Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1916)

Artikel: Ueber einige wichtige Kurven des Kurbeltriebes
Autor: Crelier, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-571161

L. Crelier, (Bern-Biel).

Ueber einige wichtige Kurven des Kurbeltriebes.

I.

Wir wissen, dass der Kurbeltrieb oder die Schubkurbel bestimmt ist durch eine bewegliche Strecke A B von fester Grösse, so dass die Rollbahn (A) von A eine Gerade und diejenige von B ein Kreis (B) ist, dessen Zentrum auf der Geraden liegt.

Wir kennen übrigens auch die fundamentalen Kurven dieses Systems, wie das Rollbett, die rollende Kurve, die Rollbahnen von Punkten der beweglichen Ebene und die Umhüllungskurven der verschiedenen Geraden dieser gleichen Ebene.

Wir wollen in den folgenden Ausführungen eine gewisse Zahl veränderlicher Figuren betrachten, die mit der Bewegung der Koppel A B in Verbindung stehen und die geometrischen Orte der charakteristischen Punkte dieser Figuren und ihre Eigenheiten studieren.

Wie wir zuerst sehen werden, bilden diese Kurven eine Reihe schöner Beispiele für das Studium der höhern Singularitäten.

Im weitern führt uns das Bestimmen der Tangenten einiger dieser Kurven zu verschiedenen originellen und eleganten Konstruktionen, wie auch zu einigen sehr beachtenswerten geometrischen Eigenartigkeiten.

Schliesslich führt uns diese Studie zu mehreren Resultaten, die zu weitern Entwicklungen Anlass geben, wie wir in Form einiger Beispiele anführen, welche zeigen sollen, wie eine einfache Frage der kinematischen Geometrie den Ausgangspunkt zu verschiedenen interessanten geometrischen Nachforschungen bilden kann.

II.

Wenn $A B = l$ die Koppel ist und $O B = R$ die Kurbel, so beachten wir zuerst, dass OBA in allen Lagen einem andern Kurbeltrieb $OB'A$ entspricht, so dass $OB' = l = R'$ und $B'A = R = l'$; OB' sei dann Kurbel und AB' Koppel; $OB'A$ ist zudem auf OA und auf der gleichen Seite von OA symmetrisch zu OBA. (Fig. 1

u. 2.) Wie wir einen Kurbeltrieb OBA oder OB′A rechts von Oy haben, können wir auch einen solchen links davon annehmen.

Das Momentanzentrum von OBA liegt in C und dasjenige von OB′A in C′ und wenn $R \gtreqless l$, so haben wir $R' \lesseqgtr l'$, und wir sagen, es seien zwei Hauptfälle möglich $R > l$ und $R < l$.

Unter den veränderlichen Figuren betrachten wir die Rechtecke OACC″ und OAC′C‴, ferner das Rechteck BB′DE auf den Diagonalen des erstern und endlich die Dreiecke ABI, OCII und OCIII. In diesen letztern ist OII $\perp$ AB und OIII $\perp$ A_1B. (Fig. 9, 10, 11 u. 12).

AB und A_1B sind zwei symmetrische Lagen der gleichen Koppel.

Wir werden nun folgende Gebilde genauer studieren:

1. Den Ort der Punkte D auf der Diagonale OBC.
2. Den Ort der Punkte E auf der Diagonale AB′C″.
3. Den Ort der Projektionen der Eckpunkte des Rechtecks OACC″ auf die Diagonalen, das heisst den Ort von F, H, J und K. (Fig. 3, 4, 5 u. 6).
4. Den Ort der Punkte F_1, H_1, J_1 und K_1, wo $OF_1 = 2\,OF$, $C''H_1 = 2\,C''H$, $AJ_1 = 2\,AJ$ und $CK_1 = 2\,CK$ sei.
5. Den Ort der Punkte M und M_1, wenn C″M $\perp$ OB′ und $C''M_1 = 2\,C''M$.
6. Den Ort der Punkte I mit BI $\perp$ AB und AI $\perp$ Ox.
7. Den Ort der Punkte II, mit OII $\perp$ AB und CII $\perp$ OII.
8. Die Tangente in einem Punkte der rollenden Kurve.
9. Die Tangente in einem Punkte des Rollbettes.
10. Die Tangente in einem Punkte der Kurve D.
11. Die verschiedenen Mechanismen oder kinematischen Systeme, die aus den Tangentenkonstruktionen resultieren.
12. Spezielle Sehnen der Rollbahn (a) von a mit $Aa = R$ auf der Verlängerung der Koppel.

Unter den zu lösenden Fragen sind die direkten und vollständigen Konstruktionen verschiedener Kurven von besonderer Wichtigkeit.

Nur eine solche Konstruktion lässt eine sichere geometrische Besprechung der Resultate zu.

Im allgemeinen haben wir jede Kurve für beide Fälle, $R > l$ und $R < l$ konstruiert.

Die analytische Besprechung der einfachen Punkte soll hierauf gemäss der allgemeinen Theorie aufgestellt werden. Ueberall da, wo ein neues kinematisches System in ganzer oder teilweiser Bewegung der veränderlichen Figuren auftritt, ist es sehr empfehlenswert, die fundamentalen Kurven davon zu studieren. Nur dann wird es möglich sein, die Theorie der veränderlichen Figuren zu beherrschen und deren Eigenartigkeiten zu verstehen.

III.

Rollbett. (Fig. 1 und 2.) Das Rollbett ist der Ort der Punkte C für den Kurbeltrieb OBA.

Die Gleichung des Rollbettes lautet:

$$(x^2 + y^2)\left[x^2 + R^2 - l^2\right]^2 = 4\,R^2\,x^4 \qquad [1]$$

$$\text{oder } \varrho\,(\varrho \pm 2\,R)\cos^2\varphi + R^2 - l^2 = 0$$

Wenn $l > R$, so haben wir zwei Asymptoten. (Fig. 2.)

$$x = \pm\sqrt{l^2 - R^2}$$

Im 1. Fall $R > l$ haben wir keine Asymptoten. (Fig. 1.) Die Polargleichung kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\varrho = \mp R \pm \sqrt{\frac{l^2 - R^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \mp R \pm l\,\frac{\cos\omega}{\cos\varphi};$$

$$\sphericalangle\,\varphi = AOB = OAB'; \ \sphericalangle\,\omega = OAB = AOB'.$$

Gibt man sich Rechenschaft über das Zeichen des Winkels, so kann ϱ immer durch den Ausdruck $\varrho = R + l\,\dfrac{\cos\omega}{\cos\varphi}$ dargestellt werden.

Im Falle $R > l$ sind die Punkte des Kreises mit dem Radius R die Mittelpunkte der Sehnen CC_1 des Rollbettes, welche auf der gleichen Hälfte durch irgend einen beliebigen Radiusvector bestimmt werden. (Fig. 1.)

Im Falle $R < l$ sind die Punkte des gleichen Kreises die Mittelpunkte der Sehnen CC_1 auf einem beliebigen Strahle, aber zwischen einem äussern Aste der einen und dem innern Aste der andern Seite. (Fig. 2.)

---

[1]) Siehe: Literaturverzeichnis.

