

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft in Bern  
**Band:** 3 (1946)

**Artikel:** Ueber das Volumen der Parallelmengen  
**Autor:** Hadwiger, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319431>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

H. Hadwiger

## Ueber das Volumen der Parallelmengen

Es bezeichne  $A$  eine beliebige Punktmenge des  $n$ -dim. Euklidischen Raumes. Unter der äusseren Parallelmenge  $A_\rho$  im Abstand  $\rho \geq 0$  verstehen wir die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius  $\rho$ , deren Mittelpunkte sich in  $A$  befinden. Die innere Parallelmenge  $A_\rho$  im Abstand  $\rho \geq 0$  definieren wir durch  $A_{-\rho} = ((A^*)_\rho)^*$ , wobei der Stern  $*$  den Uebergang einer Menge zur komplementären Menge des Raumes bezeichnet.

Falls  $A$   $J$ -messbar ist, soll  $V$  bzw.  $V_\rho$  den Inhalt von  $A$  bzw.  $A_\rho$  darstellen. Im Hinblick auf die oben gegebene Definition sollen hier wie im folgenden positive und negative Werte für  $\rho$  in Betracht fallen.

Wenn  $A$  eine konvexe und beschränkte Menge ist, so gilt das bekannte Steiner-Minkowskische Gesetz, wonach das Volumen der Parallelmenge von  $A$  eine ganze rationale Funktion von  $\rho$  ist. Genauer gilt folgende Formel:

$$(1) \quad V = C_0 + C_1\rho + \dots + C_n\rho^n, \quad -\delta \leq \rho < \infty.$$

Hierbei ist  $C_0 = V$ ,  $C_n = \omega_n$ , wo  $\omega_n$  das  $n$ -dim. Volumen der Einheitskugel des Raumes bezeichnet; allgemeiner ist  $C_i = W_i$ , wobei  $W_i$  das  $i$ -te Quermassintegral von  $A$  darstellt. Da das erwähnte Kugelvolumen nachfolgend wiederholt herangezogen werden muss, sei noch die Formel

$$(2) \quad \omega_n = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

hier angemerkt.

Man beachte noch besonders die Gültigkeitsabgrenzung der Formel (1), wonach sich diese im Falle  $\delta > 0$  auf äussere und innere Parallelmengen bezieht. Die Schranke  $\delta$  fällt mit dem sog. inneren

Rollradius der Randfläche von  $A$  zusammen; sie verschwindet, wenn diese Randfläche gewisse Unstetigkeiten in der Krümmung aufweist.

Durchrechnungen geeigneter Beispiele belehren uns darüber, dass das Steiner-Minkowskische Gesetz für passend beschränkte Intervalle durch viel allgemeinere, nicht konvexe Mengen realisiert wird.

Beispielsweise gilt für eine Kugelschale mit den Radien  $R$  und  $r$ ,  $R > r$ , die Volumformel

$$V\rho = \omega_n [(R + \rho)^n - (r - \rho)^n], \quad -\frac{R - r}{2} \leq \rho \leq r,$$

nach welcher also das Volumen der äusseren und inneren Parallelmenge im angegebenen Intervall ebenfalls eine ganze rationale Funktion  $n$ -ten Grades von  $\rho$  ist.

Welches sind nun die gestaltlichen Voraussetzungen über  $A$ , die eine Gültigkeit einer Volumformel für Parallelmengen dieser Art gewährleisten?

In dieser Arbeit beantworten wir diese Frage für Bereiche  $A$  (abgeschlossene Hüllen beschränkter Gebiete), welche gewissen Regularitätsvoraussetzungen betreffend die Randkrümmung zu genügen haben. Wir beschränken uns im folgenden auf Bereiche, für welche die  $n-1$  Hauptkrümmungen in einem Randpunkt stetige Funktionen auf der Randmannigfaltigkeit sind. Es ist selbstverständlich, dass unter derartigen geeigneten Voraussetzungen die in Betracht fallenden Inhalte der Parallelmengen mit Hilfe von Formeln der  $n$ -dim. Differentialgeometrie direkt berechnet werden können, so dass auf diesem Wege eine Verifikation des von uns in Aussicht genommenen Satzes erfolgen kann. Im Hinblick aber auf nachträglich mögliche Lockerungen der Voraussetzungen, soll hier ein anderer Weg beschrritten werden, der dem eigentlichen Wesen des Problems und seinen ursprünglichsten Zusammenhängen besser angepasst ist. Wir gewinnen nämlich unsere Hauptaussage direkt in einfachster Weise aus der kinematischen Hauptformel der  $n$ -dim. Integralgeometrie, die von den chinesischen Geometern Shing-Shen Chern und Chin-ta-Yen<sup>1)</sup> aufgestellt wurden.

