Neue Richtlinien der Geometrie

Autor(en): **Fischer, Anna**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1932)**

PDF erstellt am: **20.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319365

Anna Fischer

Neue Richtlinien der Geometrie

Langsam aber sicher, unaufhaltsam, dringt die Mathematik in die Naturwissenschaften ein. Sie hat sich ihren Platz in der theoretischen Physik erobert, ist zu einem leitenden Prinzip in der Quantenmechanik geworden, und hat durch diese den Weg in die Chemie gefunden. Die statistischen Methoden der Mathematik werden je länger je mehr von Naturforschern und Medizinern verwendet. Unter diesen Umständen ist es natürlich, daß sich der Naturforscher etwas für Mathematik interessiert, daß er nach ihrem Wesen und nach ihrer Methode fragt.

Es ist aber in neuerer Zeit außer dem Eindringen in die Naturwissenschaften noch etwas mehr in der Mathematik vor sich gegangen: Eine Umwälzung. Wir alle haben mit gespanntem Interesse das Aufkommen der Relativitätstheorie, dann der Quantenmechanik verfolgt. Dagegen ist die Umwälzung in der Mathematik den Nichtmathematikern wohl ziemlich verborgen geblieben. Und doch ist sie gewaltiger noch und tiefer als die Revolutionen in der Physik.

Ich habe es für heute abend als meine Aufgabe betrachtet, Ihnen, soweit möglich, Wesen und Methode der Mathematik zu zeigen. Gleichzeitig — denn es ist nicht zu trennen — Sie in die neuesten Strömungen in der Mathematik einzuführen.

Wollen wir das „Heute" verstehen, so müssen wir etwas Geschichte treiben. Denn die Gegenwart steht auf den Schultern der Vergangenheit. Wo und wie sind die Anfänge der Mathematik entstanden? Wir dürfen sicher Aegypten und Griechenland als die wesentlichen Quellen unserer Mathematik ansehen.

Durch die jährlich wiederkehrenden Überschwemmungen des Nil waren die Aegypter gezwungen, ihre Felder immer wieder neu zu vermessen. Primitive Physik und Geometrie waren hier Eins in der Erdmessung. Die Aegypter haben Schiffe gebaut. Die Berechnung des Schiffsrumpfes führte zu dem entlegeneren Problem: Oberfläche und Volumen einer Halbkugel zu berechnen. In den Tempelverzierungen sollte das Ornament, das aus einer einzigen Figur aufgebaut war, eine bestimmte Fläche ausfüllen. Von dieser künstlerischen Forderung aus gelangten die Aegypter zur Begründung der sogenannten Gruppentheorie, die in der modernen Mathematik und Physik eine ausschlaggebende Rolle spielt. Wir sehen: Die ägyptische Mathematik ist aus den Bedürfnissen des Lebens entstanden.

Die Griechen haben das Erbe der Aegypter übernommen. Nennen wir nur einige Namen: Pythagoras, Plato, Aristoteles, Euklid, Archimedes. Diese Namen sagen uns schon deutlich genüg, daß sich bei den Griechen die Mathematik viel mehr in der Richtung der Philosophie entwickelt, als bei den Aegyptern. Pythagoras baute seine Philosophie auf dem Begriff der ganzen Zahl auf. Alles Seiende soll sich durch ganze Zahlen darstellen lassen. Die pythagoräische Philosophie mündet schließlich in eine Mystik der ganzen Zahl, die wir in ihrer vollen Tragweite kaum mehr verstehen können. Und es liegt eine ungeheure Tragik darin, daß Pythagoras selbst, durch seinen Lehrsatz über rechtwinklige Dreiecke, zum Entdecker der Irrationalzahlen wurde, derjenigen Zahlen, die sich nicht durch ganze Zahlen darstellen lassen.

Plato geht noch weiter. Er schafft die Lehre der Ideen; Geometrie ist für ihn ein Operieren mit diesen körperlosen Ideen. Jedes Anknüpfen an sinnlich wahrnehmbare Dinge, sogar an eine Figur, soll in der Geometrie verboten sein. Bei Plato ist die höchstmögliche Abstraktion der Geometrie erreicht, — und nun kommt wieder die Wendung. Platos Schüler, Aristoteles, der Begründer der klassischen Logik, ist gleichzeitig auch Physiker und Beobachter der Natur. Für ihn ist nur das möglich, was Wirklichkeit wird, indem es eine Form annimmt; also im Gegensatz zu Plato eine Hinwendung zum Wahrnehmbaren.

Euklid, der ausgesprochenste Geometer des griechischen Altertums, versucht das erste Mal beide Standpunkte zu vereinigen. Er geht in seiner Geometrie einerseits von der Anschauung aus, operiert und argumentiert an Hand anschaulicher Erklärungen und Figuren. Andererseits versucht er ein System von Axiomen aufzustellen und aus diesen mit Hilfe der Logik allein das ganze Gebäude der Geometrie zu erhalten. Axiome sind für Euklid selbstverständliche Wahrheiten, an denen kein denkender Mensch zweifeln kann.

Schließlich der letzte der Genannten, Archimedes, ist der experimentierende Geometer, Physiker und Ingenieur. Dieser kurze Überblick über das Altertum zeigt uns deutlich, daß Mathematik zwischen der experimentellen Naturforschung und der abstrakten Philosophie steht: Experimentelle Naturforschung — Mathematik — Philosophie.

Überspringen wir zunächst für einen Augenblick die weitere Entwicklung und sehen zu, wie sich uns Mathematik heute präsentiert. Es ist das Gleiche: Einerseits das Hinwenden zur experimentellen Physik und Chemie in der Quantenmechanik. Ich brauche hier nur einen Namen zu nennen: Weyl. Andererseits ein Hinwenden zur Philosophie in der Grundlagenforschung. Es scheint also diese durch Jahrtausende gleichbleibende Stellung der Mathematik zwischen Natur und Geist zu ihrem Wesen zu gehören.