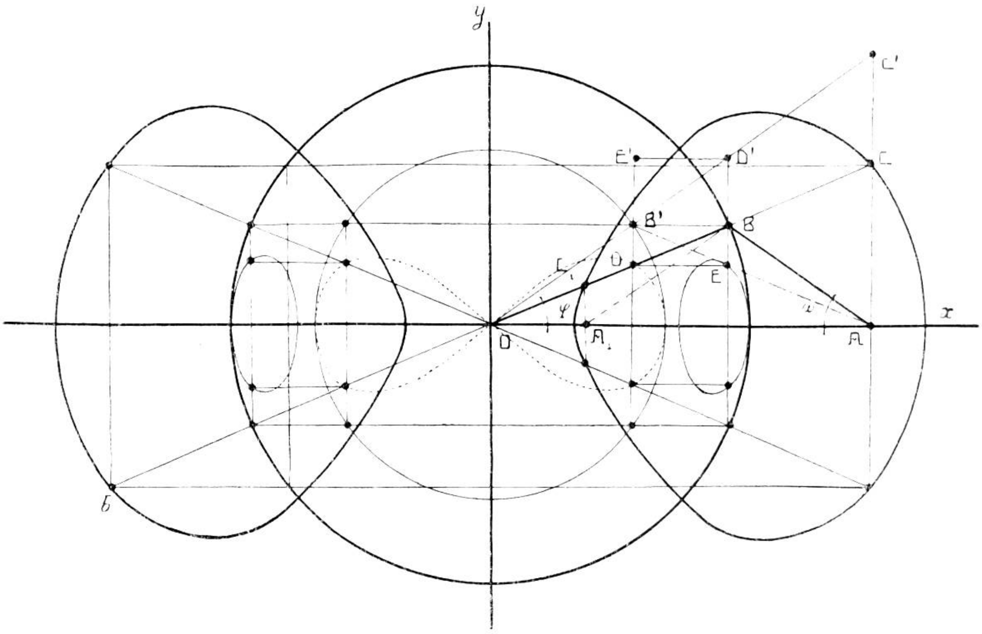

Fig. 1. Kurven C, D, E mit $R > l$.

IV.

Kurve D. Wir haben die Kurbel OB und die Koppel AB und fällen ein Perpendikel vom Punkte B′ auf die x-Axe, welches die Kurbel OB schneidet.

Der Schnittpunkt wird mit D bezeichnet (Fig. 1 und 2). Die betreffende Kurve ist der Ort der Punkte D. Ihre Gleichung heisst:

$$(x^2 - l^2)\,(x^2 + y^2) + R^2 y^2 = 0 \qquad {}^{2})$$

oder
$$\beta = \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi}$$

Wenn $R > l$, ist die Kurve eine zweiblätterige Rosenkurve, und wenn $R < l$, sind 2 Asymptoten vorhanden, mit den Gleichungen $x = \pm \sqrt{l^2 - R^2}$.

Jedem Punkte D der betrachteten Kurve entsprechen zwei Punkte der Kurve C, einer durch Addition, der andere durch Subtraktion der Konstanten R. Unter diesen Bedingungen hat die Gleichung des Ortes der Punkte C als Konchoïde des Ortes der Punkte D folgende Form:

$$\varrho' = \varrho \pm R, \text{ oder einfacher Weise } \varrho' = \varrho + R$$

V.

Kurve E. Die 3 Punkte B, B′ und D bestimmen mit dem 4. Punkte E ein Rechteck. Die neue Kurve ist der Ort der

Punkte E (Fig. 1 und 2). Es seien x und y die Koordinaten von E, dann ist:

$$y^2 = OD^2 \sin^2\varphi = \frac{l^2 - R^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \sin^2\varphi$$

$$x = R \cos\varphi$$

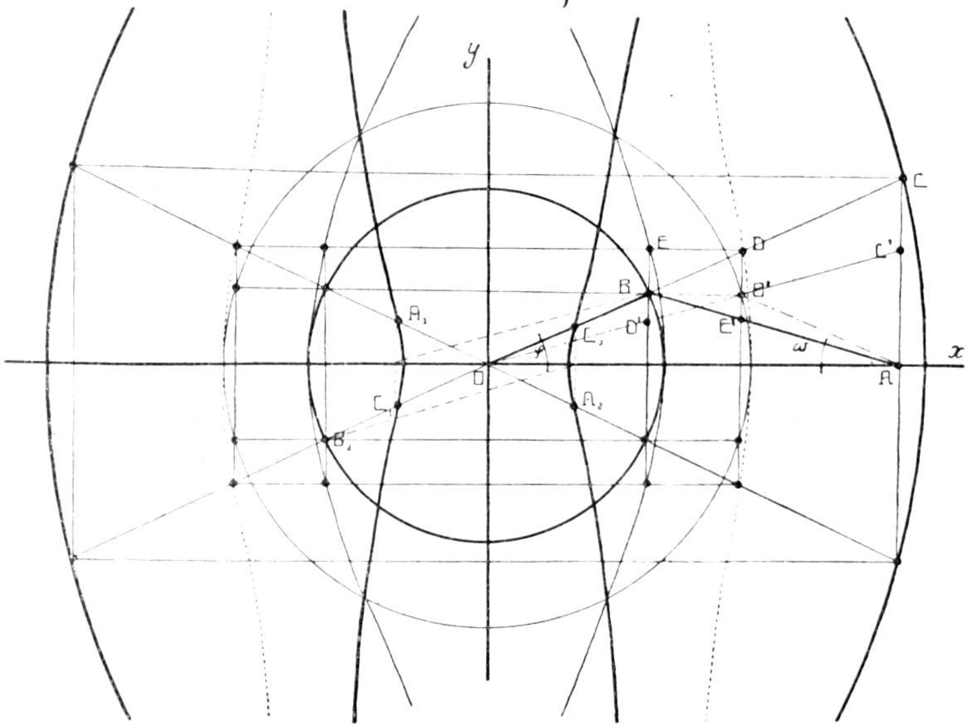

Fig. 2. Kurven C, D, E mit $R < l$.

Wir schaffen in beiden Gleichungen φ weg.

$$y^2 = \frac{l^2 - R^2\left(\frac{R^2 - x^2}{R^2}\right)}{\frac{x^2}{R^2}} \cdot \frac{R^2 - x^2}{R^2} = \frac{1}{x^2}\left[l^2 - (R^2 - x^2)\right](R^2 - x^2)$$

oder
$$x^2 y^2 - \left[l^2 - (R^2 - x^2)\right](R^2 - x^2) = 0$$

So lautet die gesuchte Gleichung. Daraus folgt:

$$\varrho^2 \cos^2\Theta\,(\varrho^2 - 2R^2 + l^2) + R^2(R^2 - l^2) = 0$$

Wenn $R > l$, so haben wir:

$y^2 = \frac{1}{x^2}\left[x^2 - (R^2 - l^2)\right](R^2 - x^2)$. Somit müssen wir haben

$-R < x < R$ und

$-\sqrt{R^2 - l^2} > x > +\sqrt{R^2 - l^2}$.

Der Wert von x liegt also zwischen den beiden Werten von $-R$ bis $-\sqrt{R^2 - l^2}$ und $+\sqrt{R^2 - l^2}$ bis R.

Die Kurve setzt sich also aus 2 ovalen in Bezug auf die x-Axe symmetrischen Teilen zusammen. (Fig. 1.)

Wenn $R < l$, haben wir

$y^2 = \frac{1}{x^2} [l^2 - R^2 + x^2] (R^2 - x^2)$. Der erste Faktor ist immer positiv. Beim andern müssen wir folgendes haben: $- R < x < + R$; x muss man sich daher zwischen $- R$ und $+ R$ vorstellen und für $x = 0$ ist die Axe eine doppelte Asymptote. Die Koordinatenaxen sind ebenfalls zwei Symmetrieaxen. (Fig. 2.)

