

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1940)

**Vereinsnachrichten:** Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

---

*109. Sitzung, Freitag, den 19. Januar 1940.*

Herr Dr. W. Gruner spricht über das Thema: „**Einlagerung des regulären Simplex in den Hyperwürfel und Determinantenabschätzung von Hadamard**“.

An den Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  wird das Problem, das  $n$ -dimensionale reguläre Simplex in den  $n$ -dimensionalen Hyperwürfel einzulagern, erläutert. Als notwendige Bedingung für die Einlagerungsmöglichkeit im  $R_n$  gilt für die Zahl  $n : n = 1$  oder  $n = 3 \pmod{4}$ . Man vermutet, dass diese Bedingungen hinreichend sind. Die bisherigen Ergebnisse werden kurz dargestellt und in einem Fall eingehender behandelt, da sich hier auch gewisse Beziehungen zwischen den Gruppen der beiden Polytope ergeben. Schliesslich wird auf den Zusammenhang dieses Problems mit der bekannten Determinantenabschätzung von Hadamard hingewiesen.

Bezüglich Literaturangaben und nähere Einzelheiten sei auf die Arbeit des Referenten in den Comm. Math. Helv. Bd. 12, p. 149 verwiesen.

---

*110. Sitzung, Freitag, den 23. Februar 1940.*

Herr Prof. Dr. W. Scherrer spricht über das Thema: „**Der Begriff der Abbildung und seine Rolle in der Geometrie**“.

(Das Referat über diesen Vortrag erscheint in den Sitzungsberichten des nächsten Jahres.)

---

*111. Sitzung, Freitag, den 20. September 1940.*

Herr Prof. Dr. H. Hadwiger spricht über das Thema: „**Kurvenlängen und Flächeninhalte als geometrische Mittelwerte**“.

Der Referent befasst sich mit Mittelwerten von Grössen, die von der Lage einer ebenen in der Ebene beweglichen Figur abhängig sind. Ein Mittelwert wird als Resultat einer auf eine über den Elementen einer ebenen Bewegungsgruppe definierten Funktion ausgeübte Mittelwertsoperation, welche bewegungsinvariant, additiv, monoton und normiert vorausgesetzt wird, aufgefasst. Durch die postulierten Eigenschaften ist die Mittelwertsoperation eindeutig bestimmt. Die Existenz wird auf einen von J. v. Neumann in der Theorie der fastperiodischen Funktionen eingeführten Begriff der Mittelbarkeit zurückgeführt. Wie Referent direkt aus den Eigenschaften der

— L —

Mittelwertsoperation folgert, können Flächeninhalt eines ebenen Bereiches, bzw. Länge einer streckbaren Kurve, als Mittelwert bei Bewegung in Punktgitter bzw. Geradengitter dargestellt werden.

112. Sitzung, Freitag, den 13. Dezember 1940.

Herr Prof. Dr. M. Plancherell (Zürich) spricht über das Thema: „Méthodes d'obtention de formules asymptotiques“.

Die wichtigsten Methoden zur Gewinnung asymptotischer Formeln sind: die Pass- oder Sattelpunktmethode, die Methode der erzeugenden Funktionen und die Methode der Differentialgleichungen.

1. Die Passmethode findet Anwendung auf Funktionen, welche durch bestimmte Integrale dargestellt sind. Um den einfachsten Fall zu erläutern, nehmen wir an, dass die Funktion durch  $F(n) = \int_a^b f(z) \varPhi(z)^n dz$  definiert ( $f, \varPhi$  analytisch) und für grosse Werte von  $n$  anzunähern ist. Setzt man  $w = u + iv = \log \varPhi(z)$ , also  $u = \ln |\varPhi(z)|$ ,  $v = \arg \varPhi(z)$ , so ist  $F(n) = \int_a^b fe^{nu} \cdot e^{inv} dz$ . Trägt man dann den Wert der harmonischen Funktion  $u$  senkrecht auf der komplexen  $z$ -Ebene im Punkte  $z$  auf, so hat die Fläche  $u = u(z)$  weder (endliche) Maxima noch Minima. Die Punkte wo  $\varPhi'(z) = 0$ , bestimmen die Lage ihrer Sattelpunkte. In den Punkten der  $z$ -Ebene wo  $\varPhi'(z) \neq 0$ , sind die Kurven  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  zu einander orthogonal.

Es ist natürlich, den nach Cauchy deformierbaren Integrationsweg so zu wählen, dass auf ihm der absolute Betrag  $|f| e^{nu}$  des Integranden — also auch  $u$  — möglichst klein bleibe und dass der oszillierende Faktor  $e^{inv}$  möglichst konstant bleibe in der Nähe der Punkte des Weges, wo  $u$  Maximum wird. Nehmen wir an, der Einfachheit wegen, dass für  $z = 0$ , die Fläche  $u$  einen Pass hat, dass die  $z = a$  und  $z = b$  entsprechenden Punkte der Fläche in verschiedenen Tälern liegen, die von diesem Pass ausgehen und dass  $u(a) < u(0)$ ,  $v(a) < v(0)$ . Wir legen dann den Integrationsweg durch den Passpunkt  $z = 0$  so, dass er in seiner Umgebung mit den Projektionen der Talwege zusammenfällt, d. h. längs der Kurven  $v = v(0)$ . Es lässt sich zeigen, dass der relative Fehler, den man macht, wenn man vom Integrationsweg nur den Teil berücksichtigt, der in der Umgebung des Passes liegt, von der Ordnung  $O(e^{-n\alpha})$ ,  $\alpha > 0$ , ist. In der Umgebung des Passes gilt eine Entwicklung