Die heutigen Probleme der Mathematik werden wir noch besser verstehen, wenn wir die Entwicklung in der Neuzeit durchgehen. Sie ist charakterisiert durch eine Fülle von Entdeckungen, von denen ich nur einige erwähne, die Ihnen etwas bekannt sind: Differential- und Integral-Rechnung, analytische Geometrie. Das mathematische Gebäude wird immer größer und stolzer, mit immer feineren Werkzeugen wird daran gearbeitet. So sicher und fest steht im 18. Jahrhundert die Geometrie, daß Kant von der Anschauungsform des Raumes als von einer Erkenntnis a priori sprechen kann. Der Begriff des Axioms hat inzwischen allerdings eine ziemliche Verschiebung erfahren. Denn schon bald nach Euklid fühlten die Mathematiker, daß das Axiom: „Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es zu dieser Geraden eine und nur eine Parallele“ nicht selbstverständlich ist. Immer und immer wieder versuchten die Geometer, dieses Axiom zu beweisen. Der Erfolg bleibt zwar vorläufig aus, aber die Bemühungen bringen das Axiom als selbstverständliche Wahrheit ins Wanken. Da geht im Jahre 1826 ein erstes Beben auch durch die Fundamente. Von Bolyai und Lobatschewskij wird die erste sogenannte nicht-euklidische Geometrie entdeckt, die sich als logisch einwandfrei und ebenbürtig neben die vertraute Geometrie von Euklid stellt; die von ihr nur darin abweicht, daß das Postulat von Euklid: „Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb nur eine Parallele“ ersetzt wird durch das logisch gleichberechtigte Postulat: „Es gibt zwei Parallele“. Die Entdeckung der ersten nicht-euklidischen Geometrie zeigt einwandfrei, daß das Axiom nicht eine selbstverständliche Wahrheit ist, sondern nur eine mögliche Annahme unter mehreren andern. Die Entdeckung von Bolyai und Lobatschewskij hätte schon damals sowohl die Sicherheit der Mathematiker als auch die Kant'sche Lehre vom Raum als Erkenntnis a priori erschüttern sollen. Aber sie blieb fast unbeachtet.

In den Jahren 1874—1897 erscheinen die Arbeiten von Cantor zur Begründung der Lehre der unendlichen Größen. Es entsteht die sogenannte Mengenlehre als neuer Abschnitt der Mathematik. Es entsteht die mathematische Theorie der Irrationalzahl, des Unendlichen, des Stetigen, des Kontinuums. Die schönen Resultate der Mengenlehre erzwingen ihr sehr bald ein Bürgerrecht in der Mathematik. Sie wird sogar zum Ausgangspunkt und zur neuen Grundlage für viele mathematische Disziplinen. Und da Mengenlehre vollkommen abstrakt ist, wird mit ihr auch die Mathematik, auch die Geometrie immer abstrakter. Die konsequente Weiterführung der Mengenlehre führt aber zu logischen Widersprüchen, zu Paradoxien (wir werden auf diese später noch zu sprechen kommen), führt dadurch zu einer Katastrophe in der Mathematik. Denn: Der Begriff der Stetigkeit hat seine Wurzeln in der Mengenlehre. Ist diese voll Widerspruch, so ist auch die Stetigkeit, das Kontinuum ein widerspruchsvoller Begriff. Er und alles, was mit ihm zusammenhängt, d. h. unsere ganze stetige Geometrie, hat aus der Mathematik zu verschwinden. Gegen diese Zumutung wehrt sich der Geometer. Hier setzt der Kampf um die Grundlagen ein, der für die Mathematik des XX. Jahrhunderts so bezeichnend ist. Es entstehen zwei Richtungen, von Brouwer und von Hilbert.

a) Brouwer sagt: Die Mengenlehre führt nur deshalb zu Widersprüchen, weil wir in ihr die klassische Logik auf unendliche Mengen anwenden. Die klassische Logik hat aber ihren Gültigkeitsbereich nur in den endlichen Mengen. Die Widersprüche der Mengenlehre können durch Schaffung einer neuen, der sogenannten intuitionistischen Logik, beseitigt werden.

b) Hilbert dagegen versucht mit allen Mitteln, die Widerspruchsfreiheit der Mathematik auch in der klassischen Logik zu beweisen. Er schafft zunächst sein berühmtes Axiomensystem für die euklidische Geometrie. Er führt schließlich die ganze Mathematik auf einen Kalkül mit logischen Symbolen zurück und glaubt damit ihre Grundlagen sichergestellt zu haben. Im Jahr 1931 gelingt jedoch der einwandfreie Beweis, daß die Hilbert'sche Konstruktion nicht vor Widersprüchen geschützt ist. Damit ist auch dieser großartigste Rettungsversuch erledigt.

Diese Tatsache bedeutet für den Axiomatiker einen schweren Schlag. Der weniger fanatische Geometer besieht sich aber die Sache so, wie sie ist und bemerkt ein Wunder: Während die Fundamente der Mathematik in Trümmer gingen, blieb das übrige Gebäude ruhig stehen. Es muß also auf andern Pfeilern ruhen, auf Pfeilern, die wir bis heute nicht beachtet haben, und die fester und sicherer sind als unsere bisherigen Grundlagen. Die Suche nach diesen natürlichen Stützpfeilern der Mathematik führt zu den neuen, neuesten Ideen, führt zu einer andern Betrachtungsweise der Mathematik überhaupt, führt zur mathematischen Philosophie von Prof. Gonseth.

Meine Herren und Damen! Auf unserer Wanderung durch die Geschichte der Mathematik sind wir nun bis zur lebendigen Gegenwart gekommen. Ihr soll auch der Rest unseres Abends gewidmet sein. Bevor ich auf die Ideen von Gonseth näher eintrete, möchte ich noch ein Beispiel erwähnen, das einen charakteristischen Zug der Gegenwart auch deutlich zeigt. Es handelt sich um ein Teilgebiet der Geometrie, die sogenannte Topologie. Ihre ersten Anfänge gehen auf Euler zurück. Euler betrachtet z. B. solche Probleme: Wann ist auf einem Brett ein Rösselsprung möglich? Welche Systeme von Strecken lassen sich in einem Zug beschreiben? Welches ist die Beziehung zwischen den Anzahlen der Begrenzungsflächen, Kanten und Ecken eines Polyeders? Es sind Probleme, die aus der anschaulichen Geometrie hervorgegangen sind. Nach der Entwicklung der abstrakten Mengenlehre fängt auch in der Topologie eine mengentheoretische Epoche an. Sie zeitigt sehr schöne Ergebnisse, führt aber schließlich die Topologie in eine ziemlich aussichtslose Lage hinein. Die Topologie wird zum „Sorgenkind" der Mathematik. Der Ausweg aus der mißlichen Lage ist inzwischen gelungen, indem der russische Geometer Alexandroff ganz bewußt zur Anschauung zurückgreift. Die Begriffe, die wir nicht anschaulich deuten können, sind zu allgemein gefaßt; wir müssen auf sie verzichten. Diesem Verzicht und dem „Zurück zur Natur" verdankt die heutige Topologie ihren neuen Aufschwung und gerade dieses „Zurück zur Natur" ist ein neuer Zug nach der abstrakten Periode.

