denn auch in der Literatur durchwegs obige Funktionen von drei Hauptgesichtspunkten aus betrachtet, nämlich:

1. in Form unendlicher Reihen,
2. durch ihre Differentialgleichung,
3. durch bestimmte Integrale,

wobei die Integraldarstellung meistens aus der Reihenentwicklung hergeleitet wird, da sich auf solchem Wege das bestimmte Integral in der Regel auf einfache Art bestimmen lässt.

Wir wollen nun auch in dieser Arbeit die Betrachtungen nach obigen drei Gesichtspunkten gruppieren und beginnen mit der Reihendarstellung.

I. Kapitel.

Die Reihendarstellung.

§ 1. Der Zusammenhang der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ mit der hypergeometrischen Reihe. Konvergenzkriterium.

Die Bessel'sche Funktion 1. Art wird definiert durch die Reihe*)

$$\overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+\lambda+1)} \tag{1}$$

Der Zusammenhang dieser Summe mit der hypergeometrischen Reihe

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\;1 \cdot 2} x^2 + \ldots\ldots \tag{2}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+\lambda-1)\,b(b+1)\ldots(b+\lambda-1)}{c(c+1)\ldots(c+\lambda-1)\;1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots \lambda} x$$

*) Graf & Gubler, Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen. Bern, 1898. Heft I, pag. 25.

ergibt sich wie folgt*):

Unter Berücksichtigung des Satzes, dass

$$\Gamma(a+\lambda+1) = \Gamma(a+1)\cdot(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+\lambda)$$

wird (1) zu

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,(a+1)(a+2)\ldots(a+\lambda)}$$

mit dem Grenzwert

$$\lim_{k=\infty} \frac{k(k+1)\ldots\ldots(k+\lambda-1)}{k^\lambda} \cdot \frac{k(k+1)\ldots\ldots(k+\lambda-1)}{k^\lambda} = 1$$

erweitert, erhält man

$$\overset{a}{J}(x) = \lim_{k=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{k(k+1)\ldots(k+\lambda-1)\,k(k+1)\ldots(k+\lambda-1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+\lambda)\quad \lambda!} \left(-\frac{x^2}{4k^2}\right)^\lambda$$

Die in dieser Gleichung erhaltene Summe ist nun nach (2) gleich der speziellen hypergeometrischen Reihe

$$F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

es wird daher

$$\text{(3)} \qquad \overset{a}{J}(x) = \lim_{k=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

Dieser Grenzwert tritt in der mathematischen Literatur zuerst bei P. A. Hansen**) auf. Es ergibt sich daraus sofort der Satz, dass sich die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ nur in Reihen, die nach steigenden Potenzen des Argumentes x laufen, entwickeln lässt. Eine Entwicklung nach steigenden Potenzen des Parameters a ist nicht möglich.

*) S. u. a. Jecklin, Diss. phil. Bern 1901.

**) Leipziger Abhandlungen, Bd. 2, 1852, pag. 252.

Dividiert man die Gleichung (3) durch

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)}$$

so erhält man durch Nullsetzen des Argumentes für sämtliche Parametergrössen die Beziehung:

$$\left|\frac{\Gamma(a+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^a}\cdot \overset{a}{J}(x)\right|_{x=0} = \lim_{\substack{k=\infty \\ x=0}} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right) = 1 \tag{4}$$

denn nach Gleichung (2) wird:

$$\left| F(a, b, c, x) \right|_{x=0} = 1$$

Die Beziehung (4) wird uns später bei der Bestimmung der Integrationskonstanten sehr gute Dienste leisten. Vorerst sei aber nach den Konvergenzbedingungen unserer speziellen F-Reihe gefragt.

Die hypergeometrische Reihe F (a, b, c, x) konvergiert nach den Untersuchungen von Gauss*) für sämtliche Argumente die kleiner sind als 1. Der Einheitskreis ist Konvergenzkreis, wir haben die Konvergenzbedingung

$$|x| < 1$$

Für die Reihe $\lim\limits_{k=\infty} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$

wird diese Bedingung zu

$$\lim_{k=\infty}\left|\frac{x^2}{4k^2}\right| < 1$$

d. h. es konvergiert unsere spezielle F-Reihe für jedes endliche x, der Konvergenzkreis schliesst das gesamte endliche Gebiet in sich ein. Die Funktion $\lim\limits_{k=\infty} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$ ist im Gegensatz zur Reihe F (a, b, c, x) im Endlichen nirgends mehr verzweigt und überall stetig. Da aber die Singularität im Punkte