<sup>1)</sup> Sulla formula principale cinematica dello spazio ad  $n$  dimensioni. Bollettino della Unione matematica italiana II, s. 2, 1940, XVIII, 434—437.

Beim einlässlicheren Studium der Frage, welche Eigenschaft eines solchen Bereiches  $A$  an die Stelle der Konvexität zu treten hat, falls man die Gültigkeit einer Formel (1) für ein passendes Intervall fordert, wird man in natürlicher Weise auf die Begriffe der *Unterkonvexität* und der *Überkonvexität*, wie wir sie weiter unten definieren, geführt. Diese neuen Begriffe scheinen in der Theorie der Parallelmengen eine ausschlaggebende Rolle zu spielen.<sup>2)</sup>

Die Definition vorbereitend, erklären wir die Charakteristik  $K(A)$  eines Bereiches  $A$ . Darunter verstehen wir die Eulersche Charakteristik (alternierende Summe der höheren Bettischen Zahlen) eines dem Bereich  $A$  zugeordneten homöomorphen Polyeders. Für konvexe  $A$  gilt  $K(A) = 1$ .

Ist  $A$  ein Bereich der oben beschriebenen Art, und bezeichnen  $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$  die  $n-1$  Hauptkrümmungen in einem Randpunkt von  $A$ , so kann in bekannter Weise die Charakteristik  $K(A)$  durch das über die Randmannigfaltigkeit zu erstreckende Integral der Totalkrümmung ausgedrückt werden, und zwar ist

$$(3) \quad K(A) = \frac{1}{n\omega_n} \int x_1 \dots x_{n-1} d\Omega.$$

Hier bedeutet  $d\Omega$  das  $(n-1)$ -dim. Oberflächendifferential des Randes von  $A$ .

Wir definieren jetzt:

*Der abgeschlossene Bereich  $A$  heisst unterkonvex vom Grade  $\alpha \geq 0$ , wenn der Durchschnitt  $AK_\rho$  für jede Kugel  $K_\rho$  vom Radius  $\rho$  die Charakteristik  $K(AK_\rho) = 1$  aufweist; dies treffe jedoch für kein  $\rho' > \alpha$  für alle Kugeln  $K_{\rho'}$  zu.  $A$  heisst überkonvex vom Grade  $\beta \geq 0$ , wenn die abgeschlossene Hülle  $\bar{A}^*$  der zu  $A$  komplementären Menge  $A^*$  unterkonvex vom Grade  $\beta$  ist.*

Beispielsweise ist die bereits oben zur Illustration herangezogene Kugelschale unterkonvex vom Grade  $r$  und überkonvex vom

$$\text{Grade } \frac{R-r}{2}.$$

<sup>2)</sup> Verf. hat in einer ausführlichen Abhandlung „Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche“, Commentarii Math. Helvetici 18, 1945/46, 59–72 Wesen und Bedeutung dieser Begriffe im zweidimensionalen Fall darzustellen versucht.