Bemerkung. Wenn wir von einem System OBA ausgehen mit $R > l$, so gibt uns das System OB′A, das ans erste System gebunden ist, seinerseits ein Rollbett, eine Kurve D und eine Kurve E; es sind dies die zweiten Fälle des Vorausgehenden. Man kann sie durch die nämlichen Gleichungen darstellen, in denen $R < l$ sein wird oder die ursprünglichen Werte von R und l behalten und sie dann vertauschen und φ durch ω ersetzen und umgekehrt.

Die betreffenden Kurven können wir folgenderweise zusammenstellen:

Kurve C: 1. $(x^2 + y^2)(x^2 + R^2 - l^2) = 4 R^2 x^2$.

2. $\varrho = R + l \frac{\cos \omega}{\cos \varphi}$

Kurve C′: 1. $(x^2 + y^2)(x^2 + l^2 - R^2) = 4 l^2 x^4$.

2. $\varrho = l + R \frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$

Kurve D: 1. $(x^2 + y^2)(x^2 - l^2) + R^2 y^2 = 0$.

2. $\varrho = l \frac{\cos \omega}{\cos \varphi}$

Kurve D′: 1. $(x^2 + y^2)(x^2 - R^2) + l^2 y^2 = 0$.

2. $\varrho = R \frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$

Kurve E: 1. $x^2 y^2 - (l^2 - R^2 + x^2)(R^2 - x^2) = 0$.

2. $\varrho^2 \cos^2 \Theta (\varrho^2 - 2 R^2 + l^2) + R^2 (R^2 - l^2) = 0$.

Kurve E′: 1. $x^2 y^2 - (R^2 - l^2 + x^2)(l^2 - x^2) = 0$.

2. $\varrho^2 \cos^2 \Theta (\varrho^2 - 2 l^2 + R^2) + l^2 (l^2 - R^2) = 0$.

Die 6 Kurven haben wir für jeden Fall $R > 1$ oder $R < 1$. Die 1. Figur enthält sie für $R > 1$ und die 2. für $R < 1$. Wie gesagt worden ist, bildet die Kurve C′ der ersten Figur die Kurve C der andern und umgekehrt und dasselbe haben wir mit den Kurven D und D′ und dann mit den Kurven E und E′.

IV.

Kurve F. Der Punkt F ist der Fusspunkt der Normalen, die vom Ursprung auf die Diagonale AB′ gefällt wird. Die be-

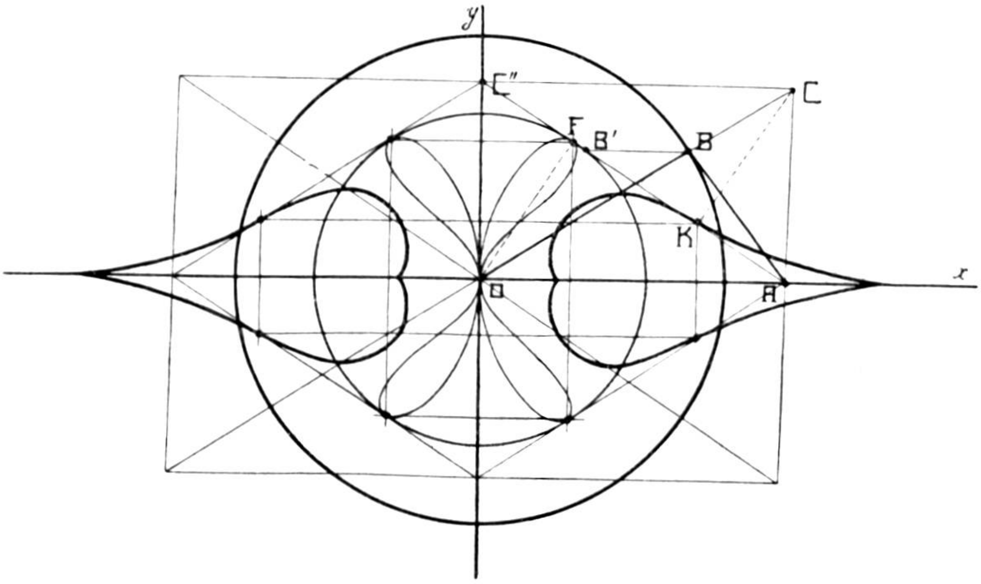

Fig. 3. Kurven F u. K mit $R > 1$

trachtete Kurve ist daher die Fusspunktskurve der Umhüllungskurve dieser Diagonale inbezug auf den Ursprung. (Fig. 3 und 4.)

Wir können die Gleichung des Ortes der Punkte F in Polarkoordinaten suchen und wir haben

$$\varrho = OF = OB' \sin(\omega + \varphi) = 1 \sin(\omega + \varphi)$$

$$= 1 \sin\omega\cos\varphi + 1\sin\varphi\cos\omega = \sin\varphi\sqrt{1^2 - R^2\sin^2\varphi} + R\sin\varphi\cos\varphi.$$

Das Argument Θ heisst auch

$$\Theta = 90^0 - \varphi$$

d. h.: $$\varrho = \cos\Theta\sqrt{1^2 - R^2\cos^2\Theta} + R\sin\Theta\cos\Theta.$$

oder: $$(\varrho - R\sin\Theta\cos\Theta)^2 = \cos^2\Theta\,(1^2 - R^2\cos^2\Theta).$$

Man kann kürzen:

$$\varrho^2 - 2R\varrho\sin\Theta\cos\Theta - (1^2 - R^2)\cos^2\Theta = 0.$$

Diese Gleichung ist die gesuchte Gleichung; in orthogonalen Koordinaten heisst sie:

$$\left[(x^2+y^2)^2-(l^2-R^2)\,x^2\right]^2 = 4\,R^2x^2y^2\,(x^2+y^2).$$

Die Gleichung ist vom 8. Grade. Die Koordinatenaxen sind Symmetrieaxen.

Der Ursprung ist ein vierfacher Punkt und die y-Axe ist eine vierfache Tangente in diesem Punkte.

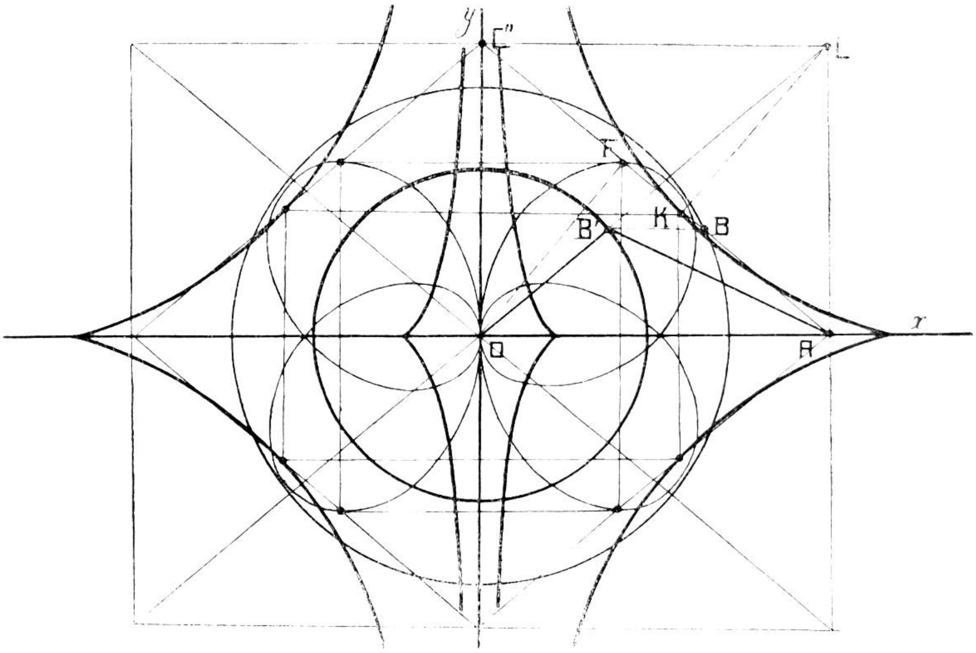

Fig. 4. Kurven F u. K mit $R < l$.

