

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft in Bern  
**Band:** 2 (1945)

**Vereinsnachrichten:** Sitzungsbericht der Mathematischen Vereinigung in Bern

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

---

130. Sitzung, Freitag, den 18. Februar 1944

Herr Prof. Dr. A. Mercier spricht über: „Die physikalische Nichtumkehrbarkeit“.

Eine Nichtumkehrbarkeit resultiert aus den folgenden Prinzipien, Tatsachen und Folgerungen.

## I. Aussagen physikalischer Art.

### A. Prinzipien der Quantentheorie.

1. Schrödinger-Gleichung. Die physikalischen Systeme werden durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben

$$\mathcal{H} = - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

deren Lösung  $\psi$  den Zustand (Dirac) und Operator  $\mathcal{H}$  (die Observable [Dirac] Energie) die Wechselwirkung des Systems charakterisieren. ( $\hbar =$  Plancksche Konstante,  $i = \sqrt{-1}$ ). Es gilt  $\psi = \psi(t, q)$ , wo  $q$  die Gesamtheit der zur Beschreibung des Zustandes verwendeten Parameter und  $t$  die Zeit bezeichnen.

2. Hermitizität. Alle Observablen der (Quanten-) Physik werden durch hermitesche (Dirac, Weyl) Operatoren  $A$  dargestellt; ihre Eigenwerte  $a_i$  aus der Gleichung  $A \varphi_i = a_i \varphi_i$  sind die Werte, die eine Messung liefern kann. Die  $\varphi_i$  bilden ein zu normalisierendes vollständiges orthogonales System:  $\int |\varphi_i|^2 dq = 1$ . Es wird auch gesetzt:  $\int |\psi|^2 dq = 1$  (zeitunabhängige Grösse!).

3. Unitäre Transformation. Es ist immer möglich,  $\psi$  folgendermassen zu entwickeln:

$$\psi = \sum_i \gamma_i(t) \varphi_i(q).$$

Zur Bildung von  $\psi$  genügt die Kenntnis der  $\gamma_i(t)$ . Es seien  $\gamma_i(0)$  deren Anfangswerte. Dann sind sie exakt zu berechnen mittels der Formel einer sogenannten unitären Transformation:

$$\gamma_i(t) = \sum_k U_{ik}(t) \gamma_k(0),$$

wobei das Matricelement  $U_{ik}(t) = \int \varphi_i^*(q) U \varphi_k(q) dq$  mittels folgenden Operators  $U$  gebildet wird:

$$U(t) = e^{-\frac{2\pi i}{h} \mathcal{H} t} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(-\frac{2\pi i}{h}\right)^N \mathcal{H}^N.$$

Aus der postulierten Hermitezität von  $\mathcal{H}$  folgt, dass  $U$  ein unitärer Operator ist.

4. Feinkörnige Wahrscheinlichkeit. Als Mass der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System sich im Eigenzustande  $\varphi_i$  der Observablen  $A$  befindet, wird die Zahl  $|\gamma_i|^2 = \gamma_i^* \gamma_i (\leq 1)$  im Falle eines Systems von unzähligen identischen Elementen (ihre sehr grosse Anzahl sei  $\lambda$ ) bilde man (v. Neumann) die arithmetischen Mittel über alle durch  $\nu$  numerierten Elemente

$$\rho_n = \mathfrak{M} \left\{ |\gamma_n|^2 \right\} = \frac{1}{\lambda} \sum_{\nu=1}^{\lambda} |\gamma_n^\nu|^2, \quad \rho_{kl} = \mathfrak{M} \left\{ \gamma_k^* \gamma_l \right\} = \frac{1}{\lambda} \sum_{\nu=1}^{\lambda} \gamma_k^{\nu*} \gamma_l^\nu.$$

Dort heisst  $\rho_n$  die feinkörnige Wahrscheinlichkeit des  $i$ ten Zustandes.