Und nun, nach diesem kleinen Beispiel, zu den Ideen von Gonseth, in denen wir den Zug zum Natürlichen auch deutlich erkennen werden! In der vorkantischen Philosophie wurde ein Gebiet angenommen, wo die Erkenntnis das Absolute erfaßt, unabhängig von den Zufälligkeiten unseres Geistes und der uns umgebenden Realität. Ein solches absolutes Gebiet ist z. B. die Platonische Welt der Ideen. Die geometrischen Begriffe waren für die Griechen solche reine Ideen, Geometrie in diesem Sinne absolut wahr. Erst Kant verdanken wir die Einsicht, daß jede Erkenntnis abhängig ist von der Struktur des erkennenden Geistes. Die Kant'sche Lehre fand überall Eingang, nur Mathematik und Logik blieben in der bevorzugten Stellung: Die Aussagen der Mathematik und Logik werden auch weiterhin als absolut wahr betrachtet. Man hat natürlich bemerkt, daß eine mathematische Theorie nicht immer zur Deutung der physikalischen Realität brauchbar ist. Man unterschied zwischen ihrer Anwendungsfähigkeit in der Naturforschung und ihrer Richtigkeit als mathematische Theorie. Im Bereiche der reinen Mathematik bleiben ihre Sätze aber richtig und absolut wahr.

Wir wollen versuchen, das Wesen dieser reinen Mathematik und die Quelle ihrer Wahrheit zu ergründen.

Beginnen wir bei der Geometrie, und fragen wir uns, wie die elementaren Begriffe, Punkt und Gerade, entstehen. Wir haben in der physikalischen Wirklichkeit das Bedürfnis, eine Stelle, das „Hier", möglichst genau zu bezeichnen. Wir werden z. B. sagen: In Bern, in der Hochschule, in Z. 20, auf dem Pult, usw. Wir bekommen eine Reihe von immer kleineren Gebieten, von denen jedes folgende in dem vorhergehenden liegt. Es ist klar, daß wir durch diese fortgesetzte Einschachtelung in der Wirklichkeit nie einen Punkt, sondern stets nur ein, wenn auch sehr kleines, Gebiet erreichen werden. Da setzt die erste Abstraktion ein, indem wir uns den Prozeß der Einschachtelung bis ins Unendliche fortgesetzt denken. Das Resultat ist der geometrische Punkt, das Ding ohne Ausdehnung, die ganz genaue Ortsbezeichnung. In der physikalischen Wirklichkeit ist er nicht realisiert; trotzdem hat uns gerade diese Wirklichkeit den Begriff suggeriert. Analog ist es mit der Geraden. Wir haben z. B. einen schönen Bergkristall in den Händen. Die regelmäßigen scharfen Kanten fallen uns auf. Wir machen uns davon ein abstraktes idealisiertes Bild, die geometrische Gerade. Die Kante des Kristalls ist keine geometrische Gerade. Sie ist ja nicht einmal stetig, sondern zerfällt in eine Reihe diskret liegender Moleküle. Glücklicherweise haben unsere Augen das nicht gesehen. Glücklicherweise ist unseren Augen und Tastnerven die Kante als stetig erschienen und hat uns so den Begriff der geometrischen Geraden suggerieren können.

Man kann hier einwenden: Die geometrischen Begriffe sind in der Wirklichkeit nicht realisiert; also hat diese Wirklichkeit auch mit ihrer Entstehung nichts zu tun. Geometrische Begriffe sind abstrakte, rein logische Dinge, deren Eigenschaften nur mit Hilfe von Axiomen definiert werden.

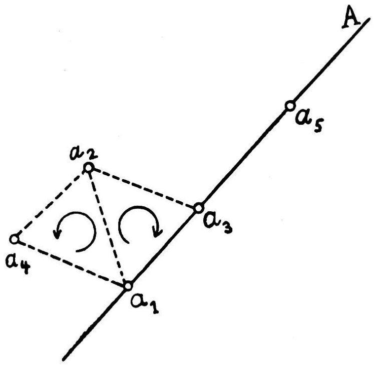
Versuchen wir, auch diesen Weg zu gehen! Wir denken uns zwei Klassen von Elementen. Die Elemente der einen Klasse nennen wir A, A, A, . . ., die Elemente der andern a, a, a, . . . Diese Elemente haben vorläufig gar keine Eigenschaften; sie werden sie erst durch die Axiome erhalten. Z. B.:

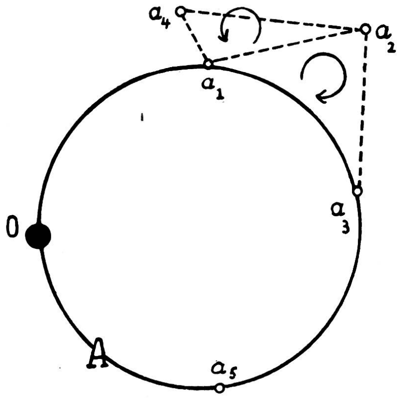
Ax. 1. Ein A kann mit einem a eine logische Beziehung J(A, a) erfüllen oder nicht.

Ax. 2. Man kann stets ein und nur ein A finden, das mit zwei verschiedenen a die Beziehung J erfüllt.

Tabelle I.

Symbolkalkül	*Analytische Geometrie*	
Ding A	Koordinaten u, v	Gerade A
Ding a	Koordinaten x, y	Punkt a
$J(A, a_1)$	$uX_1 + vy_1 + 1 = O$	a_1 liegt auf A
$\bar{J}(A, a_2)$	$uX_2 + vy_2 + 1 \neq O$	a_2 liegt nicht auf A
$O(a_1, a_2, a_3)$	Determinante $D > O$	positive Orientierung
$\bar{O}(a_1, a_2, a_4)$	$D < O$	negative Orientierung
$J(A, a_1)$ & $J(A, a_3)$ & $J(A, a_5)$	$D = O$	a_1, a_3, a_5 liegen in einer Geraden

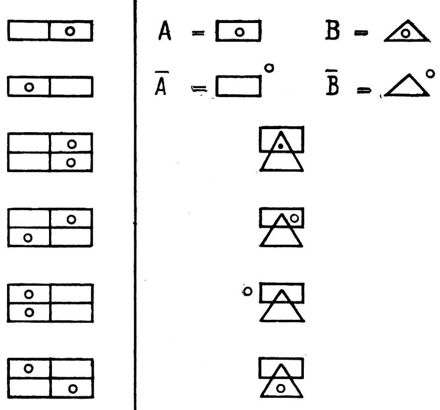




O ist kein Punkt in diesem Modell!
Kreis durch O = Gerade
Punkt d. Ebene = Punkt

Tabelle II.

