Sitzungsberichte
der Mathematischen Vereinigung in Bern

109. Sitzung, Freitag, den 19. Januar 1940.

Herr **Dr. W. Gruner** spricht über das Thema: **„Einlagerung des regulären Simplex in den Hyperwürfel und Determinantenabschätzung von Hadamard".**

An den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ wird das Problem, das n-dimensionale reguläre Simplex in den n-dimensionalen Hyperwürfel einzulagern, erläutert. Als notwendige Bedingung für die Einlagerungsmöglichkeit im R_n gilt für die Zahl $n : n = 1$ oder $n = 3$ (mod. 4). Man vermutet, dass diese Bedingungen hinreichend sind. Die bisherigen Ergebnisse werden kurz dargestellt und in e i n e m Fall eingehender behandelt, da sich hier auch gewisse Beziehungen zwischen den Gruppen der beiden Polytope ergeben. Schliesslich wird auf den Zusammenhang dieses Problems mit der bekannten Determinatenabschätzung von Hadamard hingewiesen.

Bezüglich Literaturangaben und nähere Einzelheiten sei auf die Arbeit des Referenten in den Comm. Math. Helv. Bd. 12, p. 149 verwiesen.

---

110. Sitzung, Freitag, den 23. Februar 1940.

Herr **Prof. Dr. W. Scherrer** spricht über das Thema: **„Der Begriff der Abbildung und seine Rolle in der Geometrie".**

(Das Referat über diesen Vortrag erscheint in den Sitzungsberichten des nächsten Jahres.)

---

111. Sitzung, Freitag, den 20. September 1940.

Herr **Prof. Dr. H. Hadwiger** spricht über das Thema: **„Kurvenlängen und Flächeninhalte als geometrische Mittelwerte".**

Der Referent befasst sich mit Mittelwerten von Grössen, die von der Lage einer ebenen in der Ebene beweglichen Figur abhängig sind. Ein Mittelwert wird als Resultat einer auf eine über den Elementen einer ebenen Bewegungsgruppe definierten Funktion ausgeübte Mittelwertsoperation, welche bewegungsinvariant, additiv, monoton und normiert vorausgesetzt wird, aufgefasst. Durch die postulierten Eigenschaften ist die Mittelwertsoperation eindeutig bestimmt. Die Existenz wird auf einen von J. v. N e u m a n n in der Theorie der fastperiodischen Funktionen eingeführten Begriff der Mittelbarkeit zurückgeführt. Wie Referent direkt aus den Eigenschaften der

Mittelwertsoperation folgert, können Flächeninhalt eines ebenen Bereiches, bzw. Länge einer streckbaren Kurve, als Mittelwert bei Bewegung in Punktgitter bzw. Geradengitter dargestellt werden.

---

112. Sitzung, Freitag, den 13. Dezember 1940.

Herr **Prof. Dr. M. Plancherell** (Zürich) spricht über das Thema: **„Méthodes d'obtention de formules asymptotiques".**

Die wichtigsten Methoden zur Gewinnung asymptotischer Formeln sind: die Pass- oder Sattelpunktmethode, die Methode der erzeugenden Funktionen und die Methode der Differentialgleichungen.

1. Die Passmethode findet Anwendung auf Funktionen, welche durch bestimmte Integrale dargestellt sind. Um den einfachsten Fall zu erläutern, nehmen wir an, dass die Funktion durch $F(n) = \int_a^b f(z)\, \Phi(z)^n\, dz$ definiert (f, Φ analytisch) und für grosse Werte von n anzunähern ist. Setzt man $w = u + iv = \log \Phi(z)$, also $u = \ln |\Phi(z)|$, $v = \operatorname{arc} \Phi(z)$, so ist $F(n) = \int_a^b f e^{nu} \cdot e^{inv}\, dz$. Trägt man dann den Wert der harmonischen Funktion u senkrecht auf der komplexen z-Ebene im Punkte z auf, so hat die Fläche $u = u(z)$ weder (endliche) Maxima noch Minima. Die Punkte wo $\Phi'(z) = 0$, bestimmen die Lage ihrer Sattelpunkte. In den Punkten der z-Ebene wo $\Phi'(z) \neq 0$, sind die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ zu einander orthogonal.

Es ist natürlich, den nach Cauchy deformierbaren Integrationsweg so zu wählen, dass auf ihm der absolute Betrag $|f|\, e^{nu}$ des Integranden — also auch u — möglichst klein bleibe und dass der oszillierende Faktor e^{inv} möglichst konstant bleibe in der Nähe der Punkte des Weges, wo u Maximum wird. Nehmen wir an, der Einfachheit wegen, dass für $z = 0$, die Fläche u einen Pass hat, dass die $z = a$ und $z = b$ entsprechenden Punkte der Fläche in verschiedenen Tälern liegen, die von diesem Pass ausgehen und dass $u(a) < u(o)$, $v(a) < v(o)$. Wir legen dann den Integrationsweg durch den Passpunkt $z = o$ so, dass er in seiner Umgebung mit den Projektionen der Talwege zusammenfällt, d. h. längs der Kurven $v = v(o)$. Es lässt sich zeigen, dass der relative Fehler, den man macht, wenn man vom Integrationsweg nur den Teil berücksichtigt, der in der Umgebung des Passes liegt, von der Ordnung $O(e^{-n\alpha})$, $\alpha > o$, ist. In der Umgebung des Passes gilt eine Entwicklung