Im übrigen sind die Punkte $\left(+\sqrt{l^2-R^2},\,0\right)$ u. $\left(-\sqrt{l^2-R^2},\,0\right)$ Doppelpunkte der Kurve. Wenn $R < l$ ist, werden diese Doppelpunkte der Kurve imaginär.

Für den Fall $R = l$, bleibt uns: $(x^2+y^2)^3 = 4R^2\,x^2\,y^2$, d. h. die Gleichung der vierblättrigen Rosenkurve oder „Vierblatt", die mit den Astroïden verwandt ist.[3])

Der Ort der Punkte F ist daher eine Verallgemeinerung des „Vierblattes". Wir können bemerken, dass vom geometrischen Gesichtspunkt aus betrachtet, die betrachtete Kurve sich auf zwei Bewegungen des Kurbeltriebes bezieht, mit gemeinsamem Zentrum in O und symmetrischer Lage inbezug auf dasselbe.

Das System OBA ergibt nur eine Hälfte der Kurve.

VII.

Kurve H. (Fig. 5 u. 6). Es sei C'' der 4. Eckpunkt eines Rechteckes $OACC''$ und OC eine Diagonale.

Fällen wir $C''H \perp$ auf OC, so sei H der Fusspunkt des Perpendikels von C'' auf OC.

Es seien nun x und y die Koordinaten von H und x' und y' diejenigen von C; dann haben wir:

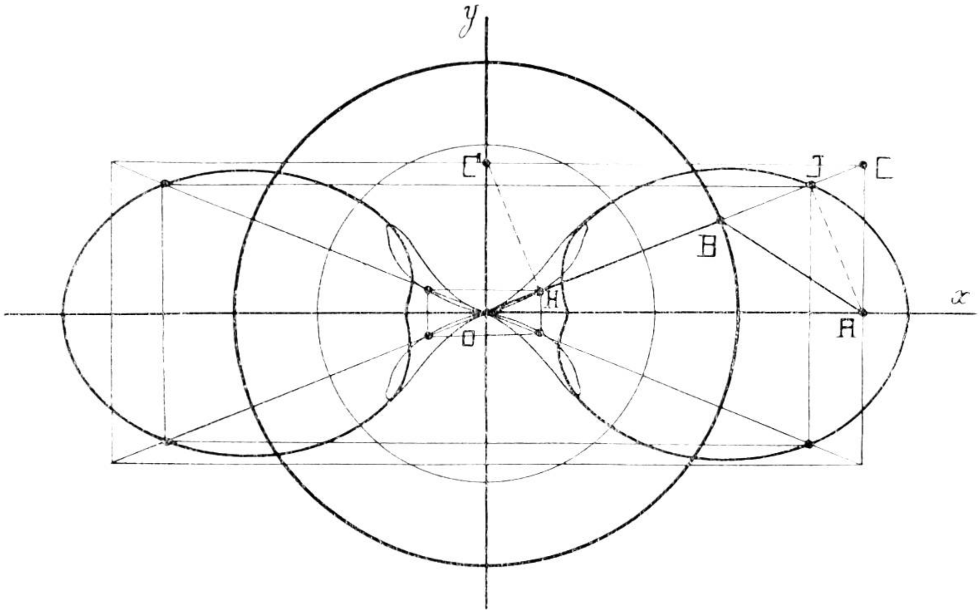

Fig. 5. Kurven J u. H mit $R > 1$.

$$x^2 + y^2 = \overline{OH}^2 = yy'; \text{ woraus } y' = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \qquad \text{woraus } x' = \frac{xy'}{y} = \frac{x(x^2 + y^2)}{y^2}$$

Indem wir diese Werte in die Gleichung für C einführen, erhalten wir nach Vereinfachungen:

$\left[x^2 (x^2 + y^2)^2 + (R^2 - l^2)\, y^4\right]^2 = 4\, R^2 x^4 y^4 (x^2 + y^2)$. Es ist also die Gleichung für den Ort der Punkte H. In Polarkoordinaten werden wir folgendes haben:

$$\varrho^2 \cdot \cos^2\varphi - (l^2 - R^2) \sin^4\varphi = \pm 2\, R\varrho \sin^2\varphi \cos^2\varphi$$

oder: $\varrho^2 \cos^2\varphi \mp 2\, R\varrho \sin^2\varphi \cos^2\varphi - (l^2 - R^2) \sin^4\varphi = 0$

d. f.
$$\varrho = \frac{\pm R \sin^2\varphi \cos^2\varphi \pm \sqrt{R^2 \sin^4\varphi \cos^4\varphi + (l^2 - R^2) \sin^4\varphi \cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \left[\pm R \cos \varphi \pm \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi} \right] \qquad 1.$$

Wir können auch den Wert für ϱ direkt aus x und y ableiten:

$$\varrho^2 = yy' = \beta \sin \varphi \cdot \lambda' \operatorname{tg} \varphi$$

Man hat aber: $\lambda' = \varphi \sin \omega + R \cos \varphi = R \cos \varphi + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}$

d. f.:
$$\varrho = R \sin^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \qquad 2.$$

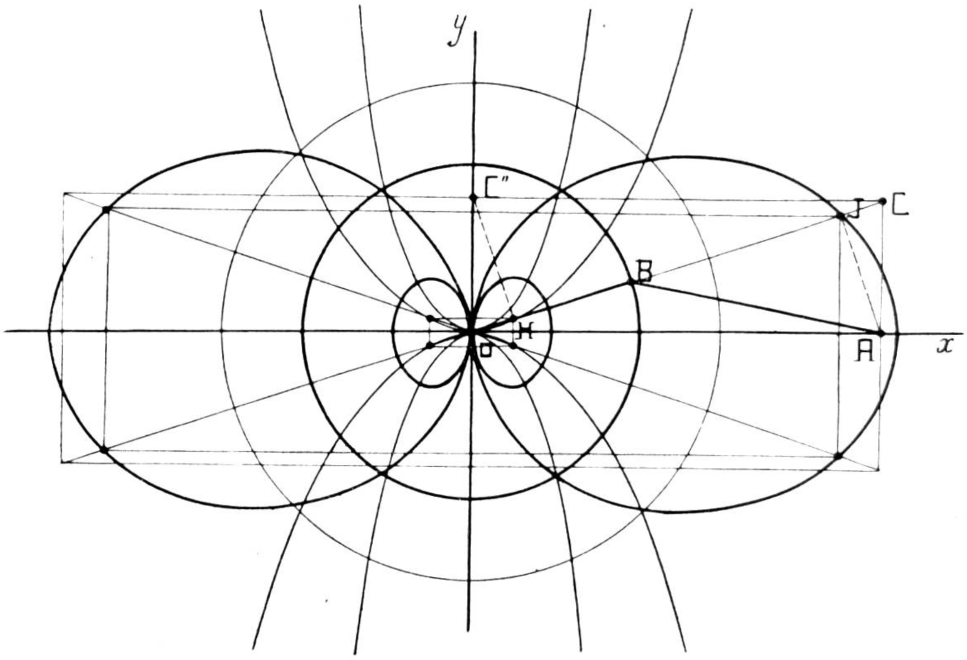

Fig. 6. Kurven J u. H mit $R < l$.

