Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1917)

Artikel: Die Euklidische Geometrie
Autor: Huber, Theodor
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-571160

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Theodor Huber.

Die Euklidische Geometrie.

Die Form des nachstehenden mathematischen Aufsatzes weicht vom Gewohnten etwas ab. Der Grund hiefür erklärt sich aus der Art seiner Entstehung. Die hier zusammengefassten Gedanken haben sich im Verlauf der letzten Zeit dem Verf. in zwangloser Weise ergeben. Sollen die neueren Bestrebungen von Prof. D. Hilbert, Prof. E. Mach, die Nichteuklidische Geometrie usw. in ihrem Wesen verstanden werden, so ergibt sich das Bedürfnis, wenigstens zeitweilig einen Standpunkt einzunehmen, der ausserhalb des eigentlichen mathematischen Denkens liegt. Durch den freieren Ueberblick wird eine tiefergehende Beurteilung möglich. Aus dem Suchen nach solchen Gesichtspunkten sind die nachfolgenden Gedanken entsprungen. Es darf beigefügt werden, dass der Verf. nicht danach strebt, in erster Linie sich ein abschliessendes Urteil über irgend eine Sache zu bilden. Bei der grossen Tragweite gewisser Fragen möchte er eher, dem Beispiel Goethes folgend, darüber sich freuen, wenn es ihm gelingt, ein Problem in einem neuen Lichte zu sehen; auch dann, wenn dadurch dessen Lösung in die Ferne gerückt erscheint. Er glaubt, auch so der Wissenschaft dienen zu können. Unbefangene, allseitige Betrachtung einer wissenschaftlichen Frage wird stets, auch da, wo auf rasche Beförderung ihrer Auflösung wenig Aufmerksamkeit verwendet wird, die Lösung reicher gestalten. Es scheint ihm daher die wirklich sachgemässe Behandlung eines Problems wertvoller zu sein, als das Streben nach Eleganz der Beweisführungen und Resultate. — Die sich anschliessende Arbeit stellt einen in diesem Sinne unternommenen Versuch dar.

Beim Durchgehen von Euklids „Elementen“ wird man nicht umhin können, das Gleichmass, den hellen Geist und die innere Ruhe dieses Werkes zu bewundern, und es mag der Versuch nicht unberechtigt sein, seine Gliederung und den Bau zurückzuführen auf die Euklidische Denk- und Vorstellungsweise.

Zur Zeit des Euklid und lange vorher waren mathematische Kenntnisse weit verbreitet. Sie bildeten einen wertvollen Bestandteil der Kultur und vielerorts auch der Religionen. Viele der schon früher bekannten geometrischen Tatsachen treten naturgemäss bei Euklid wieder zu Tage. Doch gewinnen sie neues Interesse durch den Zusammenhang, in den sie hier gestellt sind.

In den „Elementen“ erscheint die Mathematik frei von äusseren Einwirkungen jeder Art. Sie ist hier losgelöst von jeder andern Richtung der menschlichen Geistestätigkeit. Das geometrische Denken wird nicht mehr umschlossen von den umfassenderen Gedanken der Religion oder der Philosophie. Nur den eigenen, inneren Gesetzen folgt die Geometrie des Euklid; erst hier ist die Idee der eigentlichen Geometrie verwirklicht. Das hängt damit zusammen, dass Euklid den in so verschiedener Weise sich auswirkenden geometrischen Gesetzen um ihrer selbst willen Interesse entgegenzubringen vermag. In ihnen findet er alles, wohin ihn sein Denken drängt. Nach jeder Seite hin wird sein Denken durch die geometrischen Vorstellungen in Anspruch genommen. Und dies ist leicht zu verstehen. Er kann nicht Halt machen beim blossen Hinschauen auf seine Vorstellungen, sondern er muss seine Aufmerksamkeit soweit darauf richten, bis sein Denken zugleich mit der Anschauung die in ihr liegenden geometrischen Gesetze gewinnt. Diese Gesetze im Zusammenhang mit der Anschauung aufzuzeigen, ist das innigste Bestreben des Euklid.

