Sitzungsberichte
der Mathematischen Vereinigung in Bern

146. Sitzung, Freitag, den 17. Januar 1947 (Mitteilungsabend)

1. Herr **Konsul Tage Buntzen** (Bern) spricht: **„Zum 400. Geburtstag von Tycho Brahe“.**

Am 14. Dezember 1946 waren 400 Jahre verstrichen seit der Geburt des grossen dänischen Astronomen Tycho Brahe. Als Sohn eines dänischen Edelmannes genoss er eine sorgfältige Erziehung und Ausbildung, insbesondere in der Philosophie und Rhetorik. Die grosse Sonnenfinsternis vom 21. August 1560 und deren Vorausberechnung durch die Astronomen erregte aber dermassen sein Interesse, dass er sich nachher ganz dem Studium der Astronomie widmete.

Durch die Schrift „De nova Stella“, die er im Mai 1573 über den neuen Stern publizierte, den er unerwartet am 11. November 1572 am Himmel leuchten sah, machte er sich berühmt, und im Jahre 1576 verlieh ihm der dänische König Friedrich II. die kleine Insel Hven im Sund als Lehen, wo er sein bald weltberühmtes Observatorium und Laboratorium „Uraniborg“ ganz nach seinen eigenen Plänen und Ideen einrichtete.

Der Referent schilderte an Hand von Abbildungen die Instrumente, die Tycho Brahe grösstenteils selber entworfen und gebaut hatte, und seine überaus grosse Observationsgenauigkeit, die erst durch die Einführung des Fernrohres übertroffen wurde; ferner wie er die verschiedenen astronomischen Konstanten neu bestimmte und die Variation des Mondes entdeckte, und wie er als erster Refraktionstabellen systematisch zur Korrigierung seiner Observationen benutzte. Ein Sternkatalog wurde ausgearbeitet und die Planeten und Kometen studiert. Da die damaligen Uhren wenig exakt waren, wurde der Himmel selber als Zeitmesser verwendet.

Nach 21 Jahren regster Tätigkeit auf der Insel Hven kam es zu Unstimmigkeiten zwischen der Regierung Dänemarks und Tycho Brahe, der im Jahre 1597 Dänemark mit seiner Familie verliess und zwei Jahre später von Kaiser Rudolf II. von Böhmen zum kaiserlichen Astronomen in Prag berufen wurde. Hier starb er schon am 24. Oktober 1601 im Alter von nur 55 Jahren.

Seine Observationsprotokolle übergab er kurz vor seinem Tode seinem grossen Schüler Johannes Kepler, damit dieser daraus die Planetenbahnen bestimmen sollte, und zwar hoffte Tycho Brahe, dass die Observationen das von ihm angenommene geozentrische System bestätigen würden. Mit dem heliozentrischen System von Copernikus konnte er sich nicht einverstanden erklären, weil er die daraus erfolgende Parallaxe der Fixsterne nicht hatte feststellen können, obwohl dieselbe bei den damals angenommenen Sternabständen hätte messbar sein sollen.

Kepler hat die schwierige Aufgabe der mathematischen Bestimmung der Planetenbahnen glänzend gelöst, aber nur, wie er selber zugibt, dank der Genauigkeit der Observationen Tycho Brahes, insbesondere seiner Mars-Observationen. In der Kette der grossen Astronomen von Copernikus über Tycho Brahe zu Kepler, Galilei und Newton bildet Tycho Brahe ein ausserordentlich wichtiges Glied. Er gilt mit vollem Recht als einer der Reformatoren der Astronomie, und als Observator steht er unübertroffen da.

2. Frl. **Dr. math. Alice Roth** (Bern) berichtet: **„Ueber eine Eigenschaft des Cantorschen Diskontinuums“.**

Im Anschluss an die einfache Lösung einer von Herrn Prof. Dr. Hadwiger gestellten Aufgabe (vergl. „Elemente der Mathematik“ I, S. 95 und II, S. 118, Aufgabe 24) stellte sich die Referentin die Frage, ob die dort vorkommende Punktmenge nicht nur ein beliebig kleines Mass, sondern sogar das Mass Null haben könne. Das so verschärfte Problem heisst dann:

Gibt es auf der Kreislinie eine abgeschlossene Punktmenge A vom Masse 0, welche mit jeder aus ihr durch Drehung um den Winkel α um den Kreismittelpunkt hervorgehenden kongruenten Menge A_α einen nicht leeren Durchschnitt hat?

