

# Ueber die einem Dreieck eingeschriebenen Kreise

Autor(en): **Neuberg, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1919)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-319273>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

J. Neuberg (Lüttich).

## Ueber die einem Dreieck eingeschriebenen Kreise.

Die Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1907, enthalten einen Artikel von Dr. O. Schenker mit der Ueberschrift Neun Kreisscharen am Dreieck. Da diese Abhandlung nicht die genügende Beachtung gefunden hat, sei es mir erlaubt durch eine neue Bearbeitung desselben Gegenstandes zur Kenntnis der interessanten Schenker'schen Sätze beizutragen.

### Bezeichnungen und bekannte Beziehungen.

$a, b, c, A, B, C$ , die Seiten und Winkel des Grunddreiecks  $ABC$ .

$(O, R), (I, r), (I_1, r_1), (I_2, r_2), (I_3, r_3)$ , bzw. das Zentrum und der Radius des Umkreises, des Inkreises und der drei Ankreise.

$(D, E, F), (D_1, E_1, F_1), (D_2, E_2, F_2), (D_3, E_3, F_3)$ , bzw. die Berührungspunkte der Seiten  $BC, CA, AB$  mit den Kreisen  $I, I_1, I_2, I_3$ .

$P, Q$ , die Schnittpunkte des Umkreises mit der inneren und der äusseren Halbierenden des Winkels  $A$ ; sie sind die Endpunkte des in der Mitte  $M$  der Seite  $BC$  senkrechten Durchmessers. Bekanntlich ist  $P$  die Mitte der Strecke  $II_1$ , und  $Q$  die Mitte der Strecke  $I_2I_3$ .

Ich bringe in Erinnerung die Beziehungen

$$a = 2 R \sin A, \quad b = 2 R \sin B, \quad c = 2 R \sin C,$$

$$r = 4 R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad r_1 = 4 R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ usw.}$$

$$MD = MD_1 = \frac{DD_1}{2} = \frac{b-c}{2}, \quad MD_2 = MD_3 = \frac{D_2D_3}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Fällt man aus P und Q auf die Seite CA die Lote PP<sub>1</sub> und QQ', so hat man

$$P'E = P'E_1 = \frac{E E_1}{2} = \frac{a}{2}, \quad Q'E_2 = Q'E_3 = \frac{E_2 E_3}{2} = \frac{a}{2},$$

$$PE = PE_1 = PF = PF_1, \quad QE_2 = QE_3 = QF_2 = QF_3.$$

Die Erklärungen setzen voraus, dass  $a > b > c$  und  $A < 90^\circ$ ; jedoch sind die zu beweisenden Sätze allgemein.

1. Satz. Der Kreis U mit Q zum Zentrum durch die Punkte D und D<sub>1</sub>, und der Kreis V mit P zum Zentrum durch die Punkte E, F, E<sub>1</sub>, F<sub>1</sub> gezogen schneiden sich im Umkreis O.

Beweis. Für die Radien  $\rho$  und  $\rho'$  der Kreise U und V hat man

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \overline{QM}^2 + \overline{MD}^2 = (\overline{QO} + \overline{OM})^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \\ &= R^2 (1 + \cos A)^2 + R^2 (\sin B - \sin C)^2 \\ &= 4 R^2 \left[ \cos^4 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B-C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \right], \\ \rho'^2 &= \overline{PP'}^2 + \overline{EP'}^2 = \left(\frac{r+r_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= 4 R^2 \left[ \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \right]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho'^2 &= 4 R^2 \left[ \cos^2 \frac{A}{2} \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \right) \right. \\ &\left. + \sin^2 \frac{A}{2} \left( \sin^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} \right) \right] = 4 R^2 = \overline{PQ}^2, \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen.

Die gemeinsame Sehne der Kreise U und V. Der Treffpunkt Z dieser Sehne mit der Zentrale PQ genügt der Gleichung

$$\rho^2 - \overline{ZQ}^2 = \rho'^2 - \overline{ZP}^2,$$

die nach Substitution der obigen Werte von  $\rho^2$  und  $\rho'^2$  und ferner nach Entwicklung von  $\cos(B-C)$  und  $\cos(B+C)$  gibt:

$$\begin{aligned}
 (ZP + ZQ)(ZP - ZQ) &= 4R^2 \left[ \sin^2 \frac{A}{2} \cos(B - C) \right. \\
 &\quad \left. + \cos^2 \frac{A}{2} \cos(B + C) \right] \\
 &= 4R^2(\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos A). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Das erste Glied von (1) ist gleich  $2R \cdot 2ZO$ ; mithin hat man

