Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1942)

Artikel: Die Axiomatik der Quantentheorie und die Begriffsgestaltung in der Physik des Mikrokosmos

Autor: Mercier, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319409

André Mercier

Die Axiomatik der Quantentheorie und die Begriffsgestaltung in der Physik des Mikrokosmos

(aus dem Seminar für theoretische Physik
der Universität Bern)

An anderer Stelle haben wir auseinandergesetzt, worin der Aufbau einer physikalischen Theorie besteht.[1] Dabei wurden die Gründe für die Notwendigkeit eines axiomatischen Aufbaus angegeben. Wir erkannten dort auch, dass die physikalisch-theoretische Methode zwei wesentliche Phasen in der Erkenntnis der Natur zeitigt: 1. Die Aufstellung eines „konstruktiven Schemas", welches sich mittels A-priori-Begriffen samt definierten Begriffen als ein System von Postulaten gestaltet; 2. die Erkenntnis von Naturgesetzen, die in bestimmter (mathematischer) Form in das Schema hineinpassen. Ferner haben wir in diesem Zusammenhang den Aufbau der Quantentheorie ziemlich ausführlich diskutiert.[2]

In den nachstehenden Betrachtungen schildern wir genauer die Begriffsgestaltung in der modernen Physik des Mikrokosmos (also in der Quantentheorie). Dabei werden wir nicht zögern, an mehreren Stellen eine technische Ausdrucksweise zu gebrauchen. Der Grund dafür ist in dem Bestreben zu finden, dass wir uns mit keiner vagen Behauptung begnügen, sondern genau — wenn auch in kürzester Weise — nachweisen wollen, dass jeder Schritt der Quantentheorie in dieser erkenntnistheoretischen Studie berücksichtigt worden ist.

In einer neuen Theorie wie der Quantentheorie wird von Begriffen gesprochen und mit Methoden und Rechnungsverfahren

[1]) A. MERCIER, Logik und Erfahrung in der exakten Naturwissenschaft, Bern, 1941.

[2]) A. MERCIER, Stabilité, Complémentarité et Déterminabilité, Lausanne, 1942.

gearbeitet, die mit den Begriffen, bzw. mit den Methoden der älteren (sog. klassischen) Physik eigentlich nicht viel Grundsätzliches gemein haben. Die neu verwendeten Begriffe sind entweder A-priori-Begriffe, oder sie werden definiert. In diesem Zusammenhang wollen wir einen Vergleich zwischen der klassischen Physik und der Quantenphysik anstellen. In der klassischen Physik herrscht die Tendenz, alle Zusammenhänge auf mechanische Beziehungen zurückzuführen. Dies ist insofern gelungen, als die meisten Erscheinungen in Kraftgesetzen, und zwar in geometrisch, d. h. räumlich abgebildeten Gesetzen ihre Darstellung gefunden haben.

Die Gleichung

$$\textit{Kraft} = \frac{d}{dt}\,(\textit{Bewegungsgrösse})$$

drückt kein Naturgesetz, sondern ein Postulat aus.[3]) Sie stellt kein Gesetz dar, einerseits weil sich die Begriffe Kraft, Masse, Geschwindigkeit, nicht definieren lassen, und anderseits weil sie nicht eine Beschaffenheit der Natur beschreibt, sondern ein Instrument der theoretischen Forschung ist. Hingegen ist die Gravitationsformel von NEWTON

$$\textit{Kraft zwischen den Punktmassen } m_1 \textit{ und } m_2 = G\,\frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

der Ausdruck eines Naturgesetzes.

Würde man nun die ganze Mechanik: Newtonsche Prinzipien, Lagrangesche Gleichungen, Hamiltonsches Prinzip, kanonische Gleichungen usw. entwickeln, ohne eine einzige Anwendung wie die Wurfbewegung, die Planetenbewegung usw. zu machen, so würde es schon einer gewaltigen Intelligenz bedürfen, um ihren Sinn zu verstehen. Wir glauben, dass dabei überhaupt die Mechanik nicht als physikalische Lehre begriffen werden könnte. Weil wir sie in praktischen, d. h. in experimentell möglichen Anordnungen oder Beispielen anwenden, verstehen wir die Bedeutung der A-priori-Begriffe wie Masse, Kraft u. a. m. nach und nach immer besser. Wir wissen erst, was eine Kraft ist, wenn wir diesen Begriff in zahlreichen Aufgaben kennen gelernt haben, in denen er die Bedeutung annimmt, die ihm infolge des konstruktiven theoretischen Schemas zukommt.