An die Spitze von Euklids Hauptwerk sind die „Definitionen“ gestellt. Diese zielen nicht in erster Linie darauf hin, einen abstrakt-logischen Gedankengang einzuleiten. Sie entspringen vielmehr dem Bedürfnis, den Inhalt der geometrischen Vorstellungen allseitig in den Bereich des klaren, bewussten Denkens aufzunehmen. Daher liefern sie im Grunde nichts anderes als eine begriffsmässige Beschreibung der elementaren Raumverhältnisse, gleichsam den begrifflichen Niederschlag aus der allgemeinen Räumlichkeit. Ein weiteres Streben liegt ihnen nicht zu Grunde.

Wohl kann man sich für berechtigt halten, den Wert der so gewonnenen Erkenntnisse für die exakte Wissenschaft anzuzweifeln. Worin sollte denn eine Gewähr dafür liegen, dass diese „Definitionen“ als Grundlage eines so weitläufigen Gedankengewebes, wie es die heutige Geometrie darstellt, auszureichen vermögen? Es werden ja wirklich an den Mathematiker der heutigen Zeit andere Anforderungen gestellt als an den Urheber der „Elemente“. Möglichste Vollkommenheit in der auf abstrakte Weise zu vollziehenden, lückenlosen logischen Verkettung der

einzelnen geometrischen Theoreme miteinander muss heute erstrebt werden. Aber Euklid kennt eben in dieser Richtung nicht Ehrgeiz irgendwelcher Art. Die äussere Form seiner Darstellung ergibt sich als natürliche Einkleidung der entsprechenden mathematischen Tatsachen; auf ihre Ausbildung wird nicht mehr Sorgfalt verwendet, als der treffende Ausdruck des in ihr erscheinenden mathematischen Gehaltes es erfordert. Hierin liegt die charakteristische Erscheinung dieser Form, ihre Reinheit, aber auch ihre Beschränkung begründet. Indem aber im ganzen Werke des Euklid die unmittelbare, stetige Berührung zwischen lebendiger Raumerkenntnis und wissenschaftlicher Verarbeitung aufrechterhalten bleibt, erhält dieses jene innere Sicherheit, die jeder scheinbaren oder wirklichen Unvollkommenheit der äussern Form standzuhalten vermag.

Man wird sich nicht auf die Dauer der Einsicht verschliessen können, dass unmittelbares geistiges Leben das ganze Euklidische Werk durchzieht. Was aus der ideellen Erfahrung in Begriffen festgehalten wird, das verfällt damit nicht dem geistigen Tode. Es besteht und lebt weiter in den in bestimmter Gestalt erscheinenden Vorstellungen. Diese werden direkt getragen vom begrifflichen Element, das sie enthalten. Wird die Aufmerksamkeit darauf hingelenkt, so ist zu verstehen, wie der Begriff als Ausgangspunkt der Vorstellung angesprochen werden kann. Die Vorstellung erscheint dann nicht mehr als bloss von aussen gegeben, sondern es kann verfolgt werden, wie sie aus dem Begriffe entspringt. Damit aber verlieren die in der Aussenwelt allfällig vorhandenen, für die Mathematik zufälligen Grenzen ihre Bedeutung. Der Begriff führt die geometrischen Vorstellungen mit stets derselben Zuverlässigkeit, so weit als man immer will. Hier gewinnt der Mathematiker die Sicherheit des Vorstellens, die er braucht, um die in Euklids „Postulaten“ geforderten Vorstellungsreihen zu vollziehen. Diese Sicherheit wird ihm bewusst, indem er sein Denken spiegelt an der Erfahrungswelt. Da findet er den festen Rückhalt für die ohnedies in der Luft schwebenden geometrischen Begriffe.

Doch darf heute ein Mangel nicht übersehen werden, der den „Postulaten“ — in der Form, in der sie bei Euklid auftreten — anhaftet: sie halten nämlich einer abstrakten Ueberprüfung nicht

stand. Ihre inhaltliche Berechtigung ist soeben dargetan worden. Aber es kann der Zusammenhang zwischen den „Postulaten“, den „Definitionen“ und auch den „Lehrsätzen“ durch das abstrakte Denken nicht aufgefunden werden. Und doch steht gerade das abstrakte Denken heute so sehr im Vordergrunde. Die neuere Geometrie soll daher auf rein abstrakt-logische Weise begründet werden.

