Einleitung

Franz Hartmann.

Der Zusammenhang der Bessel'schen Funktion $\overset{a}{J}(x)$ mit der hypergeometrischen Reihe.

Einleitung.

Felix Klein*) gruppiert in der höheren Analysis die hauptsächlich durch ihre Anwendung in der mathematischen Physik und Astronomie, bekannt und wichtig gewordenen Funktionen nach folgenden zwei Hauptkategorien:

1. in die der elliptischen Funktionen und ihren verschiedenen Verallgemeinerungen und Spezialfällen, wie z. B. die hyperelliptischen Funktionen und Integrale, die Abel'schen Funktionen, u. a. m.

2. in solche Funktionen

$$y = f(x)$$

die als Lösung linearer Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + M \frac{d y}{d x} + N y = 0 \tag{1}$$

definiert werden, wo M und N rationale Funktionen von x bedeuten. Hieher gehört hauptsächlich die hypergeometrische Funktion, nebst all ihren mannigfaltigen Spezialfunktionen wie z. B. die Kugel- und Zylinderfunktionen.

Die vorliegende Arbeit trachtet nun darnach die spezielle Zylinderfunktion $\overset{a}{J}(x)$, d. h. die Bessel'sche Funktion erster Art, vermittelst der allgemeinen hypergeometrischen Funktion darzustellen und zu untersuchen.

Vorerst verbleiben wir aber bei der ganz allgemeinen Definition der Funktionsarten, betrachten also die Differentialgleichung (1). Vom theoretischen Standpunkte können zur Integration hauptsächlich zwei Methoden angewendet werden, nämlich:

1. die Integration vermittelst unendlicher Reihen;
2. die Integration durch bestimmte Integrale.

*) F. Klein: Ueber die hypergeometrische Funktion. Leipzig 1906.

Integration linearer Differentialgleichungen durch unendliche Reihen.

Die Integration der Differentialgleichung (1) vermittelst unendlicher Reihen ist, rein formell betrachtet, eine sehr einfache. Nimmt man einen beliebigen Punkt a im Zahlenfelde an, der weder für M noch für N singulären Charakter trägt, so können in der Umgebung dieses Punktes die Funktionen M und N durch Potenzreihen dargestellt werden, die nach steigenden Potenzen von $(x - a)$ fortschreiten. Der Convergenzradius reicht dabei bis zu dem am nächsten bei a gelegenen singulären Punkte der Funktion.

Wir setzen also

$$M = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} A_\nu (x - a)^\nu; \qquad N = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} B_\nu (x - a)^\nu$$

in Gleichung (1) eingesetzt ergibt

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} A_\nu (x - a)^\nu \frac{d y}{d x} + \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} B_\nu (x - a)^\nu \cdot y = 0$$

Man suche nun diese Differentialgleichung durch unendliche Reihen zu integrieren. Zu diesem Zwecke wird angenommen, es existiere ein partikuläres Integral, das sich durch die Reihenentwicklung geben lässt:

$$(3) \qquad y = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} C_\nu (x - a)^\nu$$

Diese Entwicklung darf deshalb wieder um den Punkt a gewählt werden, weil das Integral der Differentialgleichung keine andern singulären Punkte enthalten kann als diejenigen der rationalen Funktionen M und N. Das Convergenzgebiet der Reihe (3) wird durch das gemeinsame Flächenstück der Entwicklungen um a in (2) dargestellt.

Indem man den für y vorausgesetzten Wert in der Differentialgleichung einsetzt, ergibt sich

$$(4) \quad \frac{d^2 \sum_0^\infty{}_\nu C_\nu (x-a)^\nu}{d x^2} + \sum_0^\infty{}_\nu A_\nu (x-a)^\nu \frac{d \sum_0^\infty{}_\nu C_\nu (x-a)^\nu}{d x} + \sum_0^\infty B_\nu (x-a)^\nu \cdot \sum_0^\infty C_\nu (x-a)^\nu = 0$$

Bezeichnet man abkürzungsweise:

$$\sum_0^\infty{}_\nu A_\nu (x-a)^\nu = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

$$\sum_0^\infty{}_\nu B_\nu (x-a)^\nu = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

$$\sum_0^\infty{}_\nu C_\nu (x-a)^\nu = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

und denkt man sich diese Werte in (4) substituiert und zudem die dritte Reihe in ihren Ableitungen ausgerechnet, so kann (3) nur dann der Differentialgleichung als partikuläres Integral genügen, wenn in (4) alle Summen der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x zu Null werden.