Nun lässt sich in bezug auf die Geltung des Steiner-Minkowskischen Gesetzes und mit Hilfe dieser neuen Konvexitätsbegriffe der folgende Satz formulieren:

**Satz:**

*Ist der beschränkte, abgeschlossene Bereich A unterkonvex vom Grade  $\alpha$  und überkonvex vom Grade  $\beta$ , so gilt im Intervall  $-\beta \leq \rho \leq \alpha$  die Formel*

$$(4) \quad V\rho = C_0 + C_1\rho + \dots + C_n\rho^n.$$

Hierbei ist  $C_0 = V$ ,  $C_1 = F$ ,  $C_n = \omega_n K$ , allgemein  $C_i = \frac{1}{n} \binom{n}{i} M_{i-1}$ , wo  $M_k$  das über den Rand von A erstreckte Krümmungsintegral

$$(5) \quad M_k = \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \int (\sum x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_k}) d\Omega$$

bezeichnet. Die Summation ist über alle Indizeskombinationen der Indizes 1, 2 ... n-1 zur Klasse k zu erstrecken.

**Beweis:**

Wir betrachten eine im Raum bewegliche Kugel  $K\rho$  vom Radius  $\rho$ . Die Koordinaten des Mittelpunktes seien  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Nach der bereits oben zitierten Hauptformel der n-dim. Integralgeometrie<sup>3</sup> gilt

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K(AK\rho) d\xi_1 \dots d\xi_n = V + F\rho + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{i} M_{i-1} \rho^i + \omega_n K \rho^n,$$

wobei sich die Integration über alle Lagen der beweglichen Kugel  $K\rho$  zu erstrecken hat. Alle in der Anschrift benutzten Zeichen wurden weiter oben erklärt.

Nach der Voraussetzung betreffend die Unterkonvexität von A wird nun  $K(AK\rho) = 1$  sein, für alle  $0 < \rho < \alpha$ . Das Integral in (6) stellt somit das Volumintegral der Mittelpunktmenge derjenigen Kugeln  $K\rho$  dar, die mit A einen nicht leeren Durchschnitt haben. Man beachte, dass natürlich für die leere Menge O die Be-

<sup>3)</sup> Die Originalformel hat einige für uns zweckdienliche Modifikationen in der Anschrift erfahren.

ziehung  $K(O) = 0$  gilt. Das Volumen dieser Mittelpunktmenge ist aber andererseits mit  $V_\rho$  identisch. So ergibt sich also für

$$(7) \quad V_\rho = V + F_\rho + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{i} M_{i-1} \rho^i + \omega_n K \rho^n.$$

Damit ist der sich auf die äusseren Parallelmengen beziehende Teil des Satzes bewiesen.

Wir überdecken jetzt  $A$  durch eine Kugel  $K_r$ , deren Radius  $r$  wir so gross wählen, dass die abgeschlossene Hülle  $A^0$  der Restmenge  $K_r - A$  unterkonvex vom Grade  $\beta$  ist. Dies ist möglich, weil nach der Voraussetzung betreffend die Ueberkonvexität die abgeschlossene Hülle der komplementären Menge  $A^*$  unterkonvex vom Grade  $\beta$  sein soll.

Für alle  $0 < \rho < \beta$  gilt nach dem bereits bewiesenen ersten Teil des Satzes

$$V^0_\rho = V^0 + F^0_\rho + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n}{i} M^0_{i-1} \rho^i + \omega_n K^0 \rho^n.$$

Nach Definition von  $A_{-\rho}$  wird nun die Beziehung

$$V_{-\rho} = \omega_n (r + \rho)^n - V^0_\rho$$

gelten.

Zwischen den den beiden Bereichen  $A$  und  $A^0$  zugewiesenen Masszahlen, gelten die nachfolgenden Relationen

$$V^0 = \omega_n r^n - V, \quad F^0 = n\omega_n r^{n-1} + F;$$

$$M^0_i = n\omega_n r^{n-1-i} + (-1)^i M_i, \quad K^0 = 1 + (-1)^n K.$$

Ihr Einsatz in den weiter oben angeschriebenen Beziehungen liefert sodann

$$(8) \quad V_{-\rho} = V - F_\rho + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} M_{i-1} \rho^i + (-1)^n \omega_n K \rho^n.$$

Damit ist auch der Beweis des sich auf die inneren Parallelmengen beziehenden Teil des Satzes abgeschlossen.

Die Ausdehnung der Gültigkeit vom offenen auf das abgeschlossene Intervall ist mit Rücksicht auf die Stetigkeit von  $V_\rho$  in Abhängigkeit von  $\rho$  zulässig.