Dass auch diese Frage bejaht werden kann, folgt aus einer Eigenschaft des linearen Cantorschen Diskontinuums D_1: Jede reelle Zahl $a \, (-1 \leqq a \leqq 1)$ kann als Differenze zweier Zahlen von D_1 dargestellt werden. Diese bereits bekannte Tatsache (z.B. Steinhaus, Mirimanoff, Fund. math. I und IV) kann ausser auf rein arithmetischem Weg auch anschaulich geometrisch bewiesen werden, indem man beachtet, dass man die Menge der Differenzen $(x - y)$ zweier Zahlen x und y von D_1 erhält, indem man das Cantorsche Diskontinuum D_2 der Ebene (bestehend aus allen Punkten der Ebene, deren Koordinaten zu D_1 gehören) unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ auf die x-Achse projiziert und dass diese Projektion das ganze Intervall $[-1, +1]$ umfasst.

Die arithmetische Formulierung der benutzten Eigenschaft des Cantorschen Diskontinuums D_1 kann durch leichte Modifikation so gefasst werden, dass sie als Spezialfall eine Eigenschaft der ganzen Zahlen enthält, die aus der sog. Eulerschen Wägungsaufgabe bekannt ist. Euler bewies nämlich auf anderem Weg, dass jedes ganzzahlige Gewicht zweischalig wägbar ist mit den Gewichten 1, 3, 9, 27, ...

Die Referentin macht noch darauf aufmerksam, dass entsprechende Mengen wie die Menge A nicht nur auf der Kreislinie oder auf der Geraden, sondern auch in mehrdimensionalen euklidischen Räumen konstruiert werden können, d. h. in jedem euklidischen Raume gibt es abgeschlossene unbeschränkte Diskontinua vom Masse 0, die mit jeder kongruenten Menge einen nicht leeren Durchschnitt haben.

---

147. Sitzung, Freitag, den 28. Februar 1947 (Mitteilungsabend)

1. Herr **Rolf Nüscheler** (Bern) referiert über: **„Darstellende Geometrie des vierdimensionalen Raumes“.**

Die Darstellende Geometrie befasst sich mit der Aufgabe, die geometrischen Gebilde des Raumes und ihre gegenseitigen Lage- und Massbeziehungen auf der zweidimensionalen Zeichenebene darzustellen. Dabei braucht man nicht beim dreidimensionalen Raum stehen zu bleiben, sondern es ist auch möglich, höherdimensionale Räume auf der Zeichenebene abzubilden. Die folgenden Untersuchungen beschränken sich mit dem R^4, da bei einer höheren Dimension die Uebersichtlichkeit zu schwinden beginnt. Der R^4 spielt überdies in der Relativitätstheorie oder bei der raumzeitlichen Darstellung einer Bewegung im R^3 eine überragende Rolle und hat einen physikalischen Sinn.

Analytisch kann man den R^4 wie den R^3 oder R^2 behandeln, indem man eine vierte variable Grösse einführt. Interessant ist es dagegen, den R^4 aus dem R^3 synthetisch aufzubauen. Die Gebilde Punkt, Gerade und Ebene werden wie im R^3 definiert. Als weiteres lineares Gebilde tritt der „Raum“ hinzu, der durch vier nicht in einer Ebene liegenden Punkte aufgespannt wird. Unser anschaulich erfassbare R^3 ist so ein Raum. Das Bezugskoordinatensystem erhält man, indem man zum dreidimensionalen Achsensystem x, y, z eine vierte w-Achse einführt, die zu jeder der andern normal steht. Diese $\binom{4}{1}$ Achsen spannen $\binom{4}{2}$ Rissebenen auf (xy, xz, xw, yz, yw, zw) und bestimmen $\binom{4}{1}$ Koordinatenräume (xyz, xyw, xzw, yzw). Ebenso, wie man im R^3 im allgemeinen mit zwei der drei Rissebenen auskommt, benötigt man im R^4 nicht alle 6 Rissebenen. Man erhält für Konstruktionen einfache Verhältnisse, wenn man vom Ursprung aus die positiven Strahlen der x-Achse nach unten, der y-Achse nach rechts, der z-Achse nach oben und der w-Achse nach links zeichnet.