$$\begin{aligned}
 ZM &= ZO + OM = ZO + R \cos A \\
 &= R(\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos A + \cos A) \\
 &= R \sin B \sin C (1 - \cos A) = AH \sin^2 \frac{A}{2},
 \end{aligned}$$

wo  $AH$  die Höhe des Dreiecks  $ABC$  ist. Dieses Resultat bestätigt folgende von Dr. Schenker gefundene Konstruktion der gemeinsamen Sehne: Man ziehe  $PH$  und  $AQ$  und verbinde ihren Schnittpunkt  $S$  mit  $M$ ; so erhält man den Treffpunkt  $L$  der Sehne mit der Höhe  $AH$ . Man hat nämlich

$$\frac{LH}{MP} = \frac{AH}{QP}, \text{ und } MP = OP - OM = R(1 - \cos A) = 2R \sin^2 \frac{A}{2}$$

daher  $LH = ZM$ .

2. Satz. Der Kreis  $U_1$  aus  $P$  durch die Punkte  $D_2$  und  $D_3$ , und der Kreis  $V_1$  aus  $Q$  durch die Punkte  $E_2, E_3, F_2$  und  $F_3$  gezogen schneiden sich im Umkreis  $O$ .

Beweis. Bezeichnet man die Radien der Kreise  $U_1$  und  $V_1$  mit  $e_1$  und  $e'_1$ , so findet man

$$\begin{aligned}
 e_1^2 &= \overline{PM}^2 + \overline{MD}_2^2 = (PO - OM)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \\
 &= R^2(1 - \cos A)^2 + R^2(\sin B + \sin C)^2 \\
 &= 4R^2 \left( \sin^4 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2} \right) \\
 e'_1{}^2 &= \overline{QQ'}^2 + \overline{Q'E}_2^2 = \left(\frac{r_b - r_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
 &= 4R^2 \left( \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B-C}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \right);
 \end{aligned}$$

hieraus folgt  $e_1^2 + e'_1{}^2 = 4R^2 = \overline{PQ}^2$ , was den Satz beweist.

Die gemeinsame Sehne der Kreise  $U_1$  und  $V_1$ . Es sei  $Z'$  der Schnittpunkt dieser Geraden und der Centrale  $PQ$ . Die Substitution der obigen Ausdrücke von  $\varrho_1$  und  $\varrho'_1$  in die Relation  $\varrho_1^2 - \overline{PZ'}^2 = \varrho'_1{}^2 - \overline{QZ'}^2$  gibt

$$\begin{aligned} (PZ' + QZ')(PZ' - QZ') &= 4R^2 \left[ \cos^2 \frac{A}{2} \cos(B - C) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \frac{A}{2} \cos(B + C) \right] \\ &= 4R^2 (\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A). \end{aligned} \quad (2)$$

Das erste Glied von (2) ist gleich  $2R \cdot 2OZ'$ , und da  $MZ' = MO + OZ'$ , kann man schreiben

$$\begin{aligned} MZ' &= R [\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A - \cos(B + C)] \\ &= R \sin B \sin C (1 + \cos A) = AH \cos^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Um daher den Teilpunkt  $L'$  auf der Höhe  $AH$  zu bestimmen ziehe man  $QH$  und  $AP$  und verbinde deren Schnittpunkt  $S'$  mit  $M$ ; denn aus den Relationen

$$\frac{L'H}{MQ} = \frac{AH}{PQ}, \quad MQ = MO + OQ = R(\cos A + 1) = 2R \cos^2 \frac{A}{2}$$

folgt  $L'H = Z'M$ .

3. Satz. Man verlängert die Geraden  $DI$ ,  $EI$ ,  $FI$  über  $I$  hinaus um

$$ID' = IE' = IF' = PQ = 2R.$$

Der Kreis  $U_2$  aus  $P$  durch die Punkte  $E'$  und  $F'$ , und der Kreis  $V_2$  aus  $Q$  durch den Punkt  $D'$  gelegt schneiden sich im Umkreis  $O$ .