Durch Herausheben der einzelnen Entwicklungskoeffizienten erhält man:

$$|x^0| = 2 c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0$$

$$|x^1| = 2 \cdot 3 c_3 + 2 c_2 a_0 + c_1 a_1 + c_1 b_0 + c_0 b_1 = 0$$

$$|x^2| = \ldots \qquad \ldots. = 0$$

$$\ldots.. \qquad \ldots..$$

Gibt man nun den Konstanten c_0 und c_1 gewisse Anfangswerte, z. B. $c_0 = c_1 = 1$, so können sämtliche unbekannten Koeffizienten $c_2, c_3, \ldots c_n \ldots$ sukzessive bestimmt werden. Auf diese Art erhält man ein, durch eine unendliche Reihe dargestelltes, partikuläres Integral

$$(5) \qquad y = f(x)$$

der Differentialgleichung (1), das zwar vorläufig nur in einem beschränkten Teile des Zahlenfeldes Gültigkeit besitzt. Die Untersuchung über die Fortsetzungsmöglichkeit der Funktion wird uns aber allgemeinen Aufschluss geben.

Sind die Funktionen M und N der Differentialgleichung von einfacher Form, so lässt sich meistens diese hier ganz allgemein gegebene, allerdings nur formell durchgeführte Methode bedeutend vereinfachen. Wir erinnern an die Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung, wie sie Weber*) entwickelt, ferner an diejenige der Differentialgleichung der Kugelfunktion, wie sie u. a. auch Graf**) vornimmt, wo in beiden Fällen direkt der allgemeine Koeffizient der Reihenentwicklung bestimmt werden kann.

Integration durch bestimmte Integrale.

Währenddem die Integration der in ganz allgemeiner Form gegebenen Differentialgleichung (1) durch unendliche Reihen möglich war, ist dies nun keineswegs der Fall, wenn die Integration durch bestimmte Integrale durchgeführt werden soll.

Die allgemeinste lineare Differentialgleichung nter Ordnung, die bis heute auf direktem Wege durch bestimmte Integrale integriert wurde, ist die von Jordan***) aufgestellte, verallgemeinerte Gauss'sche Differentialgleichung von der Form:

$$(6) \qquad Q(x)\frac{d^n y}{dx^n} - (\xi - n)\,Q'(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \\ + \frac{(\xi - n)(\xi - n + 1)}{1 \cdot 2}\,Q''(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - + \dots \\ - R(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (\xi - n + 1)\,R'(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - + \dots\dots$$

*) Riemann-Weber: Differential-Gleichungen, Bd. 2 pag. 12.

**) J. H. Graf: Kugelfunktionen, Kollegienheft W. S. 16/17.

***) Jordan: Cours d'analyse III, pag. 241 ff.

wo ξ eine Konstante bedeutet und unter $Q(x)$ und $R(x)$ zwei Polynome verstanden werden. $Q(x)$ ist vom n^{ten} Grade, $R(x)$ vom Grade $\overline{\overline{<}}$ n.

Setzt man

$$y = \int_L U (u - x)^{\xi - 1} du \tag{7}$$

wo U durch die Bedingung bestimmt wird

$$R(u) U = \frac{d}{du} U Q(u)$$

also

$$U = \frac{1}{Q(u)} \cdot e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du}$$

so geht unter Berücksichtigung des Taylor'schen Satzes die Differentialgleichung (6) über in

$$\int_L d\, U Q(u) (u - x)^{\xi - n} = \int_L dV = 0 \tag{8}$$

Das Integral (8) ist nun gleich Null, d. h. der Differentialgleichung wird Genüge geleistet, falls der Weg L entweder eine geschlossene Integrationskurve ist, auf der V nach zurückgelegtem Wege seinen ursprünglichen, den Anfangswert wieder annimmt, oder falls L einen solchen Weg bedeutet, in dessen Anfangs- und Endpunkten V zu Null wird.

Der bekannteste Weg der ersten Art ist der nach Pochhammer*) so benannte Doppelumlauf, zu den letzteren sind hauptsächlich die gewöhnlichen geradlinigen Integrationswege zu zählen, sowie auch die Schleifenintegrale, d. h. offene Wege, die von einem gewissen Punkte, für welchen V zu Null wird, auslaufen und wieder in denselben zurückkehren.

Soll nun nach dem heutigen Stand der Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Gleichung (1) auf direktem Wege durch bestimmte Integrale integriert werden können, so müssen

*) Math. Annalen. Bd. 35.

die Funktionen M und N derart beschaffen sein, dass sich die Differentialgleichung in der Form geben lässt:

$$(9) \quad Q(x)\frac{d^2y}{dx^2} - (\xi - 2)\,Q'(x)\frac{dy}{dx} + \frac{(\xi-2)(\xi-1)}{1\cdot 2}\,Q''(x)\cdot y - R(x)\frac{dy}{dx} + (\xi - 1)\,R'(x)\cdot y = 0$$

wo $Q(x)$ ein Polynom zweiten Grades, also

$$Q(x) = (x-a)(x-b)$$

bedeutet, währenddem $R(x)$ vom ersten oder nullten Grade sein kann.