Ein Punkt ist durch Angabe der vier Koordinaten gegeben, folglich ist seine Lage im R^4 eindeutig bestimmt, wenn man seinen 1. Riss in der xy-Ebene und den 2. Riss in der zw-Ebene kennt (Hauptrisse). Im Gegensatz zum R^3 sind beide Risse unabhängig voneinander wählbar. Der Nebenriss auf der yz-Ebene verbindet mittels Ordner die beiden Hauptrisse. Eine Gerade ist durch die beiden Hauptrisse nicht bestimmt, da man aus dem ersten Riss eines Punktes der Geraden den zweiten nicht eindeutig bestimmen kann. Man benötigt noch den Nebenriss, der ebenfalls beliebig gewählt werden kann. Zur Bestimmung einer Geraden sind nämlich 6 Bestimmungsstücke nötig, z. B. ihr Spurpunkt mit dem R^3 (3 Bestimmungsstücke) und die 3 Richtungswinkel (Azimut, Elevation, Richtung in bezug auf die w-Achse). Eine Ebene ist durch 3 Punkte bestimmt, wobei man am einfachsten die Spurpunkte mit 3 Rissebenen angibt. Ein Raum kann durch die Spuren mit

3 Rissebenen bestimmt werden, d. h. durch die 4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Der Durchschnitt einer Geraden mit einem Raum ist ein Punkt, sofern die Gerade nicht im Raum oder parallel zu ihm liegt. Denn die Punkte der Geraden nehmen für alle Koordinaten alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ an und es gibt z. B. einen und nur einen Punkt, für den $w = 0$ ist, der also im Raume xyz liegt. Aehnliche Ueberlegungen führen zu folgenden Resultaten:

Bei allgemeiner Lage ist der Durchschnitt von 2 Räumen eine Ebene, von 2 Ebenen ein Punkt, von 1 Ebene und 1 Raum eine Gerade. Da diese Gebilde zusammen immer einen R^4 aufspannen, so kann man, indem man die Resultate des R^3 und R^2 hinzuzieht, die allgemein gültige Formel aufstellen

$$n_1 + n_2 = n_d + n_s$$

wo n_1 und n_2 die Dimensionszahl der beiden Teile, n_d diejenige des Durchschnittes und n_s diejenige der Summe, d. h. des aufgespannten Gebildes, bedeuten.

Auf einen Raum kann man durch einen Punkt eindeutig eine Normale errichten. So steht die w-Achse normal auf dem xyz-Raum. Eine Ebene steht zu einem Raum normal, wenn sie eine Normale des Raumes enthält. Man bestimmt den Abstand eines Punktes von einem Raume, indem man durch den Punkt die Normale auf den Raum fällt und deren Durchstosspunkt mit dem Raum sucht. Der Abstand beider Punkte ist der gesuchte Abstand. Den Abstand zweier Geraden bestimmt man wie im R^3, da zwei Gerade höchstens einen solchen aufspannen. Dagegen findet man den Abstand einer Geraden g von einer Ebene E, indem man eine Normalenrichtung n senkrecht auf den Raum sucht, der durch E und eine sie schneidende Parallele zu g aufgespannt wird. Diese Richtung und g spannen eine Ebene auf, die E in einem Punkte schneidet. Dies ist der eine Endpunkt des Abstandes, der andere wird als Schnitt von g mit der durch diesen Punkt gelegten Parallelen zu n erhalten.