$$w - w(0) = z^h (c_0 + c_1 z + \dots), h > 1, c_0 \neq 0.$$

Führt man  $t = T^h = w(z) - w(0)$  als neue Variable ein, woraus sich  $z$  in der Form  $z = \sum_1^\infty \gamma_p T^p = \sum_1^\infty \gamma_p t^{p/h}$  darstellt, so lässt sich der Betrag eines der Talwege

$$e^{nw(0)} \int_0^c f(z) e^{n(w-w(0))} dz = \varphi(0)^n \int_0^\gamma g(t) e^{-nt} \frac{dz}{dt} dt$$

durch Potenzreihenentwicklung nach den Potenzen von  $t^{1/h}$  als konvergente Reihe

$$\varphi(0)^n \sum_1^\infty \delta_p \int_0^\gamma e^{-nt} t^{p/h-1} dt$$
 ausdrücken. Ersetzt man in dieser Reihe das

— LI —

Integrationsintervall  $(0, \gamma)$  durch  $(0, \infty)$ , so entsteht die, im allgemeinen divergente Reihe  $\varphi(0)^n \sum_1^{\infty} \frac{\delta p}{n^{p/h}} \Gamma(p/h)$ . Bei Berücksichtigung beider Talwege erhält

man schliesslich eine Reihe der Form  $\varphi(0)^n \sum_1^{\infty} \frac{C_p}{n^{p/h}} \Gamma(p/h)$ , die  $F(n)$  in dem Sinne asymptotisch darstellt, dass

$$F(n) = \varphi(0)^n \left[ \sum_{p=1}^q C_p \frac{\Gamma(p/h)}{n^{p/h}} + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \right], \text{ für } q = 1, 2, 3, \dots$$

2. Die Methode der erzeugenden Funktionen (Darboux) bringt die für grosse Werte von  $n$  zu untersuchende Funktion  $F(n)$  in Zusammenhang mit den Singularitäten der „erzeugenden Funktion“  $f(z) = \sum_0^{\infty} F(n) z^n$  auf dem Konvergenz-

kreis  $|z| = R$  dieser Reihe. Wenn z. B. auf diesem Kreis  $f(z)$  nur eine Singularität hat, und zwar von der Form  $f(z) = (z - a)^k \varPhi(z) + \psi(z)$  ( $k \leq 0, |a| = R; \varPhi, \psi$  analytisch in  $|z| \leq R + \rho, \rho > 0$ ) so lässt sich  $f(z)$  in der Form darstellen  $f(z) = U_p(z) + (z - a)^{p+k} \omega(z) + \psi(z)$  mit  $U_p = \varphi(a) (z - a)^k + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} (z - a)^{p+k-1}$  in  $|z| \leq R + \rho$ . Die Potenzreihenentwick-

lung von  $U_p(z)$  in der Umgebung von  $z = 0$ ,  $U_p = \sum_0^{\infty} a_n z^n$  ist leicht zu be-

rechnen. Man zeigt dann, durch Heranziehung bekannter Sätze über die Größenordnung der Koeffizienten Fourierscher Reihen, dass  $|F(n) - a_n| R^n < \frac{M_n}{n^{p+k+1}}$  wenn  $p + k > 0$ . Der Fall mehrerer Singularitäten des betrachteten Typus oder anderer einfachen Typen lässt sich in ähnlicher Weise behandeln.

3. Die Methode der Differentialgleichungen gestattet das asymptotische Verhalten der Funktionen, welche als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen definiert sind, für grosse Werte der unabhängigen Variable und eventueller Parameter, zu bestimmen. Diese Methode, die in neuerer Zeit besonders durch G. D. BIRKHOFF, J. TAMARKIN und B. E. LANGER weiterentwickelt wurde, zeigt z. B. im Falle der Differentialgleichung

$$u'' + [\lambda^2 \varPhi^2(x) - \chi(x)] u = 0, \text{ wo } \varPhi(x) \neq 0,$$

dass Lösungen existieren, welche für grosse Werte von  $\lambda$  die Form

$$\frac{1}{|\varPhi|^{1/2}} e^{\pm \lambda \int_{x_0}^x \varPhi dx} \left[ 1 + \frac{\beta_1(x)}{\lambda} + \frac{\beta_2(x)}{\lambda^2} + \dots + \frac{\beta_n(x) + \varepsilon(\lambda, n, x)}{\lambda^n} \right]$$

mit  $\varepsilon = 0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  haben.

Literatur: ad 1: L. BRILLOUIN, Ann. Ecole norm. sup. Paris, (3) 33 (1916); O. PERRON, Sitz. Ber. Akad. München, Math.-phys. Kl. (1917);

WATSON, Bessel functions, Cambridge. ad 2: G. DARBOUX, Journal de math. pures et appl. (3) 4 (1878). ad 3: G. D. BIRKHOFF, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908); J. TAMARKIN, Math. Zeitschr. 27 (1927); R. E. LANGER, Bull. Americ. Math. Soc. 36.