Ueber die einem Dreieck eingeschriebenen Kreise

J. Neuberg (Lüttich).

Ueber die einem Dreieck eingeschriebenen Kreise.

Die Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1907, enthalten einen Artikel von Dr. O. Schenker mit der Ueberschrift Neun Kreisscharen am Dreieck. Da diese Abhandlung nicht die genügende Beachtung gefunden hat, sei es mir erlaubt durch eine neue Bearbeitung desselben Gegenstandes zur Kenntnis der interessanten Schenker'schen Sätze beizutragen.

Bezeichnungen und bekannte Beziehungen.

a, b, c, A, B, C, die Seiten und Winkel des Grunddreiecks ABC.

(O, R), (I, r), (I_1, r_1), (I_2, r_2), (I_3, r_3), bezw. das Zentrum und der Radius des Umkreises, des Inkreises und der drei Ankreise.

(D, E, F), (D_1, E_1, F_1), (D_2, E_2, F_2), (D_3, E_3, F_3), bezw. die Berührungspunkte der Seiten BC, CA, AB mit den Kreisen I, I_1, I_2, I_3.

P, Q, die Schnittpunkte des Umkreises mit der inneren und der äusseren Halbierenden des Winkels A; sie sind die Endpunkte des in der Mitte M der Seite BC senkrechten Durchmessers. Bekanntlich ist P die Mitte der Strecke II_1, und Q die Mitte der Strecke $I_2 I_3$.

Ich bringe in Erinnerung die Beziehungen

$$a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,\quad c = 2R\sin C,$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad r_1 = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},\ \text{usw.}$$

$$MD = MD_1 = \frac{DD_1}{2} = \frac{b-c}{2},\quad MD_2 = MD_3 = \frac{D_2D_3}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Fällt man aus P und Q auf die Seite CA die Lote PP' und QQ', so hat man

$$P'E = P'E_1 = \frac{EE_1}{2} = \frac{a}{2},\quad Q'E_2 = Q'E_3 = \frac{E_2E_3}{2} = \frac{a}{2},$$

$$PE = PE_1 = PF = PF_1,\quad QE_2 = QE_3 = QF_2 = QF_3.$$

Die Erklärungen setzen voraus, dass $a > b > c$ und $A < 90^0$; jedoch sind die zu beweisenden Sätze allgemein.

1. Satz. Der Kreis U mit Q zum Zentrum durch die Punkte D und D_1, und der Kreis V mit P zum Zentrum durch die Punkte E, F, E_1, F_1 gezogen schneiden sich im Umkreis O.

Beweis. Für die Radien ϱ und ϱ' der Kreise U und V hat man

$$\varrho^2 = \overline{QM}^2 + \overline{MD}^2 = (QO + OM)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$
$$= R^2(1+\cos A)^2 + R^2(\sin B - \sin C)^2$$
$$= 4R^2\left[\cos^4\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B-C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\right],$$

$$\varrho'^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{EP'}^2 = \left(\frac{r+r_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= 4R^2\left[\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B-C}{2} + \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\right].$$

Hieraus folgt

$$\varrho^2 + \varrho'^2 = 4R^2\left[\cos^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \sin^2\frac{A}{2}\left(\sin^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2}\right)\right] = 4R^2 = \overline{PQ}^2,$$

und der Satz ist bewiesen.