---

[3]) Vergl. Unsere Schrift: Logik und Erfahrung usw. loc. cit.

Wenden wir uns nun zur Quantentheorie, so erfahren wir, dass dort ganz andere Begriffe auftreten. In der Quantentheorie ist zunächst der Begriff Kraft nicht vorhanden. Es ist unglücklich und inkonsequent, wenn man z. B. von Austauschkräften spricht. Ueberhaupt: Die A-priori-Begriffe der Quantentheorie sind sehr verschieden von denjenigen der klassischen Physik.

Wirklich primitiv sind in der Quantenphysik Begriffe wie die folgenden: Der *Zustand* eines physikalischen Systems; die einem physikalischen System angehörenden beobachtbaren Grössen, auch *Observablen* genannt; ferner die *zeitliche Entwicklung* eines physikalischen Systems und deren *vorauszusehende Wahrscheinlichkeit*. Es kann nicht präzisiert werden, was ein physikalisches System ist, und auch nicht, wie man die verschiedenen Systeme voneinander trennen kann. Man pflegt alle möglichen Systeme auf sog. elementare Systeme zu reduzieren. Dies sind hauptsächlich sog. Elementarteilchen und Lichtquanten.

Was uns gestattet, diese Elementarteilchen und diese Systeme voneinander zu unterscheiden, ist ihre *gegenseitige Wechselwirkung*. Allein können sie nicht erfasst werden. Ein einziges Elektron z. B. kann nicht erklären: „Ich besitze diese und jene Eigenschaften.“ Zwei Elektronen dagegen stehen in Wechselwirkung miteinander; deshalb ist das System beobachtbar.

Unter Wechselwirkung wollen wir die Ursache der möglichen Zustände und der zeitlichen Entwicklung eines zusammengesetzten Systems verstehen.

In der Newtonschen Form der klassischen Physik sind es Kraftgesetze, welche die Wechselwirkung beschreiben. In der Lagrangeschen Form der klassischen Mechanik drücken sich die Wechselwirkungen in den verschiedenen Lagrangeschen Funktionen aus. Es ist zu bemerken, dass die Newtonsche Mechanik nicht in allen Fällen eine Lagrangesche Funktion liefert. In der Hamiltonschen oder kanonischen Form der Mechanik drückt sich die Wechselwirkung in der Hamiltonschen Funktion aus.

Wichtig ist es, dass in der klassischen Mechanik die Angabe der räumlichen Anordnung samt derjenigen des Bewegungszustandes zu einer Anfangszeit notwendig sind, um die nachfolgende zeitliche Entwicklung des Systems abzuleiten. Dies zieht nach sich, dass die Gleichungen der Mechanik Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit sind. Die Tatsache, dass man kanonische Gleichungen ableiten konnte, welche von erster Ordnung sind, bei denen aber die räumliche Anordnung und das Bewegungsverhältnis voneinander getrennt werden können, ist an sich äusserst interessant. Sie ist ferner von grösster Bedeutung für das Bohrsche Korrespondenzprinzip, indem sie den gangbarsten Weg zu dessen Begründung liefert: nämlich die Korrespondenz zwischen den mit Hilfe der Poissonschen Klammern ausgedrückten kanonischen Gleichungen und den Grundgleichungen der quantenmässigen Entwicklung, wie sie DIRAC geschrieben hat:

Klassische Form:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H]$$

wo H die Hamiltonsche Funktion und [,] die Poissonsche Klammer bezeichnen.

Quantentheoretische Form:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (\mathfrak{H} A - A \mathfrak{H})$$

wo $\mathfrak{H}$ den Hamiltonschen Operator der Quantentheorie und h die Plancksche Konstante bebezeichnen.

Es ist aber verfrüht, die Gleichungen der Quantentheorie schon hier anzugeben; und wir werden uns erst am Schluss eingehender mit diesen Gleichungen befassen. Wir wollen jetzt versuchen, eine mögliche Darstellung der Quantentheorie zu geben und ihren Wert für ein besseres Verständnis der grundsätzlichen Begriffe der mikrokosmischen Physik zur Diskussion stellen.