Beweis. Es seien  $\varrho_2$  und  $\varrho'_2$  die Radien der Kreise  $U_2$  und  $V_2$ . Da die Geraden  $ID'$  und  $PQ$  gleich und parallel sind, ist  $\varrho'_2 = PI$ . Nennt man  $B'$  den Gegenpunkt von  $B$  auf der Kreislinie  $O$ , so sind die Dreiecke  $PIE'$ ,  $PIF'$ ,  $PBB'$  kongruent; denn

$$IE' = IF' = BB', \quad PI = PB,$$

$$\begin{aligned} \text{Winkel } PBB' &= PBC + MBO = \frac{A}{2} + 90^\circ - A = 90^\circ - \frac{A}{2} \\ &= PIE' = PIF'. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass Winkel  $\text{IPE}' = \text{IPF}' = 90^\circ$  und  $e_2^2 + e'_2{}^2 = 4R^2 = \overline{PQ}^2$ . Der Satz ist somit bewiesen. Auch sieht man dass die drei Punkte  $E'$ ,  $P$ ,  $F'$  auf derselben Parallelen zu  $I_2I_3$  liegen.

Die gemeinsame Sehne der Kreise  $U_2$  und  $V_2$ . Ist  $Z''$  der Schnittpunkt dieser Sehne mit der Zentrale  $PQ$ , so hat man  $\overline{PZ''}^2 - e_2^2 = \overline{QZ''}^2 - e'_2{}^2$ ; nun gibt das rechtwinklige Dreieck  $\text{PIE}'$ :  $e'_2 = 2R \sin \frac{A}{2}$ ,  $e_2 = 2R \cos \frac{A}{2}$ , und folglich

$$\overline{PZ''}^2 - \overline{QZ''}^2 = e_2^2 - e'_2{}^2 = 4R^2 \cos A.$$

So findet man:  $OZ'' = R \cos A = MO$ . Man drehe also die Seite  $BC$  im Umkreis  $O$  um  $180^\circ$ , so fällt sie mit der gemeinsamen Sehne zusammen.

Definition der Kreise  $U_2$  und  $V_2$  vermitteltst des Ankreises  $I_1$ . Da das Viereck  $\text{IE}'I_1F'$  ein Rhombus ist, kann man die Punkte  $E'$  und  $F'$  bestimmen, indem man auf die Berührungsradien  $I_1F_1$  und  $I_1E_1$  des Ankreises  $I_1$  vom Mittelpunkte ab die Länge  $2R$  abträgt. Nimmt man auch auf dem Berührungsradius  $I_1D_1$  die Länge  $ID'_1 = 2R$ , so ist  $QD'_1 = QD'$ , und der Kreis  $V_2$  geht durch den Punkt  $D'_1$ .

Definition der Kreise  $U_2$  und  $V_2$  vermitteltst der Ankreise  $I_2$  und  $I_3$ . Die Punkte  $E'$  und  $F'$  projizieren sich auf  $BC$  in  $D_3$  und  $D_2$ ; denn  $PE' = 2R \cos \frac{A}{2}$  und Winkel  $(PE',$

$MD_3) = \frac{B - C}{2}$ , also ist die Projektion von  $PE'$  auf  $BC = 2R$

$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2}$  und man hat auch  $MD_3 = \frac{b + c}{2} = R (\sin B$

$+ \sin C) = 2R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2}$ . Folglich erhält man die Punkte

$E'$  und  $F'$ , indem man auf die Berührungsradien  $I_3D_3$  und  $I_2D_2$  die Länge  $QP$  abträgt.

Die zu  $I_2I_3$  senkrechte Gerade  $D'QD'_1$  treffe die Berührungsradien  $I_2E_2$ ,  $I_3E_3$  in den Punkten  $T$ ,  $T'$ . Man hat oben gezeigt,

(6) J. Neuberg. Ueber die einem Dreieck eingeschriebenen Kreise. 209

dass  $QI_2 = QI_3 = PE'$ ; auch sind die Winkel  $QI_2T$ ,  $QI_3T'$ ,  $PIE'$  einander gleich (parallele Seiten). Daher schliesst man

$$I_2T = I_3T' = IE' = 2R, QT = QT' = PI,$$

und dass die Punkte T und T' mit  $D'_1$  und D' zusammen fallen.

---

NB. Es sei gestattet auf eine Verallgemeinerung hinzuweisen, deren die bewiesenen Sätze fähig sind. Dieselbe ergibt sich, wenn man die Berührungsradien des Inkreises, bezw. eines Ankreises in gleichem Verhältnis vergrössert oder verkleinert. An Stelle des Umkreises O tritt dann ein damit konzentrischer Kreis.

Dr. O. Schenker.

---

Eingegangen am 3. Oktober 1919.