*) Gauss: Ges. Werke III, 1866, pag. 125 ff,

$x = 1$ der Reihe F (a, b, c, x) für den betrachteten Spezialfall ins Unendliche fällt, so wird der unendlich ferne Punkt wegen des Zusammenfallens zweier Pole zur wesentlichen Singularität, von der schon Schläfli*) bemerkte, dass sie schwierigen Charakter trage. Es zeigt sich also, dass die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ für jedes endliche x konvergiert, was speziell das Verhalten der Funktion auf dem Konvergenzkreise anbetrifft, so kommt eine diesbezügliche Spezialisierung für den betrachteten Fall wegen des Faktors $\left(\frac{x}{2}\right)^a$ nicht in Frage.

Wenn schon die hypergeometrische Reihe F (a, b, c, x) nur innerhalb des Einheitskreises konvergiert, also zu einer allgemeinen Darstellung der Funktion, dieses Element F (a, b, c, x) einer analytischen Fortsetzung bedarf, fällt die Notwendigkeit einer solchen für die spezielle Reihe $\lim\limits_{k=\infty} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$ zum vorneherein dahin, da hier das ganze endliche Gebiet durch den Konvergenzkreis umschlossen wird. Rein formell lässt sich natürlich auch hier, entsprechend derjenigen von F (a, b, c, x), eine analytische Fortsetzung durchführen. Man erhält auf diese Art unbestimmte Symbole, die sich schwerlich in endliche Formen überführen lassen werden. Bei der allgemeinen Betrachtung der Differentialgleichung und deren Integrale wird darüber noch weiteres angeführt werden müssen.

Gleichung (3) liefert auch für alle endlichen Werte von a einen endlichen Funktionswert. Ist speziell a negativ ganzzahlig, so werden die Nullstellen der reziproken Gammafunktion durch das Unendlichwerden der F-Reihe gehoben, denn das unbestimmte Symbol, das für solche Werte von a entsteht, lässt sich leicht durch blosses Ausrechnen unter Berücksichtigung der Formel

$$a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

bestimmen.

Auf diese Art stösst man auch auf die bekannte Formel

$$\overset{-n}{J}(x) = (-1)^n \overset{n}{J}(x) \qquad n = \text{ganze Zahl.}$$

**) Schläfli, Math. Annalen, Bd. 3, pag. 136.

§ 2. Eigenschaften der Funktion $\overset{a}{J}(x)$.

Gauss*) hat in seinem Werke «Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \ldots .$» die hauptsächlichsten Eigenschaften der F-Reihe hergeleitet, aus denen man vermittelst der Formel (3) die rechnerischen Grundeigenschaften der Bessel'schen Funktion $\overset{a}{J}(x)$ leicht als Spezialfälle ermitteln kann.

So fand Gauss, dass

$$\frac{d\,F(a, b, c, x)}{d\,x} = \frac{a \cdot b}{c} \cdot F(a+1, b+1, c+1, x) \tag{5}$$

ist. Diese Formel auf Gleichung (3) angewendet ergibt:

$$\frac{d\,\overset{a}{J}(x)}{d\,x} = \lim_{k=\infty} \frac{d}{d\,x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right)$$

$$= \lim_{k=\infty} \left\{ \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a+1)} \cdot F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \cdot \frac{k^2}{(a+1)} \cdot \frac{x}{2\,k^2} \cdot F\left(k+1, k+1, a+2, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right\}$$

da nun $(a+1)\,\Gamma(a+1) = \Gamma(a+2)$

ist, wird

$$\frac{d\overset{a}{J}(x)}{d\,x} = \lim_{k=\infty} \left\{ \frac{a}{x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^a}{\Gamma(a+1)} \cdot F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+1}}{\Gamma(a+2)} \cdot F\left(k, k, a+2, -\frac{x^2}{4\,k^2}\right) \right\}$$

*) Werke, III, pag. 125 ff.

und nach (3) ergibt sich daraus

$$\text{I.}\qquad \frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = \frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) - \overset{a+1}{J}(x)$$

Hypergeometrische Reihen, deren drei Elemente a, b, c sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, nennt Gauss verwandte F-Funktionen. Irgend drei solche Funktionen sind stets durch eine lineare Relation von der Form

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 = 0$$

verbunden, wo A_1, A_2 und A_3 rationale Funktionen von x bedeuten.