* * *

Die induktive Forschung der Quantenphysik hat Heisenberg zur Erkenntnis der berühmten Unbestimmtheitsrelationen geführt. Wir setzen diese Unbestimmtheitsrelationen als bekannt voraus. Sie besagen u. a., dass nicht zugleich die räumliche Anordnung und das Bewegungsverhältnis eines physikalischen Systems mit beliebiger Genauigkeit beobachtet werden können. Dies zerstört die Laplacesche Hoffnung des allwissenden Geistes. Die Gleichungen der klassischen Mechanik können infolge dessen nicht beibehalten werden, und zwar, — und das ist sehr wichtig, — können nicht zur selben Anfangszeit sowohl die räumliche Anordnung als auch der Bewegungszustand eines Systems für die Bestimmung seiner Entwicklung angegeben werden. Infolge dessen dürfen die neu aufzustellenden Gleichungen nicht zweiter

Ordnung, sondern sie müssen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit sein.

Wir sagten früher, dass die A-priori-Begriffe der Quantenphysik zunächst aus den Zuständen von physikalischen Systemen und aus den ihnen angehörenden Observablen bestehen. Der Zweck der theoretischen Physik ist es nun, durch Auflösung von Gleichungen Voraussagen zu machen. Den physikalischen Begriffen werden deshalb systematisch Symbole zugeordnet, mit denen gerechnet wird. Rechnen kann man nur, wenn Rechnungsregeln erklärt werden; es muss also eine Algebra für diese Symbole gewählt werden. DIRAC [4]) hat wohl am klarsten auseinandergesetzt, wie man mit den Zustandssymbolen und mit den Symbolen der Observablen zu rechnen hat. Hier ist nicht der Platz für die Besprechung der Axiomatik dieser Algebra. Sie ist natürlich sehr interessant, insbesondere aus dem Grunde, weil es sich um eine nicht kommutative Algebra handelt. Was uns hier speziell interessiert, ist die physikalische Deutung, und diese wollen wir kurz schildern.

Der Zustand eines Systems wird durch ein Symbol bezeichnet. Wir nennen ihn ψ. Wir suchen nun die zeitliche Entwicklung dieses Zustandes. Wir müssen deshalb eine Grundgleichung postulieren. Damit diese Grundgleichung die Gesetzmässigkeit der Natur auszudrücken vermag, muss sie das Symbol eines A-priori-Begriffes enthalten; dieser A-priori-Begriff dient als Ausdruck einer Wechselwirkung, welche die Entwicklung des Zustandes des betrachteten Systems bestimmt. Wir müssen nun diesen A-priori-Begriff mit den gewählten Parametern darstellen, genau wie man in der postulierten Newtonschen Grundgleichung das Symbol einer Kraft hat, für welche Kraftgesetze entdeckt werden müssen.

Weiter darf man sich den Zustand zu einer Anfangszeit t_0 geben:

$$\psi = \psi^0 \quad \text{für} \quad t = t_0.$$

Die postulierte Gleichung muss also eine Differentialgleichung für ψ sein, welche die erste und keine höhere zeitliche Ableitung von ψ enthält. Die Gleichung, die aufgestellt wird, nimmt eine äusserst elegante Form an: Aus jedem Momentanwert ψ des

[4]) P. A. M. DIRAC, The Principles of Quantum Mechanics (2nd ed. Oxford, 1935).

Zustandes wird durch eine geeignete und einfachste Operation die partielle Ableitung von ψ nach der Zeit gewonnen. Man nennt den Operator, der diese Operation ermöglicht, den Hamiltonschen Operator $\mathfrak{H}$. Er ist das Symbol für den A-priori-Begriff, der die Wechselwirkung kennzeichnet. Die Entwicklung des physikalischen Zustandes wird jetzt durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{2\pi i}{h} \mathfrak{H} \psi$$

wobei die Form von $\mathfrak{H}$ durch Naturgesetze festgelegt wird. In dieser Gleichung ist die Plancksche universelle Konstante h ausdrücklich geschrieben. Dies hat nicht nur seine Vorteile, wie der Aufbau der ganzen Theorie gezeigt hat, sondern haftet an der induktiven Erkenntnis des konstruktiven Schemas der Quantentheorie.

Diese Gleichung ist die allgemeinste Form der Schrödingerschen Gleichung.