Die Vorzeichen beider Resultate (1.) und (2.) stimmen überein; man hat nur die Vorzeichen der Winkel zu berücksichtigen.

Die Kurve ist von 12. Ordnung, das niedrigste Glied vom 8. Grade, d. h. $(R^2 - l^2)^2 - y^8 = 0$.

Zusammenfassend ergibt eine geometrische Besprechung folgende Bemerkungen:

1. Der Ursprung ist ein vielfacher Punkt 8. Ordnung.
2. Er besteht aus 4 symmetrischen Rückkehrpunkten mit der x-Axe als Rückkehrtangente.
3. Mit $R > l$ hat die Kurve keine reellen Asymptoten. (Siehe Fig. 5.)

4. Mit $R < l$ sind die Geraden $x = \pm \sqrt{R^2 - l^2}$ doppelte Asymtoten. (Siehe Fig. 6.)

VIII.

Kurve J. (Fig. 5 u. 6.) Der Punkt J sei der Fusspunkt des Perpendikels vom Eckpunkt A des Rechteckes OACC'' auf die Diagonale OC.

Wir haben:

$$\varrho_J = \varrho_C - \varrho_H = R + \frac{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} - \sin^2 \omega \left[\frac{R + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}\right]$$

$$= \varrho_C \cos^2 \varphi = R \cos^2 \varphi + \cos \varphi \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \varphi}$$

d. h. $$(\varrho - R \cos^2 \varphi)^2 = \cos^2 \varphi \,(l^2 - R^2 \sin^2 \varphi)$$

In orthogonalen Koordinaten erhalten wir nach Vereinfachungen:

$$\left[(x^2 + y^2)^2 + (R^2 - l^2)\, x^2\right]^2 = 4 R^2 x^4 (x^2 + y^2)$$

Wir können diese Gleichung auch direkt aus derjenigen von C ableiten.

Wir setzen: $C(x', y')$ und $J(x, y)$; dann ist:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \text{ und } x' = \frac{x\,y'}{y}; \text{ ferner:}$$

$$y^2 = x\,(x' - x) = \frac{(x\,y' - x\,y)}{y} \cdot x, \text{ woraus:}$$

$$y' = \frac{y}{x^2}(x^2 + y^2) \text{ und } x' = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

Eingeführt in die Gleichung von C und vereinfacht, erhalten wir:

$$\left[(x^2 + y^2)^2 + (R^2 - l^2)\, x^2\right]^2 = 4 R^2 x^4 (x^2 + y^2)$$

Wir finden folgende geometrischen Eigenheiten:

1. Die Koordinatenaxen sind die Symmetrieaxen.
2. Die Kurve ist von 8. Ordnung und der Ursprung ist ein vierfacher Punkt.
3. Die andern Schnittpunkte mit der x-Axe sind bestimmt durch $x = R \pm l$ und $x = -R \pm l$.
4. Die Kurve hat in der Unendlichkeit keine reellen Punkte.

5. Für $R < l$ haben wir 4 Kurvenäste, die im Ursprung tangieren und die y-Axe als gemeinschaftliche Tangente haben.
6. Für $R > l$ ist der Ursprung ein isolierter Punkt und die Kurve setzt sich aus 2 geschlossenen Aesten zusammen, die getrennt und symmetrisch inbezug auf die y-Axe sind.

IX.

Kurve K. (Fig. 3 u. 4.) Der Punkt K ist der Fusspunkt des Perpendikels von C auf die Diagonale AB′. Der Ort der Punkte K ist die gesuchte Kurve.

Wir setzen: $K(x, y)$; $C(x_C, y_C)$; $F(x_F, y_F)$ und wir haben:

$$x = x_C - x_F = \frac{x_F^2 + y_F^2}{x_F} - x_F = \frac{y_F^2}{x_F}$$

$$y = y_C - y_F = \frac{x_F^2 + y_F^2}{y_F} - y_F = \frac{x_F^2}{y_F}; \text{ ferner}$$

$$x_F = x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} \text{ und } y_F = x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}$$

Eingeführt in die Gleichung von F, erhalten wir:

$$\left[x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2 + R^2 - l^2\right]^2 = 4\,R^2\, x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$$

Vom geometrischen Gesichtspunkte aus betrachtet, finden wir: die Koordinatenaxen sind auch die Symmetrieaxen, die Kurve hat 4 Doppelpunkte auf der x-Axe, sie sind bestimmt durch $x = \pm (R + l)$ und $x = \pm (l - R)$; es sind einfache Rückkehrpunkte.

Für $R < l$ sind die Geraden $x = \pm \sqrt{l^2 - R^2}$ doppelte Asymptoten, die den Rückkehrpunkten zweiter Ordnung entsprechen.

Für $R > l$ sind diese Asymtoten imaginär und die Kurve setzt sich aus 2 geschlossenen Aesten zusammen, die inbezug auf die y-Axe symmetrisch liegen.

X.

Grenzfälle der Kurven F, H, J und K.

1. Wir haben schon bemerkt, dass der Grenzfall der Kurve F, $l = R$, ein Vierblatt ist.

$(x^2 + y^2)^3 = 4\,R^2\,x^2\,y^2$. Die Kurvenäste liegen symmetrisch zwischen den Koordinatenaxen.

2. Der Grenzfall von H gibt: $R = 1$ und

$$(x^4 + y^2)^3 = 4\,R^2\,y^4 \text{ oder}$$
$$\varrho^2 = 2\,R\,\sin^2\omega$$

Es ist dies die Doppeleilinie von Münger.[4])
Die Kurve wird von der y-Axe symmetrisch geschnitten.
Die Kurve J gibt einen analogen Grenzfall:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4\,R^2\,x^4$$

oder $$\varrho = 2\,R\,\cos^2\omega.$$

Es ist dies die gleiche Kurve, aber diesmal durch die x-Axe geschnitten.

3. Der Grenzfall der Kurve K ist eine reguläre Astroïde mit dem Parameter 2 R:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(2\,R\right)^{\frac{2}{3}}$$

XI.

Andere Bemerkungen über die Kurven F, H, J und K.

Die Vektoren haben ergeben:

$\varrho_F = \varrho_C \sin\omega\cos\omega$; $\varrho_H = \varrho_C \sin^2\omega$; $\varrho_J = \varrho_C \cos^2\omega$.

Wir können ebenfalls das Argument γ in bezug auf den Vektor von K ableiten:

$$x_K = OJ\cos\varphi = \varrho_C \cos^2\varphi\cos\varphi$$
$$y_K = OH\sin\varphi = \varrho_C \sin^2\varphi \,.\, \sin\varphi$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{y_K}{x_K} = \frac{\varrho_J \sin^3\varphi}{\varrho_J \cos^3\varphi} = \operatorname{tg}^3\varphi$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^3\varphi \text{ oder } \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}\gamma.$$

Die Koordinaten des laufenden Punktes jeder Kurve können abgeleitet werden von denjenigen des korrespondierenden Punktes von irgend einer andern unter ihnen.