#### B. Statistische Prinzipien.

5. Rolle der Statistik. Eine statistische Methode muss verwendet werden, wenn es unmöglich ist, Anfangsbedingungen mit jener Genauigkeit anzugeben, welche durch die Theorie zugelassen wird: Aus irgendwelchen Gründen (deren Ursache einer Untersuchung nicht bedarf) ist man nicht imstande, aneinander sehr nah gelegene Zustände zu unterscheiden. Alle möglichen Zustände werden in Gruppen von  $G_1, \dots, G_n \dots$  Zuständen derart verteilt, dass der mittlere Zustand einer Gruppe von dem mittleren Zustand irgend einer andern Gruppe unterschieden werden kann. Die minimale Unterscheidung in Gruppen stellt die untere Grenze der möglichen Beobachtungen einer makroskopischen Physik dar.

6. Grobkörnige Wahrscheinlichkeit. Jedem Zustand der Gruppe  $G^n$  würde eine feinkörnige Wahrscheinlichkeit  $\rho_i$  entsprechen. Würde man alle  $\rho_i$  kennen, so könnte man das Mittel

$$P_n = \frac{1}{G_n} \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_n}{\sum_{i=G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1}} \rho_i}$$

bilden. Dieses Mittel  $P_n$  wird als grobkörnige Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Es ist eine Funktion der Zeit,  $P_n(t)$ .

7. Entropie. Gegeben ein System unzähliger identischer Elemente, für welches die  $P_n$  für alle makroskopischen Gruppen definiert sind. Man konstruiert die Funktion

$$S = -k \sum_{G_n} P_n \text{Log } P_n$$

und nennt sie die Entropie (Boltzmann) des Systems. Sie ist eine Funktion  $S(t)$  der Zeit. Die universelle Konstante  $k$  soll die Dimensionen [Energie/Temperatur] besitzen. Ihr Wert wird durch die Wahl einer Temperaturskala bestimmt.

8. Anfangsbedingungen. Als Anfangsbedingungen (Zeit  $t = 0$ ) in einer das System betreffenden, durch die Quantentheorie zu beantwortenden Aufgabe mikroskopischer Art sollte man die  $\gamma_i(0)$  angeben können. In der makroskopischen Physik gelingt dies nicht, allein die  $P_n(0)$  können angegeben werden.

9. Satz von Klein. Aus den Prinzipien der Quantentheorie, insbesondere aus der Tatsache, dass  $U$  unitär ist (also aus der Hermitezität der Observablen) und aus der unter 12. angegebenen algebraischen Ungleichung folgt der Kleinsche Satz über die feinkörnigen Wahrscheinlichkeiten:

$$\sum_k \rho_k(0) \text{Log } \rho_k(0) \geq \sum_k \rho_k(t) \text{Log } \rho_k(t).$$

10. Quantenmässiger Ausdruck der „Quasi-Ergodizität“. Um dem unter 8. erwähnten Mangel zuvorzukommen, müssen Anfangswerte postuliert werden, mindestens die Mittel  $\rho_n(0)$  und  $\rho_{kl}(0)$ , damit diese Mittel für eine Zeit  $t > 0$  mittels 3., somit die  $P_n$  mittels 6. und endlich die zeitliche Variation der Entropie nach 7. berechnet werden können. Dazu postuliert man eine Art Identität der fein- und der grobkörnigen Anfangswahrscheinlichkeiten, welche der Quasi-Ergoden-Hypothese der älteren Physik gleichkommt. Mathematisch ausgedrückt:  $\rho_n(0) = P_n(0)$ ,  $\rho_{kl} = 0$ .

11. Satz des Anwachsens der Entropie (H-Theorem). Mit der Definition 7. der Entropie folgt für eine Zeit  $t > 0$  aus 10. und 12., dass  $S(t) \geq S(0)$  (Boltzmann-Pauli).

## II. Aussage mathematischer Art.

12. Algebraische Ungleichung. Sind  $x$  und  $y$  zwei reelle, nicht negative beliebige Zahlen, so gilt immer  $x \text{Log} x - x \text{Log} y - x + y \geq 0$ , wobei das Zeichen  $=$  dem Fall  $x = y$  entspricht.

### 131. Sitzung, Freitag, den 3. März 1944

Herr Pd. Dr. A. Linder spricht über das Thema: „Ueber den „mittleren Fehler“ eines Durchschnitts nebst Bemerkungen zu Stohlers Leitfaden der Algebra III“.