Man sieht, dass die *Zeit* die Rolle eines A-priori-Begriffes spielt, und zwar ist die Zeit als ein Begriff zu betrachten, welcher primitiver ist als derjenige des Raumes. Vom Raume haben wir nämlich nur beim induktiven Aufbau der Quantentheorie gesprochen und ihn seitdem von den grundsätzlichen Begriffen ferngehalten. Die ausserordentliche Bedeutung, die dem Raum in der klassischen Physik auf Grund des Gebrauches von Koordinaten zukommt, ist in der Quantentheorie stark vermindert. In dieser Theorie ist übrigens der Raum nicht mehr der Begriff, auf welchem jede physikalische Erkenntnis beruht, sondern die Naturgesetze gestalten sich in der Quantentheorie derart, dass z. B. Raumkoordinaten zu ihrem Ausdruck gebraucht werden, aber auch andere Parameter von ganz anderer Natur, wie z. B. der Spin bei der Austauschwechselwirkung der sog. schweren Teilchen.

Dies hat zur Folge, dass physikalische Grössen, wie das Moment der Bewegungsgrösse oder Drall, welche in der klassischen Physik notwendigerweise mit Hilfe des Raumes definiert werden, in der Quantenphysik eine erweiterte Bedeutung erhalten: So kann z. B. der Drall, der vom Spin herrührt, sehr schlecht räumlich gedeutet werden.

Raumkoordinaten und andere Parameter werden wohl als A-priori-Begriffe eingeführt, aber sie dienen hauptsächlich zur Ausdrucksweise der verschiedenen Hamiltonschen Operatoren.

Von diesen Praemissen ausgehend wollen wir jetzt den axiomatischen Aufbau der Quantentheorie in aller Kürze wie folgt skizzen:

Als *A-priori-Begriffe* werden die Zeit t, der Zustand ψ eines Systems, die Observablen A, B, ... eines Systems und beliebige Parameter (Raumkoordinaten usw.) angenommen.

Als *induktive Erkenntnis* soll etwa die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation dienen, insbesondere zwischen räumlicher Anordnung und Bewegungsverhältnis.

Eine Folge dieser Erkenntnis ist, dass die fundamentalen Differentialgleichungen von erster Ordnung in der Zeit sein müssen; man kann nicht zu einer Anfangszeit die räumliche Anordnung samt dem Bewegungszustand angeben.

Der Weg zur Aufstellung eines ersten Postulates ist der folgende: Zur Anfangszeit wird der Zustand ψ^0 gegeben. Aus den momentanen Werten von ψ müssen sich die Werte der zeitlichen Ableitung von ψ ausdrücken lassen.

Postulat: Es gibt einen Operator (= eine Observable) $\mathfrak{H}$, welcher aus den momentanen Werten von ψ die Werte von $\partial\psi/\partial t$ laut folgender Grund- oder Entwicklungsgleichung liefert:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h}\,\mathfrak{H}\,\psi, \quad \text{wo } i = \sqrt{-1},\ h = \text{Plancksche Konstante.}$$

Man führt die Auflösung auf ein Eigenwertproblem zurück: Man setzt als spezielle Lösung $\psi = \varphi \exp(-2\pi \overline{iEt/h})$ ein und verlangt, dass E der numerische Wert einer physikalischen Oberservablen, genannt Energie, ist. Dann gilt

$$\mathfrak{H}\varphi = E\varphi.$$

Postulat: φ ist beschränkt, stetig, eindeutig und wird auf 1 normiert.

Eine Folge davon ist die Existenz eines Spektrums von Eigenwerten E_n mit zugehörigen Eigenzuständen φ_n.

Erklärung: $\mathfrak{H}$ soll die Wechselwirkung beschreiben. Man muss Formen von $\mathfrak{H}$-Operatoren entdecken, die den natürlichen Erscheinungen entsprechen. Dies liefert sog. Naturgesetze. Die Angabe eines $\mathfrak{H}$-Operators definiert ein System.

Postulat: Für alle Obeservablen A gilt eine Eigenwertgleichung

$$A\chi = a\chi$$

wo χ beschränkt, stetig, eindeutig ist. Die möglichen χ heissen Eigenzustände. Ein System befindet sich immer in einem Eigenzustand. Messungen der Observablen A können nur Eigenwerte a von A liefern. (Dies ist der Ausdruck der *Quantelung).*

Postulat: Alle Oberservablen sind hermitesche Operatoren.