$$w - w(o) = z^h (c_0 + c_1 z + \ldots), \quad h > 1, \quad c_0 \neq 0.$$

Führt man $t = T^h = w(z) - w(o)$ als neue Variable ein, woraus sich z in der Form $z = \sum_1^\infty \gamma_p T^p = \sum_1^\infty \gamma_p t^{p/h}$ darstellt, so lässt sich der Betrag eines der Talwege

$$e^{nw(o)} \int_0^c f(z)\, e^{n(w - w(o))}\, dz = \varphi(o)^n \int_0^\gamma g(t)\, e^{-nt} \frac{dz}{dt}\, dt$$

durch Potenzreihenentwicklung nach den Potenzen von $t^{1/h}$ als konvergente Reihe $\varphi(o)^n \sum_1^\infty \delta_p \int_0^\gamma e^{-nt}\, t^{p/h-1}\, dt$ ausdrücken. Ersetzt man in dieser Reihe das

Integrationsintervall (o, γ) durch (o, ∞), so entsteht die, im allgemeinen divergente Reihe $\varphi\,(o)^n \sum_{1}^{\infty} \frac{\delta_p\, \Gamma(p/h)}{n^{p/h}}$. Bei Berücksichtigung beider Talwege erhält man schliesslich eine Reihe der Form $\varphi\,(o)^n \sum_{1}^{\infty} \frac{C_p\, \Gamma(p/h)}{n^{p/h}}$, die F (n) in dem Sinne asymptotisch darstellt, dass

$$F(n) = \varphi\,(o)^n \left[\sum_{p=1}^{q} C_p \frac{\Gamma(p/h)}{n^{p/h}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p+1}{h}}}\right)\right], \text{ für } q = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Die Methode der erzeugenden Funktionen (Darboux) bringt die für grosse Werte von n zu untersuchende Funktion F (n) in Zusammenhang mit den Singularitäten der „erzeugenden Funktion" $f(z) = \sum_{0}^{\infty} F(n)\, z^n$ auf dem Konvergenzkreis $|z| = R$ dieser Reihe. Wenn z. B. auf diesem Kreis f (z) nur eine Singularität hat, und zwar von der Form $f(z) = (z - a)^K\, \Phi(z) + \psi(z)$ ($k \lesseqgtr 0$, $|a| = R$; Φ, ψ analytisch in $|z| \leqq R + \rho$, $\rho > 0$) so lässt sich f (z) in der Form darstellen $f(z) = U_p(z) + (z - a)^{p+K}\, \omega(z) + \psi(z)$ mit $U_p = \varphi(a)\, (z - a)^k + \ldots + \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} (z - a)^{p+K-1}$ in $|z| \leqq R + \rho$. Die Potenzreihenentwicklung von $U_p(z)$ in der Umgebung von $z = 0$, $U_p = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ ist leicht zu berechnen. Man zeigt dann, durch Heranziehung bekannter Sätze über die Grössenordnung der Koeffizienten Fourierscher Reihen, dass $|F(n) - a_n|\, R^n < \frac{M_n}{n^{p+K+1}}$ wenn $p + k > 0$. Der Fall mehrerer Singularitäten des betrachteten Typus oder anderer einfachen Typen lässt sich in ähnlicher Weise behandeln.

3. Die Methode der Differentialgleichungen gestattet das asymptotische Verhalten der Funktionen, welche als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen definiert sind, für grosse Werte der unabhängigen Variable und eventueller Parameter, zu bestimmen. Diese Methode, die in neuerer Zeit besonders durch G. D. BIRKHOFF, J. TAMARKIN und B. E. LANGER weiterentwickelt wurde, zeigt z. B. im Falle der Differentialgleichung

$$u'' + [\lambda^2\, \Phi^2(x) - \chi(x)]\, u = 0, \text{ wo } \Phi(x) \neq 0,$$

dass Lösungen existieren, welche für grosse Werte von λ die Form

$$\frac{1}{|\Phi|^{1/2}}\, e^{\pm\lambda \int_{x_0}^{x} \Phi\, dx} \left[1 + \frac{\beta_1(x)}{\lambda} + \frac{\beta_2(x)}{\lambda^2} + \ldots + \frac{\beta_n(x) + \varepsilon(\lambda, n, x)}{\lambda^n}\right]$$

mit $\varepsilon = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ haben.

Literatur: ad 1: L. BRILLOUIN, Ann. Ecole norm. sup. Paris, (3) 33 (1916); O. PERRON, Sitz. Ber. Akad. München, Math.-phys. Kl. (1917);

WATSON, Bessel functions, Cambridge. ad 2: G. DARBOUX, Journal de math. pures et appl. (3) 4 (1878). ad 3: G. D. BIRKHOFF, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908); J. TAMARKIN, Math. Zeitschr. 27 (1927); R. E. LANGER, Bull. Americ. Math. Soc. 36.