Wir betrachten vorerst den Fall, wo unter $R(x)$ ein Polynom ersten Grades zu verstehen ist, d. h. wir setzen

$$R(x) = x - c$$

dann wird

$$\frac{R(u)}{Q(u)} = \frac{u-c}{(u-a)(u-b)} = \frac{A}{(u-a)} + \frac{B}{(u-b)}$$

wo

$$A = \frac{a-c}{a-b}; \qquad B = \frac{c-b}{a-b}$$

und man bekommt

$$\int \frac{R(u)}{Q(u)}\,du = \int \frac{A}{u-a}\,du + \int \frac{B}{u-b}\,du = A\,\mathrm{Lg}(u-a) + B\,\mathrm{Lg}(u-b)$$

woraus folgt:

$$V = e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)}du}(u-x)^{\xi-n} = (u-a)^A\,(u-b)^B\,(u-x)^{\xi-2}$$

Dieser Integrand V verschwindet, die reellen Komponenten der Exponenten positiv vorausgesetzt, für die Werte

$$u = a \qquad u = b \qquad u = x$$

ferner für $\quad u = \pm\infty$

und zwar je nachdem

$$A + B + \xi - 2 \lesseqgtr 0$$

Da nun

$$U = \frac{1}{Q(u)} e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du} = (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1}$$

ist, erhält man als Lösung der Differentialgleichung (9) das Integral

$$(10) \qquad y = \int_g^h (u-a)^{A-1} (u-b)^{B-1} (u-x)^{\zeta-1} \, du^{*)}$$

wo für die Grenzen g und h zwei der Grössen a, b, x oder ∞ gewählt werden dürfen, vorausgesetzt, dass das Integral für die genannten Grenzwerte überhaupt einen Sinn hat. Sollte letzteres nicht zutreffen, d. h. kann die Variable nicht bis in die Endpunkte des Weges geführt werden, so sind freie Integrationswege heranzuziehen. Wie schon erwähnt, leisten hier die Doppelumlaufs- und Schleifenintegrale sehr gute Dienste.

Fallen im Integral (10) die beiden Werte a und b zusammen, so werden die Exponenten A und B unendlich gross, ihre Summe hingegen behält endlichen Charakter. Um diesen Fall näher zu untersuchen, setzen wir**)

$$\left.\begin{array}{c} b = a - \varepsilon \\ A = C - \dfrac{\alpha}{\varepsilon}; \quad B = \dfrac{\alpha}{\varepsilon} \end{array}\right\} \lim \varepsilon = 0$$

und es wird

$$(x-a)^{A-1} (x-b)^{B-1} = \lim_{\varepsilon = 0} (x-a)^{C-1-\frac{\alpha}{\varepsilon}} (x-a+\varepsilon)^{\frac{\alpha}{\varepsilon}-1}$$
$$= (x-a)^{C-2} e^{\frac{\alpha}{x-a}}$$

d. h. im Integral (10) fallen die singulären Punkte a und b in a zusammen, es wird a zu einem wesentlich singulären Punkte des Integranden. Die Variable kann nicht mehr um a herumgeführt werden, Doppelumläufe um den Punkt a verlieren deshalb jede Bedeutung, sie sind unmöglich; hingegen können Schleifen-

*) Dieses Integral wird von E. Picard in seinem Werke: Traité d'Analyse, Paris 1896, Tome III pag. 301, als hypergeometrisches Integral definiert.

**) s. u. a. auch Klein, hypergeometrische Funktion.

integrale hier erfolgreich benützt werden, da in gewissen Richtungen [Winkelräumen] die Variable bis an den wesentlich singulären Punkt geführt werden kann.*)

Bedeutet in der Differentialgleichung (9) R (x) ein Polynom nullten Grades, also eine Konstante, so folgt aus der Partialbruchzerlegung des Quotienten $\frac{R(u)}{Q(u)}$, dass in diesem Falle

$$A = -B$$

sein muss. Im übrigen lässt sich das Integral auf denselben Wegen herleiten wie oben.