In einem Punkt kann man auf eine Ebene unendlich viele Normale errichten, da man durch die Ebene beliebige Räume legen kann und in jedem eine Ebenennormale vorhanden ist. Diese Normalen bestimmen eine Ebene, die doppeltnormal zur gegebenen Ebene steht. Eine Ebene heisst einfachnormal zu einer zweiten, wenn sie eine Normalenrichtung enthält. (Die zw-Ebene ist doppeltnormal zur xy-Ebene, jede andere durch die w-Achse gelegte Ebene dagegen nur einfachnormal.)

Der Abstand der Punkte P_1 (x_1, y_1, z_1, w_1) und P_2 (x_2, y_2, z_2, w_2) wird im R^4 analog zum niederdimensionalen Raum definiert als

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (w_2 - w_1)^2.$$

Man erhält ihn als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem die Katheten die Abstände der ersten und zweiten Risse sind. Nach dieser Ueberlegung wurden die beiden Simplex konstruiert, die im Schrägbild dargestellt sind. Ein Simplex entsteht durch Fortführen der Reihe Strecke-Dreieck-Tetraeder und ist ein vierdimensionaler Körper mit 5 Ecken, 10 gleich langen Kanten, 10 gleichseitigen Grenzdreiecken und 5 regelmässigen Tetraedern als Oberkörper (entspricht der Oberfläche im R^3). Bei Fig. 2 durchdringen sich im R^3 einige Grenzdreiecke, was bei Fig. 1 nicht der Fall ist (ähnlich können sich die Risse von Kanten eines Tetraeders des R^3 schneiden oder nicht).

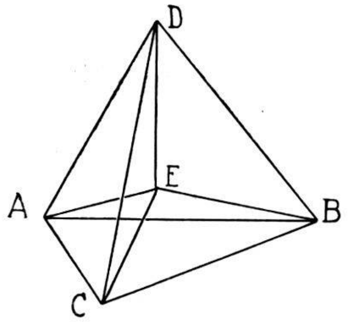

Fig. 1

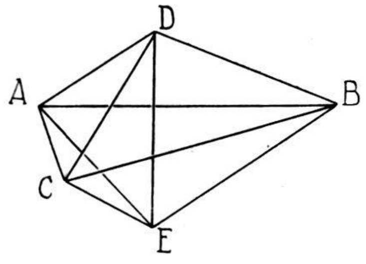

Fig 2.

2. Herr **Prof. Dr. Willy Scherrer** (Bern) spricht: **„Ueber die Gravitation kontinuierlich ausgebreiteter Massen“.**

Fasst man ein Sternsystem als eine kosmische Staubwolke mit einem eindeutigen und stetigen Geschwindigkeitsfeld auf, so sind seine durch die Gravitation allein verursachten Bewegungen nach Vorgabe des Anfangszustandes eindeutig bestimmbar aus dem System

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\,\pi\varkappa\mu. \tag{5}$$

Dieses System besitzt ein grundsätzliches theoretisches Interesse, weil es ein Modell für eine vollständige Wechselwirkung darstellt. Es besitzt aber auch ein praktisches Interesse, solange nicht bewiesen ist, dass der Effekt der statistischen Geschwindigkeitsverteilung überwiegt.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich zum Beispiel zwanglos die Grundphänomene der dynamischen Kosmologie, wie sie H e c k m a n n in seiner Monologie* beschreibt. Darüber hinaus aber erhält man auch Auskunft über das Verhalten begrenzter Systeme.

Als erste und einfachste Anwendung ergibt sich, dass eine homogene und ruhende Massenkugel von der Dichte μ_0 sich in der Zeit

* Theorien der Kosmologie, Springer, Berlin 1942.

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2\varkappa\mu_0}} \tag{6}$$

auf einen Punkt zusammenzieht, wo $\varkappa$ die Gravitationskonstante darstellt. Diese Zeit hängt also nur von der Dichte und nicht vom Volumen der Kugel ab. Für eine Weltraumdichte $\mu_0 = 1{,}4 \,.\, 10^{-28}$ gr cm^{-3} ergibt sich $T = 5{,}6 \cdot 10^9$ tr. Jahre, eine Zahl, die die Grössenordnung des heute gelegentlich diskutierten „Weltalters" hat.