Folge: die Eigenzustände χ einer beliebigen Observablen sind zueinander orthogonal. Man normiert sie ferner auf 1.
Postulat: Jeder Zustand ξ, ob ein χ oder ein ψ, kann mit Hilfe der Eigenzustände χ_k einer bestimmten, sonst beliebigen Observablen zerlegt werden:

$$\xi = \sum c_k \chi_k.$$

Insbesondere gilt

$$\psi = \sum d_k \chi_k.$$

Postulat: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Zeit t eine Beobachtung der Observablen A den Eigenwert a_k liefere, ist gleich $|d_k|^2$.
Auswahlregeln werden durch Berechnung von Heisenbergschen Matrizen festgesetzt.

Mit den bisher erklärten Postulaten und Definitionen ist die Quantentheorie in aller Kürze, aber vollständig aufgestellt. Von den Postulaten sind folgende zwei Prinzipien, welche wir noch einmal wiederholen, für die Methode und die Bedeutung der Quantentheorie besonders wichtig:

1. Die einzigen Werte, welche die Beobachtung einer Observablen liefern kann, sind die Eigenwerte dieser Observablen;

2. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Beobachtung den Eigenwert a einer Observablen A (mit $A\chi_k = a_k \chi_k$) zur Zeit t liefert, ist gleich $|d_k|^2$, wobei d_k aus der Entwicklung $\varphi = \sum d_k \chi_k$ der Zustandsfunktion ψ zu entnehmen ist, und ferner ψ die allgemeine Lösung der Schrödingerschen Gleichung $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathfrak{H}\psi = 0$ ist.

Man sieht, dass der Hamiltonsche Energie-Operator $\mathfrak{H}$ überhaupt die wichtigste aller Observablen ist. Diese Bemerkung wird noch verstärkt durch die Betrachtung der kanonischen Form der quanten-mechanischen Gleichungen, welche korrespondenzmässig aus den kanonischen Gleichungen der analytischen Mechanik gewonnen, aber auch aus den bisherigen Prinzipien abgeleitet werden können. Wir wollen jetzt diese Frage behandeln.

Die Beobachtung von Observablen kann, gemäss der postulierten Gleichung, nur Eigenwerte von diesen liefern. Dabei können Observable nur einen Sinn haben, wenn sie auf Zustandsfunktionen χ_k oder ψ angewendet werden. Jedoch kann man sie als Operatoren für sich betrachten, und für sie eine Entwicklungsgleichung suchen. Dies lässt sich mit Hilfe der Eigenwertgleichung und der

Schrödingerschen Gleichung tun. Wir werden dies hier nicht durchführen, sondern geben einfach das Resultat an. Da jede Observable A von der Zeit abhängig ist, können wir den totalen und partiellen Differentialquotienten $\dot{A} = dA/dt$ und $\partial A/\partial t$ bilden, und es gilt:

$$\frac{h}{2\pi i}\dot{A} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial A}{\partial t} + \mathfrak{H}A - A\mathfrak{H}.$$

Dies kann sehr gut als kanonische Form der Entwicklungsgleichung bezeichnet werden, besonders da es durch geeignete Korrespondenzbetrachtung aus den klassischen kanonischen Gleichungen gewonnen werden kann. Zu diesem Zweck muss man zuerst die klassischen kanonischen Gleichungen mit den Poissonschen Klammern ausdrücken.

Was uns hier aber interessiert, ist nicht die Korrespondenz, sondern die Art und Weise, wie die Quantentheorie die Wechselwirkung zwischen physikalischen Systemen in die mathematische Sprache übersetzt. Dies erkennen wir in der kanonischen Form der quantentheoretischen Gleichung: Eine Observable A ändert sich mit der Zeit; kennt man A zu einer Anfangszeit, so sollten sich die späteren Werte durch eine Differentialgleichung bestimmen lassen. Diese muss gemäss den Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelationen von erster Ordnung sein. Durch diese Gleichung wird also $\dot{A}$ durch die momentanen Werte von A bestimmt. Dies ist der Ausdruck der Wechselwirkung, die ja für die zeitliche Entwicklung des Systems verantwortlich ist. Aus der erwähnten kanonischen Form geht hervor, dass der Hamiltonsche Operator $\mathfrak{H}$ allein die Wechselwirkung bestimmt. Dies beleuchtet wieder die Wichtigkeit der Observalen $\mathfrak{H}$, denn sie bestimmt zu jeder zeit sowohl den weiteren Verlauf aller anderen Observablen als auch die Entwicklung des Zustandes des beobachteten Systems.