Die gemeinsame Sehne der Kreise U und V. Der Treffpunkt Z dieser Sehne mit der Zentrale PQ genügt der Gleichung

$$\varrho^2 - \overline{ZQ}^2 = \varrho'^2 - \overline{ZP}^2,$$

die nach Substitution der obigen Werte von ϱ^2 und ϱ'^2 und ferner nach Entwicklung von $\cos(B-C)$ und $\cos(B+C)$ gibt:

$$(ZP + ZQ)(ZP - ZQ) = 4R^2 \left[\sin^2 \frac{A}{2} \cos(B - C) + \cos^2 \frac{A}{2} \cos(B + C)\right]$$
$$= 4 R^2 (\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos A). \qquad (1)$$

Das erste Glied von (1) ist gleich $2R.\ 2ZO$; mithin hat man

$$ZM = ZO + OM = ZO + R \cos A$$
$$= R(\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos A + \cos A)$$
$$= R \sin B \sin C (1 - \cos A) = AH \sin^2 \frac{A}{2},$$

wo AH die Höhe des Dreiecks ABC ist. Dieses Resultat bestätigt folgende von Dr. Schenker gefundene Konstruktion der gemeinsamen Sehne: Man ziehe PH und AQ und verbinde ihren Schnittpunkt S mit M; so erhält man den Treffpunkt L der Sehne mit der Höhe AH. Man hat nämlich

$$\frac{LH}{MP} = \frac{AH}{QP}, \text{ und } MP = OP - OM = R(1 - \cos A) = 2R \sin^2 \frac{A}{2}$$

daher $LH = ZM$.

2. Satz. Der Kreis U_1 aus P durch die Punkte D_2 und D_3, und der Kreis V_1 aus Q durch die Punkte E_2, E_3, F_2 und F_3 gezogen schneiden sich im Umkreis O.

Beweis. Bezeichnet man die Radien der Kreise U_1 und V_1 mit ϱ_1 und ϱ'_1, so findet man

$$\varrho_1^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MD_2}^2 = (PO - OM)^2 + \left(\frac{b + c}{2}\right)^2$$
$$= R^2 (1 - \cos A)^2 + R^2 (\sin B + \sin C)^2$$
$$= 4R^2 \left(\sin^4 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B - C}{2}\right)$$

$$\varrho'^2_1 = \overline{QQ'}^2 + \overline{Q'E_2}^2 = \left(\frac{r_b - r_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= 4R^2 \left(\cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B - C}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}\right);$$

hieraus folgt $\varrho_1^2 + \varrho'^2_1 = 4R^2 = \overline{PQ}^2$, was den Satz beweist.

Die gemeinsame Sehne der Kreise U_1 und V_1. Es sei Z' der Schnittpunkt dieser Geraden und der Zentrale PQ. Die Substitution der obigen Ausdrücke von ϱ_1 und ϱ'_1 in die Relation $\varrho_1^2 - \overline{PZ'}^2 = \varrho'^2_1 - \overline{QZ'}^2$ gibt

$$(PZ' + QZ')(PZ' - QZ') = 4R^2 \left[\cos^2\frac{A}{2}\cos(B-C) + \sin^2\frac{A}{2}\cos(B+C)\right]$$
$$= 4R^2(\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A). \qquad (2)$$

Das erste Glied von (2) ist gleich $2R \cdot 2OZ'$, und da $MZ' = MO + OZ'$, kann man schreiben

$$MZ' = R\left[\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A - \cos(B+C)\right]$$
$$= R \sin B \sin C (1 + \cos A) = AH \cos^2\frac{A}{2}.$$

Um daher den Teilpunkt L' auf der Höhe AH zu bestimmen ziehe man QH und AP und verbinde deren Schnittpunkt S' mit M; denn aus den Relationen

$$\frac{L'H}{MQ} = \frac{AH}{PQ}, \quad MQ = MO + OQ = R(\cos A + 1) = 2R\cos^2\frac{A}{2}$$

folgt $L'H = Z'M$.

3. Satz. Man verlängert die Geraden DI, EI, FI über I hinaus um

$$ID' = IE' = IF' = PQ = 2R.$$

Der Kreis U_2 aus P durch die Punkte E' und F', und der Kreis V_2 aus Q durch den Punkt D' gelegt schneiden sich im Umkreis O.