Symbolkalkül	*Wahr und falsch*	*Logik des Seins*
A	A wahr	A existiert
$\bar{A}$	A falsch	A existiert nicht
A & B	A wahr u. B wahr	A ex. und B ex.
A & $\bar{B}$	A wahr u. B falsch	A ex. und B ex. nicht
$\bar{A}$ & $\bar{B}$	A falsch u. B falsch	A ex. nicht u. B ex. nicht
$\bar{A}$ & B	A falsch u. B wahr	A ex. nicht und B ex.



Ax. 3. Drei verschiedene a können entweder eine logische Beziehung

$O(a_1, a_2, a_3)$

oder $\bar{O}(a_1, a_2, a_3)$

oder $J(A, a_1)$ und $J(A, a_2)$ und $J(A, a_3)$ erfüllen.

Es würden noch mehrere Axiome dieser Art folgen. Aus ihnen würde man die logischen Folgerungen ziehen und das resultierende Ganze wäre das logische Schema der euklidischen Geometrie.

Ich hoffe, daß Sie nun entsetzt ausrufen: Das soll Geometrie sein! Ich hoffe, daß Sie nicht weniger entsetzt fragen: Aber wie, in aller Welt, ist ein Mensch auf diese Axiome verfallen? Ich behaupte: Sehr einfach.

Sagen wir statt Element A Gerade, statt Element a Punkt. Die Beziehung $J(A, a)$ sei die Inzidenz, $O(\quad)$ die positive Orientierung, $\bar{O}(\quad)$ die negative Orientierung. Dann gehen unsere früheren Axiome über in:

Ax. 1. Eine Gerade kann durch einen Punkt gehen oder nicht.

Ax. 2. Zwei Punkte bestimmen stets eine einzige Gerade.

Ax. 3. Drei verschiedene Punkte bestimmen entweder eine positive Orientierung, oder eine negative Orientierung, oder sie liegen alle auf einer Geraden.

Es ist nicht zu leugnen, daß diese Axiome eine Projektion der bekannten geometrischen Tatsachen in die Sphäre der reinen Logik darstellen; daß wir ohne die bekannte, in der Anschauung begründete Geometrie niemals ein solches Axiomensystem aufstellen könnten. Beharren wir aber trotzdem noch einen Augenblick in der Überzeugung, daß die Axiome allein die geometrischen Wesen definieren.

Wollen wir nun zurück, wollen wir dieses abstrakte Schema zur Beschreibung der Natur verwenden, so müssen wir ihm eine Realisation geben. Eine solche wäre z. B. in Tabelle I die dritte und vierte Kolonne. Im Sinne der reinen Logik sind diese beiden Realisationen nur zwei verschiedene Modelle derselben euklidischen Geometrie. Sie haben beide etwas Gemeinsames: die rein logische Struktur. Stellen wir uns auf den Standpunkt, daß die Axiome allein die geometrischen Wesen definieren, so können wir diese beiden Modelle nicht mehr voneinander unterscheiden. Und doch empfinden wir sie als g e o m e t r i s c h verschieden. Daraus folgt: Die Axiome allein können das wirkliche geometrische Wesen nicht definieren. Bei der letzten Abstraktion bis zur reinen Logik geht von der Geometrie etwas verloren, verschwindet eben das spezifisch Geometrische. Die geometrischen Begriffe werden einerseits in der physikalischen Wirklichkeit nicht realisiert, andererseits in der Sphäre der reinen Logik, durch die Axiome allein nicht definiert. Geometrie steht eben zwischen diesen beiden Gebieten. Die geometrischen Begriffe sind ideale Bilder, die sich auf das Reelle stützen, schematische Darstellungen, deren Sinn nur dann begreifbar wird, wenn man der Realität Rechnung trägt. Der Begriff der „Geraden" ist nicht möglich ohne die grobe Realisation „Kante eines Kristalls", der Begriff des Punktes nicht möglich, ohne die Ortbezeichnung „Hier". Andererseits bekommen die geometrischen Begriffe ihr rationales Aussehen erst durch die Axiomatisierung.

Zusammenfassend können wir sagen: Nur durch das Hin- und Herwogen des Geistes zwischen den beiden Ufern, physikalische Realität und reine Logik, werden die vollständigen Begriffe der Geometrie geboren. Von allen mathematischen Disziplinen fällt es bei der Geometrie am meisten auf, daß sie im Intuitiven, Psychologischen und Phänomenalen begründet ist und daß sie durch Abstraktion und Schematisierung aus der Realität aufgebaut wird. Es fällt ferner auf, daß die Sphäre der Geometrie dort aufhört, wo diejenige der reinen Logik beginnt. Aus diesem letzten Grund wollen viele Mathematiker die selbständige Existenz der Geometrie nicht anerkennen und vertreten folgende Ansicht: Geometrie ist nur eine Terminologie, nur so etwas wie eine Etikette. Der wahre Inhalt ist aber algebraischer Natur. Wir können folglich in der Geometrie nur dann exakte Aussagen machen, wenn wir sie auf die Algebra zurückführen, d. h. wenn wir analytische Geometrie treiben. Hat dieser Standpunkt eine Berechtigung? Ist die Algebra wirklich so rein logisch im Vergleich mit der Geometrie? Betrachten wir nochmals unsere Zusammenstellung I, speziell die zweite und dritte Kolonne. Wir haben hier eine Realisation der logischen Struktur durch arithmetische Beziehungen im Gebiete der reellen Zahlen. Die Algebra ist nichts mehr als eine Realisation; denn die reine Logik kennt kein kleiner oder größer, kennt keine Gleichung und auch keine Determinante. Die Algebra hat somit vor der Geometrie nicht das Geringste voraus inbezug auf logische Reinheit, ist daher der Geometrie auch nicht überlegen, sondern mit ihr gleichberechtigt.

Damit wollen wir die Geometrie vorläufig verlassen und uns der Arithmetik zuwenden. Im Werdegang der Zahlen kann man drei Perioden unterscheiden:

a) die intuitive Periode vor der Axiomatisierung;

b) spezifisch arithmetische Periode, deren Resultat die Formulierung der Theorie der ganzen Zahlen ist;

c) rein logische Periode.