* * *

Damit hätten wir die Methodik der Quantenphysik in aller Kürze dargelegt. Wir müssen betonen, wie verschieden sie ist von derjenigen der klassischen Physik, inklusive Relativitätslehre. In der Tat verwendet die klassische Physik zur Behandlung ihrer Probleme lauter Observable. Ihr fehlt der Begriff des Zustandes, wie er in der Quantentheorie durch die ψ-Funktion ausgedrückt wird.

Diese Funktion erweist sich einerseits als notwendig, um überhaupt eine naturgemässe Quantelung durchführen zu können, andererseits braucht man sie zur Definition der Wahrscheinlichkeit der Erscheinungen. Der eigentliche Sinn der Quantelung ist somit gar nicht in der Quantelung der Observablen zu finden. Dies könnten wir uns ja überhaupt nicht vorstellen, denn nicht die zufällig messbaren Grössen, sondern die Zustände sollen gequantelt werden. Darum möchten wir betonen, wie scharfsinnig und treffend sich damals schon NIELS BOHR ausgegdrückt hat, als er die Quantelung auf die Festsetzung stabiler Zustände zurückführte. Es fehlte eigentlich nur der Gedanke, diesen Zuständen Symbole zuzuschreiben, welche in mathematischen Gleichungen ihre eigene neuartige Rolle spielen. Den physikalisch beobachtbaren Grössen aber ordnet die Quantentheorie, wieder im Gegensatz zur klassischen Theorie, Hermitesche Operatoren zu.

Die Quantentheorie kann mit Erfolg als eine Theorie des Zustandes physikalischer Systeme und dessen zeitlicher Entwicklung dargestellt werden. Der Zustand ist ein A-priori-Begriff, den man durch Anwendung der Theorie in zahlreichen Beispielen und Aufgaben immer besser versteht. Von grösster Bedeutung ist insbesondere die Art der Voraussage der möglichen Werte von Observablen durch eine Wahrscheinlichkeit.

Man wird bemerken, dass wir für ψ den Ausdruck „Wellenfunktion" vermieden haben. Dies ist absichtlich geschehen; denn die Erklärung, dass alles Korpuskulare wellenartig und alles Wellenartige korpuskular sei, ist irreführend.

Zum Abschluss dieser Ausführungen sei noch daran erinnert, dass wir die Theorie auf die Unbestimmtheitsrelationen als induktive Erkenntnis stützen. Es müsste vielleicht noch erwiesen werden, dass diese Relationen aus der axiomatisch aufgestellten Theorie gefolgert werden können. Man gewinnt sie, indem man zeigt, dass gewisse Observablen sog. simultanen Eigenzuständen angehören. Dagegen existieren für jedes System Observable, etwa A und M, für welche keine Zustände gefunden werden können, die zugleich Eigenzustände von A und M sind. Solche Observable A und M haben also keine simultane Zustände gemeinsam. Dies hat zur Folge, dass A und M nicht mit beliebiger Genauigkeit zugleich gemessen werden können. Man bemerke, welche Bedeutung dabei dem Begriff der *Simultaneität* zukommt. Da nun Zeit und Energie ein Paar von Observablen bilden, die gerade nicht simultane Eigenzustände besitzen, also *komplementär* sind, kommt der Energie sicher auch eine bemerkenswerte Bedeutung zu. In der Tat: Wir haben betont, dass gerade der Operator der Energie, d. h. der Hamiltonsche Operator die zeitliche Entwicklung der Systeme bestimmt. Es ist daher sehr verständlich, dass gerade der Energie-Operator und die Zeit komplementär sind.

Für den Quantentheoretiker besteht die Erkenntnis der einzelnen Naturgesetze in der Entdeckung der Form von Hamiltonschen Operatoren. Wenn einmal alle diese Prinzipien erklärt sind, so besteht die folgende Aufgabe darin, die Nützlichkeit derselben anhand schon entdeckter Operatoren $\mathfrak{H}$ zu zeigen. Man wird damit einen richtigen Einblick in die Quantenphysik erhalten, nämlich einen Begriff der Wechselwirkung zwischen den Bestandteilen des Mikrokosmos. Und dies ist schliesslich dasjenige, worauf die Forschung der ganzen modernen Physik abzielt.