Aus den schon abgeleiteten Resultaten lässt sich folgende Tabelle zusammenstellen:

C		F		H		J		K	
x	y	$\frac{xy^2}{x^2+y^2}$	$\frac{x^2y}{x^2+y^2}$	$\frac{xy^2}{x^2+y^2}$	$\frac{y^3}{x^2+y^2}$	$\frac{x^3}{x^2+y^2}$	$\frac{x^2y}{x^2+y^2}$	$\frac{x^3}{x^2+y^2}$	$\frac{y^3}{x^2+y^2}$
$\frac{x^2+y^2}{x}$	$\frac{x^2+y^2}{y}$	x	y	x	$\frac{x^2}{y}$	$\frac{y^2}{x}$	y	$\frac{y^2}{x}$	$\frac{x^2}{y}$
$\frac{x(x^2+y^2)}{y^2}$	$\frac{x^2+y^2}{y}$	x	$\frac{x^2}{y}$	x	y	$\frac{x^2}{y}$	$\frac{x^3}{y^2}$	$\frac{x^3}{y^2}$	y
$\frac{x^2+y^2}{x}$	$\frac{y(x^2+y^2)}{x^2}$	$\frac{y^2}{x}$	y	$\frac{y^2}{x}$	$\frac{y^3}{x^2}$	x	y	x	$\frac{y^3}{x^2}$
$\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$	y	x	$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$	x	y

Bemerkung: Im Rechteck $OAC'C'''$ können wir ebenfalls 4 analoge Kurven aufstellen, nämlich je die zweiten Fälle der vorangehenden. Ihre Gleichungen kann man direkt aufstellen, indem man $OB' = l$ und $B'A = R$ einsetzt oder indem man in den ersten Gleichungen R und l vertauscht und φ durch ω ersetzt.

Die neue Kurve F beispielsweise ist die Fusspunktkurve der Umhüllungskurve der Koppel inbezug auf den Ursprung, weil man den Ursprung auf AB projiziert.

Die neuen Kurven werden wir als Kurven von F', H', J' und K' bezeichnen; ihre Gleichungen liefern mit den vorhergehenden die folgende Zusammenstellung:

Kurve F:

1. $$\left[(x^2+y^2)^2-(l^2-R^2)\,x^2\right]^2 = 4\,R^2x^2y^2(x^2+y^2)$$
2. $$\varrho^2 - 2\,R\,\varrho\sin\Theta\cos\Theta - (l^2-R^2)\cos^2\Theta = 0$$

Kurve F':

1. $$\left[(x^2+y^2)-(R^2-l^2)x^2\right]^2 = 4\,l^2x^2y^2(x^2+y^2)$$
2. $$\varrho^2 - 2\,l\,\varrho\sin\Theta\cos\Theta - (R^2-l^2)\cos^2\Theta = 0$$

Kurve H: 1. $\left[x^2(x^2+y^2)^2+(R^2-l^2)\,y^4\right]^2=4\,R^2x^4y^4(x^2+y^2)$

2. $\varrho^2\cos^2\omega\mp 2\,R\,\varrho\sin^2\omega\cos^2\omega-(l^2-R^2)\sin^4\omega=0$

Kurve H′: 1. $\left[x^2+(x^2+y^2)^2+(l^2-R^2)\,y^4\right]^2=4\,l^2x^4y^4(x^2+y^2)$

2. $\varrho^2\cos^2\varphi\mp 2\,l\,\varrho\sin^2\varphi\cos^2\varphi-(R^2-l^2)\sin^4\varphi=0$

Kurve J: 1. $\left[(x^2+y^2)^2+(R^2-l^2)\,x^2\right]^2=4\,R^2x^4(x^2+y^2)$

2. $(\varrho-R\cos^2\varphi)^2=\cos^2\varphi\,(l^2-R^2\sin^2\varphi)$

Kurve J′: 1. $\left[x^2+y^2+(l^2-R^2)x^2\right]^2=4\,l^2x^4\,(x^2+y^2)$

2. $(\varrho-l\cos^2\omega)^2=\cos^2\omega\,(R^2-l^2\sin^2\omega)$

Kurve K: $\left[x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2+R^2-l^2\right]^2=4\,R^2x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)$

Kurve K′: $\left[x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2+l^2-R^2\right]^2=4\,l^2\,x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)$

XII.

Die Kurven F_1, H_1, J_1, K_1. Tragen wir nun $OF_1=2\,OF$; $C''H_1=2\,C''H$; $AJ_1=2\,AJ$ und $CK_1=2\,CK$ ab, so wird der Ort der Punkte F_1, H_1, J_1 und K_1 die Kurven bilden, die wir näher betrachten wollen.

Für die erste *Kurve* haben wir:

$$\varrho_{F_1}=2\,\varrho_F=2\,\varrho_C\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\varrho_{F_1}=2\,R\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{4\,l^2-4\,R^2\sin\varphi}$$

Es ist die gleiche Kurve wie der Ort der Punkte F. Der fundamentale Kurbeltrieb aber ist von doppelter Dimension. Die Kurbel ist $=2\,R$ und die Koppel $=2\,l$. In orthogonalen Koordinaten lautet die Gleichung:

$$\left[(x^2+y^2)^2-4\,(l^2-R^2)\,x^2\right]^2=16\,R^2x^2y^2(x^2+y^2)$$

Die 2. *Kurve* gibt uns:

$\varrho_{H_1}=y_C$; H ist so gelegen, dass

$$\widehat{HOH_1}=\widehat{HOC'}=\frac{\pi}{2}-\varphi \text{ und } \widehat{XOH_1}=\frac{\pi}{2}-2\,\varphi$$

$$\Theta = 2\pi - \frac{\pi}{2} + 2\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\varphi$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \sin\Theta$$

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\Theta}{2}} \text{ und } \cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\Theta}{2}};$$

Daraus folgt:

$$\varrho_{H_1} = \varrho_C \sin\varphi = \pm\left(R + \sqrt{\frac{2\,l^2 - R^2(1-\sin\Theta)}{1+\sin\Theta}}\right)\sqrt{\frac{1-\sin\Theta}{2}}$$

Die Gleichung in orthogonalen Koordinaten würde man durch direkte Transformation erhalten oder davon ausgehend, dass:

$$x_{H_1} = 2\,x_H \text{ und } y_{H_1} = 2\,y_H - y_C$$

oder

$$x_H = \frac{1}{2}\,x_{H_1}$$

$$y_H = \frac{1}{2}\left(y_{H_1} \pm \sqrt{x_{H_1}^2 + y_{H_1}^2}\right)$$

Es würde dann genügen, diese Werte in die Gleichung für den Ort der Punkte H einzusetzen.

Die Entwicklung dieser letzten Kurve, sowie auch deren geometrische Besprechung bildet ein Uebungsbeispiel.

Uebungen. 1. Es sei die Gleichung des Ortes der Punkte H_1 in orthogonalen Koordinaten auf die 2 angegebenen Arten abzuleiten.

2. Es sei die Kurve für die beiden Fälle $R > l$ und $R < l$ zu konstruieren.
3. Geometrische Besprechung von Ursprung, Schnittpunkte mit den Axen und Asymptoten.

Die 3. *Kurve* ist der Ort der Punkte J_1.