Wir wollen, wie bei der Geometrie, untersuchen, auf welche Weise sich der arithmetische Zahlbegriff aus der empirischen Beobachtung der Umwelt bildet. Daß er sich aus der Beobachtung bildet, ist z. B. dadurch belegt, daß in den ägyptischen Hieroglyphen die Zahl 5 durch eine stilisierte Hand dargestellt wird. Wie er sich bildet, erkennen wir am besten, wenn wir die kleinen Kinder beobachten. Im ersten Stadium ist das Zählen eine Registrierung von Vorgängen, die nacheinander erfolgen. Diese Vorgänge können optische oder akustische Phänomene oder Tasteindrücke oder gewisse Bewegungen unseres eigenen Körpers sein. Das letztere spielt beim Kind eine besonders wichtige Rolle. Wer den Betrieb in der ersten Primarschulklasse kennt, weiß ganz gut, wie sehr man sich im modernen Unterricht beim Rechnen auf die Bewegungen des Körpers stützt. Die Kinder klatschen z. B. einmal, zweimal, dreimal; sie schlagen aufs Pult einmal, zweimal, dreimal, usw. Wir haben hier ein ganz deutliches Nacheinander der Bewegungen. Dieser Folge ordnen wir eine Folge von bestimmten Wörtern, eins, zwei, drei, oder von bestimmten Zeichen, 1, 2, 3, zu. Nun beginnt das Kind mit dem Zählen von Objekten. Es erhält z. B. drei Äpfel. Soll es sie zählen, so wird es auf jeden Apfel mit dem Finger deuten und dazu sprechen: eins, zwei, drei. Das Nacheinander der körperlichen Bewegungen wird so auf das Nebeneinander von mehreren Objekten projiziert. Damit das Kind die Dinge zählen kann, muß es sie gleichzeitig als gleich (im gewissen Sinn) und als verschieden betrachten, was hier aber weit davon entfernt ist, einen logischen Widerspruch zu bilden. Das Kind lernt allmählich, einer Anzahl von Objekten, z. B. zuerst seinen eigenen Fingern, Zahlen, Nummern zu ordnen, die so etwas wie Bilder der Objekte sind. Es macht die Erfahrung, daß zu den vorhandenen Zahlzeichen stets wieder ein neues hinzugedacht werden kann, nach Bedarf; daß ferner Addition möglich ist, sowohl für die Objekte als auch für die Zahlzeichen. Indem das Kind bei ganz verschiedenen Objekten, z. B. seinen Fingern, Nüssen, Zündhölzchen, usw. immer wieder auf die gleiche Zahl drei gezählt hat, abstrahiert es allmählich die Zahl von den Objekten. Durch Abstraktion von der realen Wirklichkeit formt sich die arithmetische Zahl.

Der Mathematiker empfindet das Bedürfnis, die Theorie dieser ganzen Zahlen etwas genauer zu formulieren. Der erste Versuch einer Axiomatik der Arithmetik stammt von Peano. Die Axiome lauten:

Ax. 1. Auf jede Zahl a folgt eine Zahl a'.

Ax. 2. Nur die Zahl 1 folgt auf keine Zahl.

Ax. 3. Jede Zahl folgt direkt oder durch Vermittlung anderer Zahlen auf die Zahl 1.

Ax. 4. Die Folge der Zahlen von einer beliebigen an ist gleich gebaut, wie die Folge von 1 an.

Man kann zeigen, daß jede Folge, welche die 4 Axiome erfüllt, gleichgebaut ist wie die Folge

$$1, 2, 3, \ldots.$$

Auch Addition und Multiplikation läßt sich definieren. Aus den 4 Axiomen und ihren Folgen resultiert das Gebäude der gewöhnlichen Arithmetik genau gleich, wie aus den Axiomen der euklidischen Geometrie diese Geometrie resultierte. Und genau gleich wie dort, können wir jetzt zeigen, daß unsere gewohnte Arithmetik nur ein Modell für dieses Axiomensystem ist. Ein anderes Modell ist die Arithmetik in der Folge der geraden Zahlen 2, 4, 6, ... Die 4 Axiome sind in beiden erfüllt; die logische Struktur ist in beiden dieselbe. Vom Standpunkt der Axiomatik könnten wir diese zwei arithmetischen Modelle nicht mehr unterscheiden. Und doch wissen wir, daß sie verschieden sind. Hier also auch wieder genau das gleiche Ergebnis, wie in der Geometrie: Bei der Axiomatisierung geht den Zahlen etwas, das spezifisch Arithmetische, verloren.

Man ist in der Arithmetik aber noch einen Schritt weiter gegangen. Die angeführten 4 Axiome sind noch zu deutlich im Intuitiven verstrickt. Man hat in den letzten Jahren den Versuch unternommen, die Zahlen rein logisch zu definieren. Also:

Wir denken uns ein System von Dingen, die wir Zahlen nennen. Sie haben vorläufig noch gar keine Eigenschaften. Sie erhalten ihre Eigenschaften erst durch die Axiome:

Ax. 1. Ein Element heißt Eins und hat das Symbol 1.

Ax. 2. Zu jedem Paar von Zahlen a und b gehört eine bestimmte Zahl c, ihre Summe: $c = S(a, b)$ oder $c = a + b$.

Ax. 3. Es kann nicht sein $a + 1 = 1$.

usw. Wir brauchen nicht das vollständige Axiomensystem. Erst durch die Gesamtheit der Axiome sind also die Zahlen definiert; und doch haben wir die Axiome schon numeriert. Vom rein logischen Standpunkt ist das ein Zirkelschluß. Wir können ihn leicht umgehen, indem wir die Axiome nicht numerieren. Aber: Eine logische Beziehung kann erst zwischen 2 Elementen auftreten, das Axiom der Summe braucht deren 3! Wir können es drehen, wie wir wollen, das Axiomensystem kann nicht aufgestellt werden ohne Verwendung des im Intuitiven verankerten Begriffes der „arithmetischen Zahl". Genau wie die geometrischen Wesen, kann auch die Zahl im Gebiete der reinen Logik, durch Axiome allein nicht definiert werden. Genau wie die geometrischen Wesen ist auch die Zahl in der physikalischen Wirklichkeit nicht realisiert, denn zwei Objekte werden sich stets, wenigstens durch ihre Lage, unterscheiden. Genau wie die Geometrie befindet sich also auch die Arithmetik zwischen diesen beiden Gebieten:

Phys. Realität — Arithmetik — reine Logik.

Auch das spezifisch Arithmetische hört dort auf, wo die reine Logik beginnt.

Nach dieser Untersuchung von Geometrie und Arithmetik können wir schon zwei unserer Fragen beantworten. Was ist das Wesen der Mathematik? Ihre Stellung zwischen physikalischer Realität und reiner Logik. Welches ist ihre Methode? Die axiomatische Methode, die man nur charakterisieren kann, indem man sie schildert; die axiomatische Methode, die im Hin- und Herwogen des Geistes zwischen physikalischer Realität und reiner Logik besteht. Etwas aber haben wir noch nicht ergründet: die Quelle der absoluten mathematischen Wahrheit. Wir müssen also noch weiter auf die Suche gehen. Wenn irgendwo, so muß die absolute Wahrheit in der Logik zu finden sein; wir müssen uns also dieser zuwenden.