Die übliche Berechnung des „mittleren Fehlers“ eines Durchschnitts gilt nur, wenn die Zahl der Einzelwerte gross ist. Diese altbekannte Tatsache wird vielfach übersehen, so unter anderem auch bei dem in Stohlers Leitfaden der Algebra III durchgerechneten Zahlenbeispiel. Wie der Vortragende zeigt, besteht aber ein von W. S. Gosset („Student“) stammendes Prüfverfahren, das auch im Falle von kleinen Stichproben angewandt werden kann. Nach der Ansicht des Referenten sollte man davon absehen, die Fehlertheorie im Gymnasium zu behandeln.

132. Sitzung, Freitag, den 19. Mai 1944

Zur Erinnerung an **Dr. Hans Flückiger** spricht Herr **Dr. S. Joss** über dessen Leitfaden der Darstellenden Geometrie.

Der Vortrag wird voraussichtlich demnächst wörtlich in den Mitteilungen erscheinen.

133. Sitzung, Freitag, den 24. November 1944

Mitteilungsabend. Es finden vier Kurzreferate statt:

1. Herr **Dr. A. Streit** spricht über die Gleichung 5. Grades. Der Referent leitet zunächst eine Auflösungsformel für die Gleichung

$$(I) \quad x^5 + ax^3 + bx + c = 0$$

unter der Bedingung  $a^2 = 5b$  ab.

Wählt man als Ausgangspunkt der Substitution

$$x = y + z,$$

so erreicht man vorerst

$$x^5 = y^5 + z^5 + 5yzx^3 - 5y^2z^2x$$

oder

$$(I^*) \quad x^5 - 5yzx^3 + 5y^2z^2x - (y^5 + z^5) = 0.$$

Die Gleichung (I\*) hat die Gestalt (I), wenn man

$$1) \quad 5yz = -a \quad 2) \quad 5y^2z^2x = b \quad 3) \quad y^5 + z^5 = -c$$

setzt; hierbei realisieren 1) und 2) die Bedingung bei (I).

Die beiden Potenzen  $y^5$  und  $z^5$  lassen sich nach 1) und 3) als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$t^2 + ct - \left(\frac{a}{5}\right)^5 = 0$$

auffassen. So erhält man schliesslich für  $x = y + z$  die Auflösungsformel

$$x = \sqrt[5]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5}}.$$

Der Referent leitet die gleiche Formel auf eine zweite Art ab. Weiter behandelt er besondere Faktorzerlegungen; z. B. erwähnen wir

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + (a - 1)x + b = (x^3 + [a - 1]x + b)(x^2 + 1)$$

$$x^5 + ax^3 + (a + 1)x + a + 1 = (x^3 - x^2 + a + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + bx + b - a + 1 = (x^3 + [a - 1]x + b - a + 1)(x^2 + x + 1)$$

Geht man von der Gleichung

$$(II) \quad y^5 + cy + d = 0$$

aus, und setzt hier  $y = \sqrt{x}$ , so ergibt sich die Gleichung

$$(III) \quad x^5 + 2cx^3 + c^2x - d^2 = 0.$$

Wir stellen dieser Gleichung die nachfolgende gegenüber

$$(III^*) \quad x^5 + \sqrt{5}cx^3 + c^2x - d^2 = 0.$$

So bemerken wir, dass (III\*) die Bedingung der Gleichung (I) erfüllt, und somit nach der oben entwickelten Formel gelöst werden kann. Der einzige Unterschied gegenüber (III) besteht darin, dass statt  $2c$  der Koeffizient  $\sqrt{5}c$  auftritt. (Die Gleichung (III) und damit auch (II) kann also auf diese Weise „fast“ gelöst werden!)

2. Herr **Dr. F. Steiger** macht eine kurze Mitteilung über eine Ermittlungsmöglichkeit für den Krümmungskreismittelpunkt bei der Parabel.