Innerhalb des abstrakten Denkens ist zwar in einer gewissen Weise absolute Genauigkeit und Allgemeingültigkeit der mathematischen Sätze zu erreichen. Aber es muss scheinen, als ob das in reine Abstraktionen eingeschlossene Denken für immer von der geometrischen Anschauung geschieden sei. In diesem Punkt der mathematischen Entwicklung geht jeder Halt verloren, der für die Beurteilung der Zulässigkeit eines geometrischen Systems von Bedeutung sein könnte. Es bleibt da nichts anderes übrig, als jedes willkürlich aufgestellte geometrische System als wohlberechtigt anzuerkennen, vorausgesetzt, dass es allen Forderungen des abstrakten Denkens strenge nachkommt. — Einer ähnlichen Kritik, wie sie an den „Postulaten“, besonders am sog. „Parallelenpostulat“ geübt wurde, sind die Euklidischen „Axiome“ nicht unterworfen worden. Mit diesen steht und fällt die Mathematik.

In ihnen spiegelt sich am reinsten das Licht des Denkens, das in die Mathematik hereinstrahlt und ihren Lebensnerv bildet. Könnte die Zuverlässigkeit des Denkens mit Recht angezweifelt werden, so müsste damit zugleich die Mathematik vom Schauplatz verschwinden. Wie haltlos aber ein solcher Zweifel ist, das zeigt ein Blick hinter die Kulissen des Denkens. Würde im Ernst dieser Zweifel ausgesprochen, so müsste sogleich auch er selber angezweifelt werden. Denn das Denken hat ihm ja sein Dasein gegeben. Nichts kann, bei richtiger Aufmerksamkeit, das Vertrauen zerstören, mit dem der gesunde Menschengeist die Tätigkeit des Denkens ausübt. —

Ein Zweifel an der Berechtigung der „Postulate“ stürzt nicht ebenso die Geometrie. Er lässt nur die Euklidische Geometrie als gleichberechtigt mit einer unendlich grossen Zahl von willkürlichen geometrischen Systemen erscheinen. Daher konnte ein solcher Zweifel auch eher auftreten. Er ist aber an sich

doch ungerechtfertigt. Denn er berücksichtigt nicht, auf welche Art die ursprünglichen geometrischen Begriffe aus der allgemeinen Raumerfahrung gewonnen wurden. Es wurde oben darzustellen versucht, in welchem Verhältnis die Euklidischen Begriffe zum Raum stehen. Nicht durch Sinneswahrnehmung werden sie ja in ihrem Wesen bestimmt. Es wird — gerade umgekehrt — die Sinnenwelt erst an ihnen gemessen. Eine durch die Sinne wahrnehmbare Linie ist erst dann als „gerade" zu bezeichnen, wenn der Begriff der „Geraden" an sie herangebracht wird. Das Entsprechende gilt für alle durch Sinneserfahrung aufzufindenden Figuren. Es kann allerdings der Einwand erhoben werden, dass in der Sinnenwelt keine absolut gerade Linie, keine absolut kreisförmige Linie, kein absoluter Punkt usw. existieren. Dies ist gewiss richtig. Aber wodurch wird denn diese Feststellung ermöglicht? Doch eben dadurch, dass zur Beurteilung der Sinneswahrnehmung die Welt des geometrischen Begriffs herangezogen werden kann.

Aus einer mit klarem Bewusstsein vollzogenen Aufstellung der Euklidischen Geometrie kann nicht gefolgert werden, dass in ihr die einzig mögliche Geometrie vorliege. Es kann nur so viel daraus geschlossen werden, dass der Geometer beim Verfolg der Grundlagen der Geometrie nicht auf eigene, willkürliche Spekulationen angewiesen ist. Darüber, ob neben der Euklidischen Geometrie noch andere Geometrien möglich sein sollen, wird erst derjenige entscheiden können, dem es gelingt, mit seinem Denken in die ideelle Wirklichkeit des Raumes einzudringen. Diese Geometrien dürften dann nicht einfach so gewonnen werden, dass irgendwo ein Gegensatz zur Euklidischen Geometrie hergestellt wird. Sie müssten in der unendlichen, lebendigen Idee des Raumes selber begründet sein. Nur so wäre es möglich, eine neue, selbständige und vor allem lebenskräftige Geometrie der Wissenschaft zugänglich zu machen. — Die Euklidische Geometrie wird stets für den Bereich der rein physischen Gesetzmässigkeiten alleinige Geltung besitzen. Aber ohne Zweifel ist auch eine andere, allerdings nicht in der gewohnten Weise starre Geometrie denkbar, welche ihr Dasein zu entfalten vermag im Reich der spezifisch organischen Vorgänge.