Eine ausführliche Darstellung mit Folgerungen über die Expansion wird in den Helvetica Physica Acta erscheinen.

---

148. Sitzung, Freitag, den 16. Mai 1947

Herr **Prof. Dr. Oystein Ore** (New Haven USA) spricht über das Thema: **„Aequivalenzrelationen".**

Zwischen den Elementen a, b, c, ... einer Menge S sei eine Aequivalenzbeziehung E festgelegt mit folgenden Eigenschaften:

1. Determination: Für zwei Elemente a und b der Menge S ist stets eindeutig entscheidbar, ob sie äquivalent sind oder nicht (a E b oder a $\overline{\mathrm{E}}$ b).
2. Reflexion: a E a.
3. Symmetrie: Aus a E b folgt b E a.
4. Transitivität: Aus a E b und b E c folgt a E c.

Werden dann alle zu ein und demselben Element a äquivalenten Elemente von S zu einem Block B_a zusammengefasst, so erhält man eine eindeutige Aufspaltung der Menge S in die Blöcke B_a, B_b, B_c, . . .

An den so entwickelten Begriffen wies nun der Referent mannigfaltige interessante Zusammenhänge mit andern Disziplinen der Mathematik wie Kombinatorik, Mengenlehre, Theorie der Streckenkomplexe, Gruppentheorie und Geometrie auf. (Vgl. die Publikation des Referenten über die „Theory of equivalence relations" im Duke Math. J. 9 (1942), S. 573 bis 627).

---

149. Sitzung, Feitag, den 7. November 1947

Herr **Prof. Dr. Hugo Hadwiger** (Bern) spricht über: **„Grundbegriffe der Punktmengenlehre".**

An die Definition der Punktmenge und die elementaren Operationen der Vereinigung und Durchschnittsbildung schliesst sich der Aequivalenzbegriff der allgemeinen Mengenlehre an mit den fundamentalen Sätzen von Bernstein über die Vergleichbarkeit zweier Mengen und von Cantor über die Existenz nicht äquivalenter Mengen. Die Zusammenfassung äquivalenter Mengen zu Klassen führt auf die Reihe der zunächst endlichen und dann der transfiniten Kardinalzahlen.

Die Einführung einer Metrik liefert den Begriff der Umgebung und der Beschränktheit, ferner den Durchmesser und den Umkugelradius einer Menge und die diese beiden verknüpfende Ungleichung. Besonderes Interesse verdient die Definition der Distanz zweier Mengen, gedeutet in einem Mengenraum.

Die Untersuchung der strukturellen Verhältnisse im Kleinen und der gestaltlichen Verhältnisse im Grossen ergibt die für die Analysis grundlegenden Gebilde des Gebietes und des Kontinuums; während die mengentheoretische Formulierung des Kurven-, Flächen- und Körperbegriffs den Zusammenhang mit der Geometrie herstellt. Dabei nehmen die konvexen Mengen eine bemerkenswerte Sonderstellung ein.

Als Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstrass erweist sich ein allgemeiner Auswahlsatz über abgeschlossene und beschränkte Mengen, von welchem der Auswahlsatz von Blaschke über konvexe Körper wieder einen Spezialfall darstellt.

Der zweite Teil des Vortrages befasste sich mit der Inhaltslehre. Eine neuzeitliche kritische Betrachtung der Inhaltspostulate lehrt, dass ein universell auf alle Punktmengen anwendbarer Inhalt nicht existieren kann. Ein Inhalt kann demnach nur für die Mengen eines geeignet ausgewählten Systems definiert werden; entgegen der klassischen Auffassung, wonach er eine einer Punktmenge an sich zukommende Grösse wäre.

Stufenweise werden nun verschiedene Inhaltssysteme entwickelt. Der elementare Inhaltsbegriff für Würfelaggregate bietet keine grundsätzliche Schwierigkeit, seine Ausdehnung auf allgemeine Polyeder scheitert jedoch am Satz von Dehn, nach dem nicht-zerlegungsgleiche Polyeder existieren. Es folgt die Erweiterung zum Peano-Jordanschen Inhalt und, besonders anschaulich, die Einführung des Lebesgueschen Masses.