Gauss hat sämtliche, durch obige Form möglichen Gleichungen berechnet und fand deren 15. Von diesen Gleichungen kommen zur Untersuchung der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ in erster Linie diejenigen in Betracht, bei denen das dritte Element, d. h. der Parameter a sich um ganze Zahlen verändert. Die diesem Fall entsprechende Gauss'sche Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} c\,\{c-1-(2c-a-b-1)x\}\,F(a,b,c,x)& \\ +(c-a)(c-b)\,x\,F(a,b,c+1,x)& \\ -c(c-1)(1-x)\,F(a,b,c-1,x) &= 0 \end{aligned}$$

Für $F(a, b, c, x)$: $\lim\limits_{k=\infty} F\left(k, k, a+1, -\frac{x^2}{4k^2}\right)$ gesetzt, ergibt

$$\lim_{k=\infty}\left\{(a+1)\left[a+[2(a-k)+1]\frac{x^2}{4k^2}\right]F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right.$$

$$-(a+1-k)^2\frac{x^2}{4k^2}F\left(k,k,a+2,-\frac{x^2}{4k^2}\right)-a(a+1)\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

$$\left.F\left(k,k,a,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right\} = 0$$

$$\lim_{k=\infty}\left\{a(a+1)F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^2F\left(k,k,a+2,-\frac{x^2}{4k^2}\right)-a(a+1)F\left(k,k,a,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right\}=0$$

multipliziert man diese Gleichung mit $\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a+2)}$

und berücksichtigt man, dass

$$a(a+1)\,\Gamma(a)=\Gamma(a+2)$$

so erhält man

$$\lim_{k=\infty}\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a)}F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+1}}{\Gamma(a+2)}F\left(k,k,a+2,-\frac{x^2}{4k^2}\right)-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}}{\Gamma(a)}F\left(k,k,a,-\frac{x^2}{4k^2}\right)\right\}=0$$

nun ist nach (3)

$$\overset{a}{J}(x)=\lim_{k=\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(a+1)}F\left(k,k,a+1,-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

daher wird die obige Gleichung zu

$$\frac{2a}{x}\overset{a}{J}(x)-\overset{a+1}{J}(x)-\overset{a-1}{J}(x)=0$$

oder

$$\text{II.}\qquad \overset{a-1}{J}(x)+\overset{a+1}{J}(x)=\frac{2a}{x}\overset{a}{J}(x)$$

nimmt man dazu die frühere Gleichung I

$$\text{I.}\qquad \frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}=\frac{a}{x}\overset{a}{J}(x)-\overset{a+1}{J}(x)$$

so erhält man durch Subtraktion (I — II)

$$\text{III.} \qquad \frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx} = -\frac{a}{x}\overset{a}{J}(x) + \overset{a-1}{J}(x)$$

durch Addition von I und III wird ferner

$$\text{IV.} \qquad \overset{a-1}{J}(x) - \overset{a+1}{J}(x) = 2\frac{d\overset{a}{J}(x)}{dx}$$

Dies sind die bekannten vier Funktionalgleichungen, durch die die Zylinderfunktionen meist definiert werden.*)

Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, dass mit Hilfe der Formel

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

die Funktion $\overset{a}{J}(x)$ für unendlich grosse Argumente geschätzt werden kann. Auch in den Kettenbruchentwicklungen lässt sich die Bessel'sche Funktion erster Art leicht als spezielle hypergeometrische Funktion erkennen.

II. Kapitel.

Die Differentialgleichung.

§ 3. Definitionsbemerkungen.

Im ersten Kapitel wurde auf ganz einfache Art die Bessel'sche Funktion $\overset{a}{J}(x)$ durch eine hypergeometrische Reihe dargestellt, worauf dann aus den allgemeinen Eigenschaften der letzteren die Bessel'sche Funktion als deren Spezialfall untersucht wurde. Vom theoretischen Standpunkte aus, wobei wir hauptsächlich an die in der Einleitung erwähnten Grunddefinitionen denken, bieten diese ersten Betrachtungen wenig, sie basieren auf einer einfachen Schlussweise, die uns über die eigentliche funktionentheoretische Beschaffenheit der Funktion wenig Auskunft gibt.

*) Nielsen: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904.