Beweis. Es seien ϱ_2 und ϱ'_2 die Radien der Kreise U, und V_2. Da die Geraden ID' und PQ gleich und parallel sind, ist $\varrho'_2 = PI$. Nennt man B' den Gegenpunkt von B auf der Kreislinie O, so sind die Dreiecke PIE', PIF', PBB' kongruent; denn

$$IE' = IF' = BB', \quad PI = PB,$$

$$\text{Winkel } PBB' = PBC + MBO = \frac{A}{2} + 90^\circ - A = 90^\circ - \frac{A}{2}$$
$$= PIE' = PIF'.$$

Hieraus folgt, dass Winkel $IPE' = IPF' = 90^{\circ}$ und $\varrho_2^2 + \varrho'^2_2 = 4R^2 = \overline{PQ}^2$. Der Satz ist somit bewiesen. Auch sieht man dass die drei Punkte E', P, F' auf derselben Parallelen zu $I_2 I_3$ liegen.

Die gemeinsame Sehne der Kreise U_2 und V_2. Ist Z'' der Schnittpnnkt dieser Sehne mit der Zentrale PQ, so hat man $\overline{PZ''}^2 - \varrho_2^2 = \overline{QZ''}^2 - \varrho'^2_2$; nun gibt das rechtwinklige Dreieck PIE': $\varrho'_2 = 2R\sin\frac{A}{2}$, $\varrho_2 = 2R\cos\frac{A}{2}$, und folglich

$$\overline{PZ''}^2 - \overline{QZ''}^2 = \varrho_2^2 - \varrho'^2_2 = 4R^2 \cos A.$$

So findet man: $OZ'' = R\cos A = MO$. Man drehe also die Seite BC im Umkreis O um 180°, so fällt sie mit der gemeinsamen Sehne zusammen.

Definition der Kreise U_2 und V_2 vermittelst des Ankreises I_1. Da das Viereck $IE'I_1F'$ ein Rhombus ist, kann man die Punkte E' und F' bestimmen, indem man auf die Berührungsradien I_1F_1 und I_1E_1 des Ankreises I_1 vom Mittelpunkte ab die Länge 2 R abträgt. Nimmt man auch auf dem Berührungsradius I_1D_1 die Länge $ID'_1 = 2R$, so ist $QD'_1 = QD'$, und der Kreis V_2 geht durch den Punkt D'_1.

Definition der Kreise U_2 und V_2 vermittelst der Ankreise I_2 und I_3. Die Punkte E' und F' projizieren sich auf BC in D_3 und D_2; denn $PE' = 2R\cos\frac{A}{2}$ und Winkel $(PE', MD_3) = \frac{B-C}{2}$, also ist die Projektion von PE' auf $BC = 2R \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$ und man hat auch $MD_3 = \frac{b+c}{2} = R(\sin B + \sin C) = 2R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$. Folglich erhält man die Punkte E' und F', indem man auf die Berührungsradien I_3D_3 und I_2D_2 die Länge QP abträgt.

Die zu I_2I_3 senkrechte Gerade $D'QD'_1$ treffe die Berührungsradien I_2E_2, I_3E_3 in den Punkten T, T'. Man hat oben gezeigt, dass $QI_2 = QI_3 = PE'$; auch sind die Winkel QI_2T, QI_3T', PIE' einander gleich (parallele Seiten). Daher schliesst man

$$I_2T = I_3T' = IE' = 2R, \quad QT = QT' = PI,$$

und dass die Punkte T und T' mit D'_1 und D' zusammen fallen.

NB. Es sei gestattet auf eine Verallgemeinerung hinzuweisen, deren die bewiesenen Sätze fähig sind. Dieselbe ergibt sich, wenn man die Berührungsradien des Inkreises, bezw. eines Ankreises in gleichem Verhältnis vergrössert oder verkleinert. An Stelle des Umkreises O tritt dann ein damit konzentrischer Kreis.

Dr. O. Schenker.

Eingegangen am 3. Oktober 1919.