Wie bei Geometrie und Arithmetik versuchen wir aufzuklären, wie Logik entsteht, und betrachten vor allem den Begriff „Ding" oder „Objekt". Das Kind hat nicht von Geburt an die Fähigkeit, Objekte zu unterscheiden. Auch die Sinneseindrücke, die zu demselben Objekt gehören, bleiben, wie es scheint, am Anfang zerstreut im Bewußtsein. Erst allmählich erkennt das Kind dasselbe Objekt in seinen verschiedenen Erscheinungsformen. Das „Ding" ist also schon eine erste Schematisierung der Erscheinungen in der Umwelt. Nun macht der Mensch die Erfahrung, daß ein bestimmtes Ding entweder anwesend oder abwesend sein kann, daß diese zwei Möglichkeiten einander ausschliessen und daß es keine weitere Möglichkeit gibt. Von dieser Erfahrung an bestimmten Dingen kommt man durch Abstraktion dazu, daß An- und Abwesenheit die einzigen und einander entgegengesetzte Möglichkeiten sind für jedes denkbare Objekt.

Ein Ding kann hier, oder dort, oder sonstwo anwesend sein. Abstrahieren wir bei allen diesen Möglichkeiten von der Lage im Raum und behalten wir nur die Anwesenheit irgendwo, so wird daraus durch weitere Schematisierung die Existenz, das Sein des Objektes. Das Sein ist also nichts anderes als eine Abstraktion aus der Anwesenheit, das Nichtsein eine Abstraktion aus der Abwesenheit des Objektes.

Wir machen noch eine weitere Erfahrung: Jedes Ding verändert sich ständig in Raum und Zeit; etwas an ihm bleibt aber immer gleich. Ich weiß aus Erfahrung, daß z. B. mein Hund nicht plötzlich zu einer Katze wird, obwohl er täglich und stündlich verschieden ist. Wenn ich also von den Veränderungen absehe, kann ich behaupten: Jedes Ding ist mit sich selber identisch. Die Aussage ist aber schon eine weitgehende Schematisierung. So entstehen allmählich aus der Erfahrung des täglichen Lebens, die wir mit den Dingen unserer Umgebung machen, durch Schematisierung und Abstraktion die ersten Regeln der Logik:

1. Für jedes Ding A gibt es stets nur die zwei Möglichkeiten:
   a) A ist,
   b) A ist nicht.

Das ist das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten.

2. Die beiden Möglichkeiten schließen einander aus.

Das ist das Prinzip des Widerspruchs.

3. A ist stets A.

Das ist das Prinzip der Identität.

Auch ein weiterer Begriff der Logik, die Klasse, wird aus der Erfahrung abstrahiert. Die Gegenstände in unserer Umgebung haben gewisse Eigenschaften, z. B. eine Farbe, ein Gewicht. Indem ich nur eine dieser Eigenschaften, z. B. die Farbe, ins Auge fasse, und von allen übrigen abstrahiere, kann ich die Dinge einteilen in blaue und nichtblaue. Durch weitere Abstraktion entsteht daraus die Klasse der blauen und der nichtblauen Objekte. Die hellblauen Dinge meiner Umgebung rechne ich natürlich zu den blauen überhaupt und bemerke, daß die letzteren zahlreicher sind als die ersteren. Durch Abstraktion wird daraus: Eine Klasse kann in einer andern Klasse enthalten sein. Diese Einschachtelung der Klassen ineinander ist ganz analog der Einschachtelung der einzelnen Gegenstände ineinander; sie ergibt schließlich die bekannte Regel des Syllogismus: Wenn A zu B gehört und B zu C, so gehört auch A zu C. Diese Regel entpuppt sich als Schematisierung der physikalischen Realität und erhält einen deutlichen empirischen Beigeschmack, indem ich sage: Der Schlüssel ist in meiner Hand, die Hand in der Tasche; dann ist auch der Schlüssel in der Tasche. Sehen wir uns noch die einfachen Regeln der Logik für zwei Objekte an. Wir haben eine Tabelle von 4 Möglichkeiten:

a) A existiert und B existiert.
b) A existiert und B existiert nicht.
c) A existiert nicht und B existiert nicht.
d) A existiert nicht und B existiert.

Diese Aufzählung ist auch wieder nur ein Schema, das auf der An- und Abwesenheit von zwei Dingen in der Wirklichkeit fußt. Die bezüglichen logischen Regeln lauten:

1. Es tritt stets nur eine der vier Möglichkeiten auf.

Diese Regel ist analog dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten. Eine weitere spielt die Rolle des Prinzips des Widerspruchs.

2. Irgend zwei Möglichkeiten der Tabelle können nicht gleichzeitig auftreten.

Wir können uns diese vier Möglichkeiten veranschaulichen (II Kolonne 3, 4, 5).

Ist nun diese Logik des Seins und Nichtseins, die sich aus der Erfahrung an beliebigen Objekten abstrahiert hat, schon die reine Logik, deren Gebiet wir früher durch Geometrie und Arithmetik hindurch erreicht haben? Nein! Sie ist selber nur ein Modell, wie die anschaulichen Modelle, die daneben stehen. Wir können aber sogar neben diese Logik des Seins und Nichtseins eine ebenbürtige andere Logik stellen, als weiteres logisches Modell.

Im täglichen Leben kann eine Aussage wahr oder falsch sein, im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Die Wahrheit ist hier nur eine genügende Angepaßtheit an die Wirklichkeit und weit davon entfernt, etwas Absolutes zu sein. Durch Schematisierung und Abstraktion entsteht aus dieser alltäglichen Wahrheit der Begriff der Wahrheit und Falschheit in der Logik. Für zwei Aussagen A und B gelten nun vier Möglichkeiten:

a) A wahr und B wahr.
b) A wahr und B falsch.
c) A falsch und B falsch.
d) A falsch und B wahr.

Die Logik des Wahren und Falschen stellt sich als gleichberechtigtes Modell neben die Logik des Seins und Nichtseins, so wie sich die beiden Modelle der euklidischen Geometrie nebeneinander stellen.

Etwas empfinden wir an diesen zwei Logiken als verschieden: das spezifische des Wahren und des Seins. Etwas haben aber beide gemeinsam: die gleiche rein logische Struktur. Diese erscheint erst im Symbolkalkül, der wirklichen Axiomatik der Logik. Erst mit diesem haben wir das Gebiet der reinen Logik erreicht.