---

150. Sitzung, Freitag, den 21. November 1947

Herr **Paul Glur** (Bern) spricht über das Thema: **„Grundzüge der Theorie endlicher Gruppen".**

Nach einer geschichtlichen Einleitung über die Anfänge der Gruppentheorie wird der Gruppenbegriff an drei Beispielen, Permutationen, Bewegungen in der Ebene und Substitution von Funktionen, illustriert. Die Herausschälung der gemeinsamen Merkmale führt auf die abstrakte Gruppe mit den vier Gruppenpostulaten.

Nach der Klassifikation in endliche und unendliche, nichtkommutative und Abelsche Gruppen wird die endliche Gruppe an der Gruppentafel dargestellt und ihr Isomorphismus mit einer Permutationsgruppe aufgezeigt. Daran schliesst sich der allgemeine Isomorphiebegriff. Eine Untergruppe gestattet die Zerlegung in Komplexe, es folgt die Teilbarkeit der Gruppenordnung durch die Ordnung der Untergruppe, insbesondere durch die Ordnung jedes Elementes. Die Verknüpfung der Komplexe führt die konjugierte Untergruppe ein und erweist die ausgezeichnete Stellung der Normalteiler. Daraus leiten sich die Faktorgruppe und schliesslich die Kompositionsreihe ab.

Als konkrete Gruppen werden aufgeführt die zyklischen, die Diedergruppen und die Gruppen der regulären Polyeder. Von den Permutationsgruppen aus gelangt man zu Gruppen spezieller linearer Transformationen, ihre Verallgemeinerung eröffnet einen Zugang zu der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.

---

151. Sitzung, Freitag, den 12. Dezember 1947

Herr **Prof. Dr. Beno Eckmann** (Lausanne) spricht: **„Ueber die Fragestellungen und Methoden der Topologie“.**

Topologie ist ein Teilgebiet der Geometrie und befasst sich mit Eigenschaften, welche gegenüber eineindeutigen stetigen Abbildungen invariant bleiben. Der Referent erläutert nun topologische Methoden anschaulich an ausgewählten Beispielen.

Ein stetiger geschlossener Weg in der Ebene zerlegt diese in verschiedene Gebiete und ordnet zudem jedem Punkte eindeutig eine Umlaufszahl zu. Diese ist für alle Punkte ein und desselben Teilgebietes gleich. Nach dem Deformationssatz lässt sich der vorgegebene Weg stetig in einen Kreis deformieren, die Umlaufszahl bleibt invariant für alle Punkte P, welche bei der Deformation nicht getroffen werden. Lässt sich insbesondere dieser Kreis auf einen einzigen Punkt zusammenziehen, so war die Umlaufszahl um P Null. Dieser Sachverhalt erlaubt eine elegante Beweisführung des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen und des Fundamentalsatzes der Algebra. Ferner ergibt sich der Satz von Brouwer, wonach jede topologische Abbildung der Kreisscheibe in sich Fixpunkte hat.

Die Uebertragung derselben Betrachtungsweise auf die Kugel ergibt folgende Aussage: Zwei reelle, stetige und ungerade-antipodische Funktionen der Kugelpunkte besitzen eine gemeinsame Nullstelle. Hier schliesst sich ein Satz von Borsuk an.

Die Anwendung der erreichten Sätze auf ebene stetige Vektorfelder lehrt die Existenz von Singularitäten innerhalb einer geschlossenen Stromlinie, insbesondere den Satz von Maxwell über die Anzahl der vorhandenen Quellen, Senken und Sattelpunkte. Eine ähnliche Diskussion der Verhältnisse auf der Kugel erweist deren Nicht-Parallelisierbarkeit; und recht instruktiv gestaltet sich die Herleitung des Eulerschen Polyedersatzes anhand eines geeignet konstruierten Strömungsbildes.
