den 9. Dezember 1949.**

**Vortrag von Herrn Prof. Dr. Willy Scherrer (Bern) : «Betrachtungen zur Erkenntnistheorie der exakten Wissenschaften».**

Um das Wesen wissenschaftlicher Erkenntnis zu charakterisieren, muß man drei Stufen des Erkennens auseinanderhalten.

In einer ersten Stufe werden ausgehend von den uns angeborenen Vermögen Wahrnehmungen durch primitives (unbewußtes) Denken zu Wahrnehmungsbündeln (Dingen) verschmolzen. Sofern diese Wahrnehmungsbündel ohne oder gegen unseren Willen bewirkt werden, muß man den Dingen objektive Realität zuschreiben.

In einer zweiten Stufe werden die Dinge in der Vorstellung verglichen, in Elemente zerlegt und zu Begriffen geordnet. Sofern auf dieser Stufe Wahrnehmungen an Vorstellungen gemacht werden müssen, kann man hier von bewußtem Denken sprechen. Der ganze Prozeß wird durch die Sprache symbolisiert und formal objektiviert. Die dabei verfolgten Verfahrensweisen entsprechen in großen Zügen der klassischen formalen Logik.

In einer dritten Stufe werden Begriffe in Systeme geordnet. Entscheidend für die formale Objektivierbarkeit eines Systems ist die Frage nach demjenigen Begriff, der exakt und vollständig durch ein Symbol ersetzt werden kann. Als solcher erweist sich der Begriff der Zahl. Hier liegt der logische Grund für die Tatsache, daß die Formelsprache der Mathematik in den exakten Wissenschaften eine grundlegende Rolle spielt.

Das wesentliche Kennzeichen der von der Mathematik entwofenen Systeme besteht darin, daß sie, nach Vorgabe der einschlägigen Grundbegriffe, aus wenigen Grundsätzen (Axiomen) deduziert werden können. Bei dieser Deduktion spielt, wie die logische Analyse zeigt, der Begriff der natürlichen Zahl eine tragende Rolle. Die Problematik der Mathematik kann auf die Frage reduziert werden, ob es tatsächlich nötig und möglich ist, Begriffe einzuführen, die wesentlich über den Begriff der natürlichen Zahl hinausgehen, zum Beispiel den Begriff des Kontinuums.

Das Ideal der exakten Naturwissenschaft besteht in der Forderung, die Fülle der empirischen Beziehungen mit Hilfe eines axiomatischen Systems logisch zu ordnen. Ein Kernproblem bildet dann die Frage, ob und wie die Grundgebilde des in Aussicht genommenen axiomatischen Systems in der Empirie aufgewiesen werden können.

Zum Schluß erläutert der Referent gestützt auf die «Lehre vom Raumsinn des Auges» (F. B. Hofmann) daß, von der Empirie aus gesehen, keine Notwendigkeit besteht, den Begriff des Kontinuums einzuführen.