Obwohl die Verhältnisse in der Logik wesentlich unübersichtlicher sind als in Geometrie und Arithmetik, erkennen wir doch den gleichen Zug: Auch die Logik des Wahren und Falschen steht zwischen der physikalischen Wirklichkeit und der reinen Logik:
phys. Wirklichkeit — Logik des Wahren und Falschen — reine Logik. Auch sie bildet sich durch Schematisierung und Abstraktion aus der Realität. Und wie der Begriff der Geraden und der Zahl nicht in der Sphäre der reinen Logik definiert werden konnte, so kann auch der Begriff des Wahren und Falschen nicht im Symbolkalkül definiert werden. Der Begriff des Wahren und Falschen hat, wie Gerade und Zahl, seine tiefen Wurzeln in der Wirklichkeit und erhält seinen Sinn erst durch diese. Damit fällt aber die traditionelle absolute Stellung der Wahrheit.

Wir sind bei einem der wichtigsten Gedanken von Gonseth angelangt und wollen ihn noch etwas besprechen. In der vorkantischen Philosophie ist, wie ich am Anfang gesagt habe, die Wahrheit absolut, verwirklicht in einer Welt der Ideen, unabhängig von den Zufälligkeiten unseres Geistes. Uns erschien aber die Wahrheit als ein Begriff, der durch Axiomatisierung aus der Realität entstanden ist so, wie Geometrie und Arithmetik. Wir nehmen eine Axiomatik der Wahrheit an, wie eine Axiomatik der Geometrie, anerkennen aber nicht die absolute Gültigkeit dieses Begriffes in der Welt unserer Gedanken. Vielleicht wird der Standpunkt noch klarer, wenn wir zu einem Vergleich greifen. Die Geometrie wird axiomatisch aufgebaut auf den Begriffen Punkt, Gerade, usw. Keiner dieser grundlegenden Begriffe kann aber im Experimentellen vollkommen verwirklicht werden. Nehmen wir die geometrischen Begriffe an, so haben wir damit nicht angenommen, daß sie schrankenlos zur Beschreibung der Phänomene verwendet werden können.

In der axiomatischen Geometrie existiert der Begriff des Kontinuums. Daraus können wir aber nicht schließen, daß in der physikalischen Welt die Materie kontinuierlich verteilt ist. Umgekehrt können wir aus der diskreten Verteilung der Materie nicht schließen, daß das geometrische Kontinuum nicht existiert. Wir haben hier zwei verschiedene Schichten der Existenz, die einander nur schematisch entsprechen, die nur in gewissen Grenzen in schematische Übereinstimmung gebracht werden können.

Genau gleich ist es mit der Wahrheit. Wir nehmen den Begriff der logischen Wahrheit an. Den andern Schichten unseres Denkens, die für ihn Realitäten sind, wird er sich nur schematisch, nur in gewissen Grenzen anpassen.

Damit ist auch unsere letzte Frage, nach der mathematischen Wahrheit, beantwortet. Wir sind ausgegangen, sie zu suchen. Je näher wir aber dieser Wahrheit kamen, umso mehr zerrann sie in ein Nichts. Ich betone nochmals: In unserer Erkenntnis gibt es keine absolute Wahrheit, keine Wahrheit, die unabhängig wäre von der Realität unseres Geistes und der Realität der physikalischen Umwelt.

Wir sind jetzt so weit, daß wir die berühmten Antinomien der Mengenlehre in Angriff nehmen können, von denen ich früher gesprochen hatte. Als Beispiel nehme ich das Paradoxon von Russell. Wir denken uns alle möglichen Mengen und teilen sie in zwei Klassen ein:

Klasse 1. Mengen, die sich selbst als Element enthalten.
Klasse 2. Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten.

Ein Repräsentant der ersten Klasse ist z. B. die Menge aller abstrakten Begriffe. Diese Menge enthält alle abstrakten Begriffe als Elemente, enthält also auch sich selber, da sie ein abstrakter Begriff ist. Ein Beispiel für die zweite Klasse ist die Nullmenge, die dadurch definiert ist, daß sie kein einziges Element enthält.

Eine gegebene Menge enthält entweder sich selbst als Element oder sie enthält sich nicht als Element, gehört also entweder zu Klasse 1 oder 2. Dieses logische disjunktive Urteil ist u n z w e i f e l h a f t richtig, behauptet der Mengentheoretiker. Nun betrachten wir diejenige Menge, welche alle Mengen der zweiten Klasse als Elemente enthält, und nennen sie M_2. Sie ist bestimmt, muß also selber auch wieder entweder zu Klasse 1 oder 2 gehören. Nehmen wir an, sie gehöre zu Klasse 1, d. h. sie enthalte sich selbst als Element. M_2 enthält aber nach Definition als Elemente nur Mengen der zweiten Klasse. Wenn sie sich selber enthält, so muß sie selber zur zweiten Klasse gehören. Unsere Annahme ist also falsch.

Folglich nehmen wir jetzt umgekehrt an, M_2 sei eine Menge der zweiten Klasse. Aber: M_2 soll doch alle Mengen der zweiten Klasse enthalten, muß sich selber also auch enthalten und somit zur ersten

Klasse gehören. Unsere zweite Annahme führt auch zu einem Widerspruch.

Bei der Einteilung der Mengen haben wir vom Prinzip des ausgeschlossenen Dritten Gebrauch gemacht. Wir haben gesagt: Jede Menge ist entweder in Klasse 1 oder Klasse 2; es gibt keine dritte Möglichkeit. Lassen wir das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten fallen, so verschwindet auch der Widerspruch. Diesen Weg hat Brouwer mit seiner intuitionistischen Logik eingeschlagen, in welcher das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht gilt. Aber auch andere Mathematiker finden, daß es unstatthaft ist, die klassische Logik auf eine Gesamtheit von unendlich vielen Elementen anzuwenden. Der Widerspruch tritt nur auf, weil die betrachteten Mengen u n e n d l i c h sind. Wie falsch es ist, das Unendliche für den Widerspruch verantwortlich zu machen, zeigt eine hübsche Einkleidung des Russell'schen Paradoxons.

In einem Dorf gibt es eine e n d l i c h e Anzahl Männer, die keinen Bart tragen. Die einen rasieren sich selbst, die anderen lassen sich rasieren. Von jedem Mann im Dorf kann man mit Sicherheit entscheiden, ob er sich selbst rasiert oder sich rasieren läßt. Wir können also alle rasierten Männer in zwei Klassen einteilen:

Klasse 1. Die sich selbst rasieren.
Klasse 2. Die sich nicht selbst rasieren.