Das entsprechende Argument $\Theta = 2\varphi$ gibt;

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos\Theta$$

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\Theta}{2}}$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{2}} \quad \text{daraus folgt:}$$

$$\varrho_{J_1} = \pm\left(R + \sqrt{\frac{2\,l^2 - R^2(1-\cos\Theta)}{1+\cos\Theta}}\right)\sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{2}}$$

Die Gleichung in cartesischen Koordinaten kann wie vorher auf 2 Arten gefunden werden, entweder durch direkte Transformation oder durch:

$$y_{J_1} = 2\,y_J \quad \text{und} \quad x_{J_1} = x_C - 2\,(x_C - x_J) = 2\,x_J - x_C$$

Uebungen:

1. Es sei nach den 2 angegebenen Methoden die Gleichung des Ortes der Punkte J_1 in orthogonalen Koordinaten abzuleiten.
2. Es sei die Kurve J_1 für die 2 Fälle $R > 1$ und $R < 1$ zu konstruieren.
3. Geometrische Diskussion über Ursprung, Schnittpunkte mit den Axen und Asymptoten.

Die *4. Kurve*, der Ort der Punkte K_1, gibt:

$$OK_1 \perp CK_1 \quad \text{und}$$
$$\varrho_{K_1} = \varrho_C \cos 2\,\varphi$$

Das entsprechende Argument: $\Theta = 2\,\pi - \varphi$

$$\sin\Theta = -\sin\varphi \quad \text{und} \quad \cos\Theta = \cos\varphi$$

Die Polargleichung heisst dann:

$$\varrho_{K_1} = \left(R + \sqrt{\frac{l^2 - R^2 \sin^2\Theta}{\cos\Theta}}\right)(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta)$$

Man erhält die Gleichung in carthesischen Koordinaten durch direkte Transformation oder durch folgende Beziehungen:

$$x_{K_1} = 2\,x_K - x_C \quad \text{und} \quad y_{K_1} = 2\,y_K - y_C$$

Die Gleichung, die etwas einfacher ist, als die vorhergehende, lautet:

$$\left[(x^2 - y^2)^2 (l^2 - R^2) - x^2 (x^2 + y^2)\right]^2 = 4\,R^2 x^4 (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

Uebungen:

1. Ableitung der vorstehenden Gleichung durch die angegebenen Substitutionen.
2. Konstruktion der Kurve K_1 für die 2 Fälle.
3. Geometrische Besprechung des Ursprunges, der Schnittpunkte mit den Axen und der Asymptoten.

XIII.

Kurven M und M_1. (Fig. 7 u. 8). Wenn wir vom Eckpunkt C'' des Rechteckes $OACC''$ ein Perpendikel auf die Diagonale OC' des Rechteckes $OAC'C'''$ fällen, so finden wir M auf OC'

und OM_1; mit $OM_1 = 2\ OM$ auf der Verlängerung dieses Perpendikels.

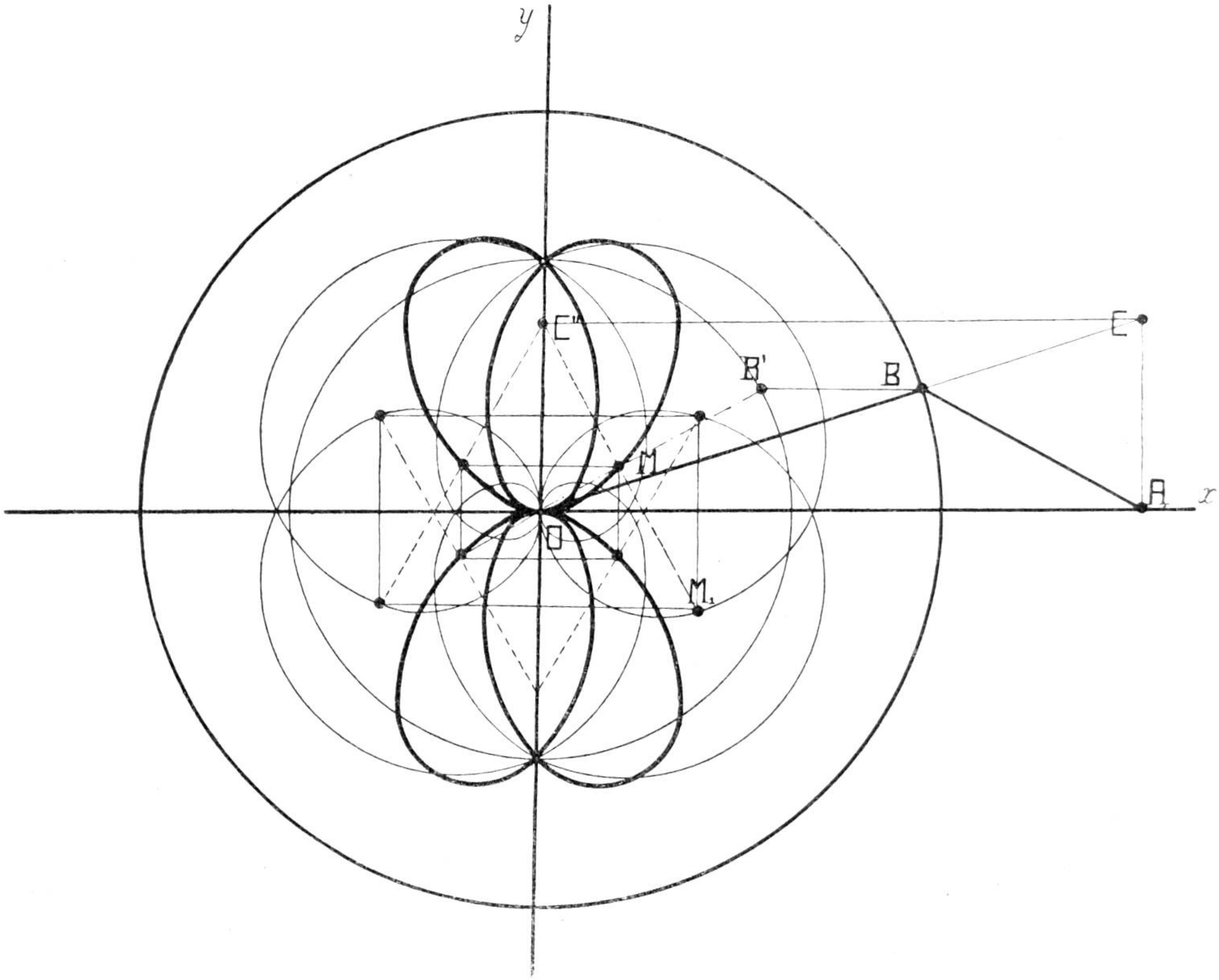

Fig. 7. Kurven M u. M_1 mit $R > l$.

Die Polargleichung von M gibt uns:

$$\varrho^2 = \overline{OM}^2 = y_M \cdot y_C = \varrho \sin \omega\ y_C$$

$$y_C = \varrho_C \sin \varphi = \varrho_C \cdot \frac{l}{R} \sin \omega, \text{ woraus:}$$

$$\varrho = \varrho_C \frac{l}{R} \sin^2 \omega = \left(R + \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi} \right) \frac{l}{R} \sin^2 \omega$$

$$\varrho = l \sin^2 \omega + \frac{l^2 \sin^2 \omega \cos \omega}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin \omega}}$$

ϱ ist das Argument von M; daraus folgt:

$$(\varrho - l \sin^2 \omega)^2 (R^2 - l^2 \sin^2 \omega) = l^4 \sin^4 \omega \cos^2 \omega.$$

So lautet die Polargleichung von M. Man kann sie auch folgendermassen schreiben:

$$\varrho(\varrho - 2\,l \sin^2\omega)\,(R^2 - l^2 \sin^2\omega) = l^2 \sin^4\omega\,(l^2 - R^2)$$