Obschon, wie bereits erwähnt wurde, die Gleichung (9) die allgemeinste Form einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ist, die bis heute auf direkten Wegen durch bestimmte Integrale integriert werden konnte, bilden ihre Lösungen dennoch nur

*) In dieser Beziehung ist den Schleifenintegraldarstellungen entschieden den Vorzug zu geben, weil bei diesen der Grenzübergang ohne wesentliche Veränderung des Weges vorgenommen werden kann. Wir erinnern hier nur an den Grenzübergang von der Binet'schen Funktion zur Gammafunktion, wie ihn Graf**) vollzieht. Es wird dort das Binet'sche Integral resp. das Euler'sche Integral erster Art, zweite Form durch das Schleifenintegral

$$\frac{1}{2\,i \sin a\,\pi} \int_{-1} x^{a-1} (1+x)^n \, d\,x$$

gegeben, woraus sich ohne Schwierigkeiten das Integral für die Gammafunktion durch Vollziehung des bekannten Grenzüberganges ergibt, nämlich

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i \sin a\,\pi} \int_{-N} e^x \cdot x^{a-1} \, d\,x$$

Würde man das Binet'sche Integral durch einen Doppelumlauf darstellen, wie dies bis heute meistens der Fall war, so liesse sich der Grenzübergang nicht durchführen ohne nicht langwierige Wegtransformationen vornehmen zu müssen, die schliesslich zu einer Umwandlung des Doppelumlaufes in eine einzige Schleife führen dürften.

**) J. H. Graf. Einleitung in die Theorie der Gammafunktion. Bern 1894.

einen kleinen Teil der in der Analysis bekannten Integrale, die einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung als Lösung genügen. Bei letzteren wurde aber umgekehrt verfahren, indem vom bestimmten Integrale ausgehend, die Differentialgleichung gesucht wurde. Auf diesem Gebiete haben u. a. hauptsächlich E. Goursat,*) J. H. Graf,**) P. A. Nekrassoff***) und Pochhammer****) gearbeitet. Nekrassoff hat direkt eine allgemeine Methode angegeben, mit der sich die Differentialgleichungen bestimmen lassen, deren Lösungen in Form bestimmter Integrale gegeben sind.

Beiläufig sei hier bemerkt, dass z. B. sämtliche Integrale von der Form

$$y = f(x) \int (u-a)^{\alpha} (u-b)^{\beta} (u-x)^{\xi - 1} du$$

wo unter f (x) eine beliebige Funktion von x zu verstehen ist, einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung als Lösung genügen, wie leicht durch einfache Koeffizientenvergleichung mit Hülfe der Gleichung (9) gezeigt werden kann. Je nach der Beschaffenheit der Funktion f (x) nimmt die ihr entsprechende Differentialgleichung andere Formen an. Die Koeffizienten M und N der allgemeinen Gleichung (1) weisen aber, insofern wir sie untersucht haben, die nötige Gesetzesmässigkeit nicht auf, als dass es möglich wäre, die Gleichungen auf direkten Wegen durch bestimmte Integrale integrieren zu können.

Aus diesen ganz allgemein gefassten Betrachtungen über die Integrationsmethoden der unserer Funktionenkategorie als Definition zu Grunde gelegten Differentialgleichung (1) wurde ersichtlich, dass die meisten hieher gehörenden Funktionen auf relativ einfache Art durch unendliche Reihen, sowie auch durch bestimmte Integrale dargestellt werden können. So findet man

---

*) Goursat, Acta Mathematica, Bd. 2.

**) Graf, Math. Annalen, Bd. 45.

***) Nekrassoff, Math. Annalen, Bd. 38.

****) Pochhammer, Math. Annalen, Bd. 38.

denn auch in der Literatur durchwegs obige Funktionen von drei Hauptgesichtspunkten aus betrachtet, nämlich:

1. in Form unendlicher Reihen,
2. durch ihre Differentialgleichung,
3. durch bestimmte Integrale,

wobei die Integraldarstellung meistens aus der Reihenentwicklung hergeleitet wird, da sich auf solchem Wege das bestimmte Integral in der Regel auf einfache Art bestimmen lässt.

Wir wollen nun auch in dieser Arbeit die Betrachtungen nach obigen drei Gesichtspunkten gruppieren und beginnen mit der Reihendarstellung.

I. Kapitel.

Die Reihendarstellung.

§ 1. Der Zusammenhang der Funktion $\overset{a}{J}(x)$ mit der hypergeometrischen Reihe. Konvergenzkriterium.

Die Bessel'sche Funktion 1. Art wird definiert durch die Reihe*)

$$(1) \qquad \overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\lambda!\, \Gamma(a+\lambda+1)}$$

Der Zusammenhang dieser Summe mit der hypergeometrischen Reihe

$$(2) \quad F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} x + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{c(c+1)\; 1 \cdot 2} x^2 + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+\lambda-1)\, b(b+1)\ldots(b+\lambda-1)}{c(c+1)\ldots(c+\lambda-1)\; 1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda} x$$

*) Graf & Gubler, Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen. Bern, 1898. Heft I, pag. 25.