Nun erhält der einzige Coiffeur des Dorfes den strengen Befehl, am Samstag alle diejenigen Männer zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren, aber nur diese und keine anderen. Alles geht ganz gut, bis der Coiffeur bei sich selber anlangt. Wenn er sich rasiert, so rasiert er sich selber, und sollte sich nicht rasieren. Rasiert er sich aber nicht, so rasiert er sich selbst nicht, und sollte sich rasieren.

Also der schönste Russell'sche Widerspruch, obwohl von einer Unendlichkeit hier keine Rede war! Das Unendliche ist also sicher nicht allein daran schuld. Ist nicht wirklich diese Einteilung in zwei scharf getrennte Klassen etwas, was nur bis zu einer gewissen Grenze gilt? Bleiben wir nicht in der abstrakten Mathematik und Logik hocken, sondern wenden unseren Blick den Naturwissenschaften zu, so sehen wir Folgendes: In der Chemie gibt es zwei Klassen von Verbindungen, die Säuren und die Basen. Wir können im allgemeinen entscheiden, ob eine Verbindung Säure oder Base ist. An der Grenze jedoch gibt es Verbindungen, die sowohl Base als Säure sind, z. B. das Wasser selbst. Die Lebewesen können wir einteilen in zwei Klassen, Tiere und Pflanzen. Wie selbstverständlich ist doch im allgemeinen die Entscheidung, ob wir ein Tier oder eine Pflanze vor uns haben! Und doch wissen Botaniker und Zoologen zu berichten, daß es eine Grenze gibt, jene primitivsten Lebewesen, die weder Tier noch Pflanze, oder beides zugleich sind.

Die Klassifikation ist in den Naturwissenschaften ein außerordentlich zweckmäßiges Prinzip; hinter einer gewissen Grenze verliert es aber seine Gültigkeit. Genau gleich ist es mit dem Klassenprinzip der Logik, das ja schließlich durch Abstraktion aus der naturwissenschaftlichen Klassifikation hervorgegangen ist. Das Klassenprinzip der Logik ist sehr zweckmäßig bis zu einer gewissen Grenze. Es ist aber ein Irrtum, wenn man immer und immer wieder mit aller Gewalt versucht, seine Gültigkeit über diese Grenze zu erzwingen. Die Antinomien der Mengenlehre zeigen nur, daß Mengenlehre schon hinter dieser Grenze liegt. In dem Sinne hat Brouwer mit seiner intuitionistischen Logik recht.

Wenn man von den Flagellaten nicht entscheiden kann, ob sie Pflanzen oder Tiere sind, wird man daraus nicht folgern, daß Zoologie und Botanik aus den Naturwissenschaften verschwinden müssen. Genau so darf man wegen den Antinomien der Mengenlehre nicht verlangen, daß Mengenlehre und die mit ihr eng verknüpfte stetige Geometrie aus der Mathematik zu verjagen sind.

Und nun noch einen letzten Schritt! Nicht jeder Mensch treibt abstrakte Geometrie oder Arithmetik, nicht jeder befaßt sich mit abstrakter Logik. Und doch treibt jeder Mensch Axiomatik. Denn jeder normale Mensch spricht. Wie entsteht aber unsere Sprache? Zum vierten Mal hätte ich heute Abend das Rad der axiomatischen Methode zu drehen. Ich glaube, wir können uns diesmal die Einzelheiten ersparen. Auch unsere Sprache steht zwischen der Wirklichkeit und der reinen Logik. Auch unsere Worte entstehen durch Schematisierung und Abstraktion aus der Realität unserer Umwelt und unseres Geistes. Der Sinn dieser Worte kann in der Sphäre der reinen Logik durch irgendwelche Axiome nicht definiert werden, genau so, wie der Begriff der Geraden oder der Zahl. Der Sinn der Worte ist in Abhängigkeit von unserem Geist, ist daher nicht ein für allemal gegeben. Der Begriff „Element" z. B. rief beim griechischen Philosophen eine andere Vorstellung hervor als beim modernen Chemiker. Der Begriff „Geometrie" ist etwas anderes vor und nach der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien. Ist es da ein Wunder, daß alle neuen Ideen, die mit Hilfe der alten Worte ausgedrückt werden müssen, so schwer haben, durchzubrechen? Es ist eher ein Wunder, daß sie schließlich von den Mitmenschen doch verstanden werden. Unser Geist, in dem die Wurzeln unserer Sprache stecken, ist eben selbst auch stets im Werden. Wie geologische Schichten lagern sich darin übereinander die Geistesetappen der Menschheit. Jeder von uns trägt in sich die ganze Geisteskultur des vorhergehenden Menschengeschlechts. Jeder von uns ist gleichzeitig auch geistige Stütze der kommenden Generationen. Über die alten Schichten lagern sich immer wieder neue Schichten der Erkenntnis ab.

Und diese Erkenntnis? Die Grenze zwischen Empirisch und Rational, konkret und abstrakt ist durch unsere Untersuchung verwischt. Die abstrakte Wissenschaft braucht zu ihrem Aufbau das konkrete, die Beschreibung des Konkreten braucht das abstrakte Schema der Wissenschaft. Konkret und Abstrakt erscheinen nicht mehr als getrennte Gebiete, sondern als zwei Seiten derselben Realität. Jede Erkenntnis gestaltet sich durch die axiomatische Methode, durch das Hin- und Herwogen des Geistes zwischen den beiden Fähigkeiten. In jeder Erkenntnis ist somit ein Akt, der am klarsten und reinsten in der Bildung der mathematischen Schemata verwirklicht ist.

Damit komme ich zum Schluß. Was ergibt sich aus der ganzen Untersuchung speziell für die Mathematik? Gonseth fordert einen Verzicht, der vielleicht für viele Mathematiker von heute noch zu schwer sein wird: den Verzicht auf die absolute Wahrheit der Mathematik. Wer aber den Mut hat, diesen Verzicht zu leisten, dem eröffnet sich die ganze Welt des menschlichen Denkens. Im schönsten Sinne des Wortes wird ihm Mathematik zur Wissenschaft der Wissenschaften, die nicht nur dem begeisterten Fachmann, sondern jedem denkenden Menschen etwas zu sagen hat!

Anmerkung. Wegen weiterer Einzelheiten verweise ich auf den Vortrag von Herrn Prof. Gonseth an der Jahresversammlung in Thun (1932), sowie auf seine letzte Arbeit in den Com. Math. Helv. V, 108 (1933); hier wird die Begründung einer neuen Mengenlehre gegeben.