Berechnet man den Schnittpunkt der Parabel  $y^2 = 2px$  mit einem beliebigen Kreis, so fehlt in der Gleichung 4. Grades für  $y$  das kubische Glied. Daraus gewinnt man den Satz: Der Krümmungskreis im Punkte  $P(x_1, y_1)$  der Parabel  $y^2 = 2px$  schneidet sie noch im Punkte  $Q(9x_1, -3y_1)$ . Rein planimetrisch erhält man dann die Abszisse des Krümmungsmittelpunktes  $x_k = 3x_1 + p$ .

3. Herr **Prof. Dr. W. Scherrer** spricht über die bekannte Darstellungsformel für pythagoräische Zahlentripel. — Aus den Formeln

$$x = (a^2 - b^2) c$$

$$y = 2abc$$

$$z = (a^2 + b^2) c$$

erhält man bekanntlich unendlich viele ganzzahlige Lösungen der Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Der Referent bringt einen Beweis für die zu wenig bekannte Tatsache, dass die genannten Formeln alle Lösungen liefern.

Das wesentliche Hilfsmittel ist dabei die Primzahlzerlegung im Bereiche der ganzen komplexen Zahlen. Die Theorie der pythagoräischen Zahlen wird dadurch in einen allgemeinen Zusammenhang gestellt, und lässt sich so auch auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^n$$

übertragen.

4. Herr **Prof. Dr. H. Hadwiger** referiert über ein von Herrn **R. Löwe** (Wabern bei Bern) eingehend untersuchtes spezielles rechtwinkliges Dreieck. Bei seinen Studien über den Basiswinkel der Cheopspyramide hat **R. Löwe** eine Interpretationsmöglichkeit entdeckt, die auf das Prinzip des goldenen Schnittes aufgebaut ist. Wie sich später herausstellte, handelt es sich um eine längst bekannte Theorie. (Vgl. **H. Neikes**, Der goldene Schnitt und die Geheimnisse der Cheopspyramide.) Das oben erwähnte rechtwinklige Dreieck, das in mannigfacher Art den goldenen Schnitt realisiert, wurde seiner Eigenschaften wegen nach den Entwürfen von **R. Löwe** für die Anwendung in Schule und Handwerk hergestellt.

Bezeichnen  $x$  und  $y$  die beiden Katheten  $x < y$  und  $z$  die Hypotenuse des fraglichen Dreiecks, so gelten u. a. die nachfolgenden Beziehungen:

1.  $x : y = y : z$ , d. h. die Seiten bilden eine geometrische Reihe.

2.  $z - x : x = x : z$ , d. h. die kleinere Kathete ist der grössere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Hypotenuse.

3. Die Höhe teilt die Dreiecksfläche nach dem goldenen Schnitt.

4.  $x^2 : y^2 = y^2 : x^2 + y^2$ , d. h. die beiden Kathetenquadrate teilen das Hypotenusenquadrat nach dem goldenen Schnitt.

5.  $\sin w = \cotg. w$ ,  $w$  ist der von  $x$  und  $z$  eingeschlossene Winkel

Es ist  $w = 51^\circ 49' 39,3''$ . (Der nach der Pi-Theorie ermittelte Basiswinkel der Cheopspyramide beträgt  $w^* = 51^\circ 51' 14,3''$ .)

134. Sitzung, Freitag, den 8. Dezember 1944

Herr **Pd. Dr. M. Schürer** spricht über „**Mathematische Probleme des Astronomen**“.

Das Problem der räumlichen Verteilung der Sterne führt auf Integralgleichungen von der Form

$$b(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho) \varphi(\mu + \rho) d\rho \quad \text{und} \quad c(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{c\rho} f(\rho) \varphi(\mu + \rho) d\rho.$$

Die klassische Dynamik der Sternsysteme verlangt die simultane Lösung von

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial p_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} - \frac{\partial H}{\partial q_3} \frac{\partial f}{\partial p_3} = - \frac{\partial f}{\partial t}$$

und 
$$\Delta V = 4\pi \kappa \rho = 4\pi \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 dp_3,$$

wo  $H$  die Hamiltonsche Funktion,  $p$  und  $q$  die Impuls- und Lagekoordinaten und  $V$  das Potential darstellen.

Einige Ansätze zur Lösung dieser beiden fundamentalen Probleme werden besprochen.