In orthogonalen Koordinaten erhalten wir:

$$\varrho(\varrho^3 - 2\,l\,y^2)\,(R^2\varrho^2 - l^2 y^2) = l^2 y^4\,(l^2 - R^2)$$

$$\left[\varrho^4\,(R^2\varrho^2 - l^2 y^2) - l^2 y^4\,(l^2 - R^2)\right]^2 = 4\,\varrho^2 l^2 y^4\,(R^2\varrho^2 - l^2 y^2)^2$$

oder

$$\left\{(x^2+y^2)^2\left[R^2(x^2+y^2) - l^2 y^2\right] - l^2 y^4\,(l^2 - R^2)\right\}^2 = 4\,l^2 y^4\,(x^2+y^2)\left[R^2(x^2+y^2) - l^2 y^2\right]^2$$

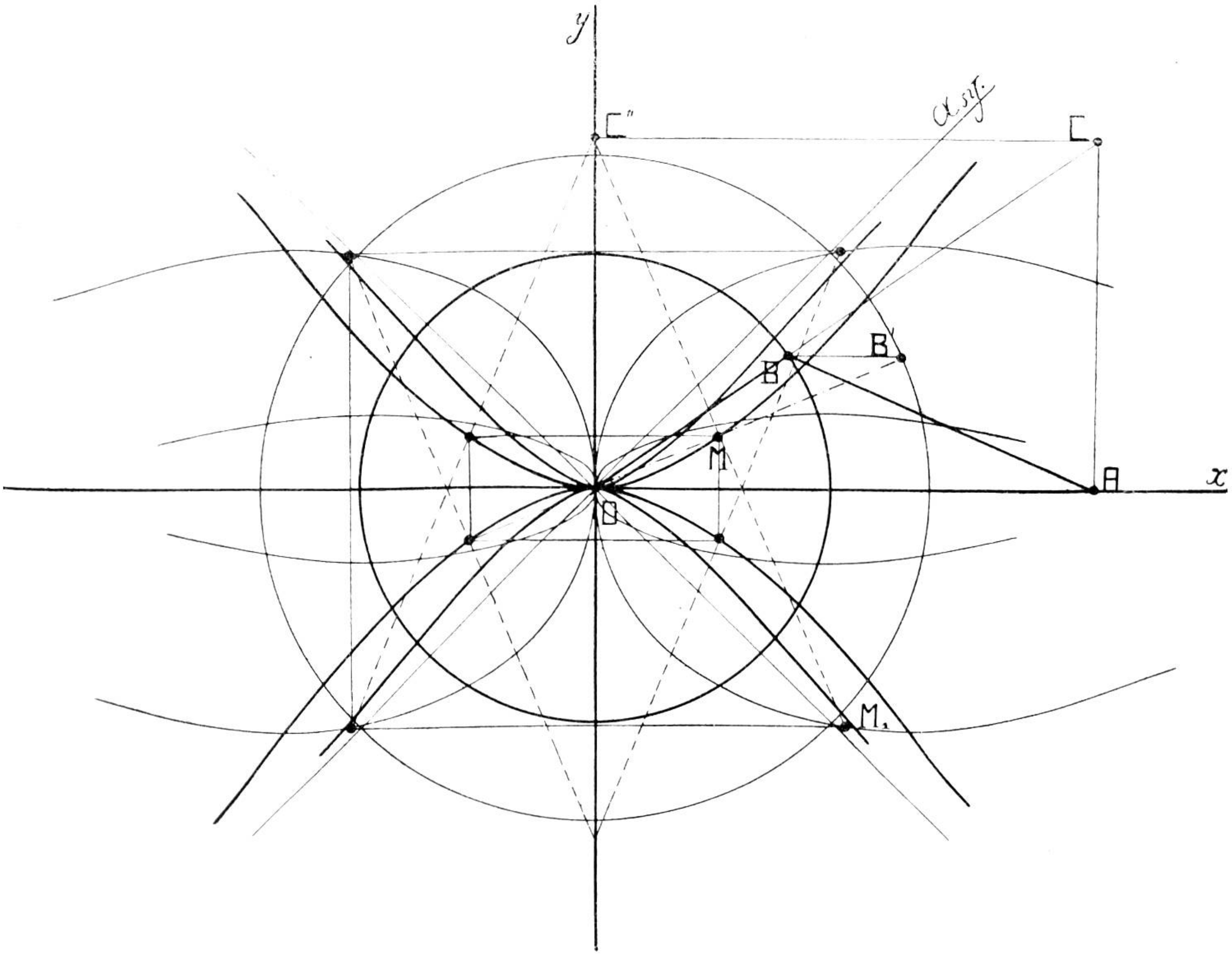

Fig. 8. Kurven M. u. M_1 mit $R < l$.

Die Kurve ist von 12. Ordnung und der Ursprung ein vielfacher Punkt 8. Ordnung. Die Koordinatenaxen sind Symmetrieaxen. Die x-Axe ist eine vierfache Tangente.

Die Kurve hat keine andern reellen Schnittpunkte mit der x-Axe.

Im Falle $R > l$ sind die Punkte $y = \pm l$ der y-Axe doppelte Punkte der Kurve und die Kurve gleicht 4 geschlossenen Ovalen, die im Ursprung tangieren. (Fig. 7.)

Mit $R < l$ (Fig. 8) sind die Schnittpunkte mit der y-Axe imaginär und die Kurve lässt die beiden Geraden $y = \pm \left(\sqrt{l^2 - R^2}\right) x$ als doppelte Asymptoten zu.

Wenn wir nur den ursprünglichen Kurbeltrieb betrachten, so erhält man die Kurve des 2. Falles (Fig. 7) auch durch Projektion von C''' auf die Diagonale OC.

Ihre Gleichung würde man erhalten durch Austauschen von l gegen R und umgekehrt in den vorangehenden Gleichungen. Betrachten wir nun die Kurve M_1. Wir haben:

$$\varrho_{M_1} = y_C = \varrho_C \sin \varphi$$

Das Argument ist: $\Theta = \frac{3\pi}{2} + 2\omega$ und wir haben:

$$\sin \omega = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \Theta}{2}} \quad \text{und} \quad \cos \omega = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin \Theta}{2}}$$

Daraus ergibt sich:

$$\varrho_{M_1} = \left(R + \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi}\right) \frac{l \sin \omega}{R} = \left(R + \frac{\cos \omega}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}}\right) \cdot \frac{l \sin \omega}{R}$$

$$= \pm \frac{l}{R} \left(R + \sqrt{\frac{1 + \sin \Theta}{2 R^2 - l^2 (1 - \sin \Theta)}}\right) \sqrt{\frac{1 - \sin \Theta}{2}}$$

Die Gleichung in orthogonalen Koordinaten kann gleich wie bei den Kurven H_1, J_1 und K_1 behandelt werden und wie vorher können wir folgende Uebungen anschliessen:

Uebungen:

1. Konstruktion der Kurve M_1 in 2 Fällen.
2. Geometrische Diskussion über Ursprung, Schnittpunkte mit den Axen und Asymptoten der Kurve.

Bemerkung: Die gleichen Kurven F_1, H_1, J_1, K_1, M und M_1 können auf gleiche Weise wie vorher mit dem Rechteck $OAC'C'''$ erhalten werden.

XIV.

Kurve I. (Fig. 9 u. 10.) Diese Kurve ist der Ort der Punkte I, die man erhält, indem man vom Endpunkte B der Kurbel auf die Koppel ein Perpendikel errichtet und verlängert bis zum Schnittpunkt mit der Normalen von (A) in A.

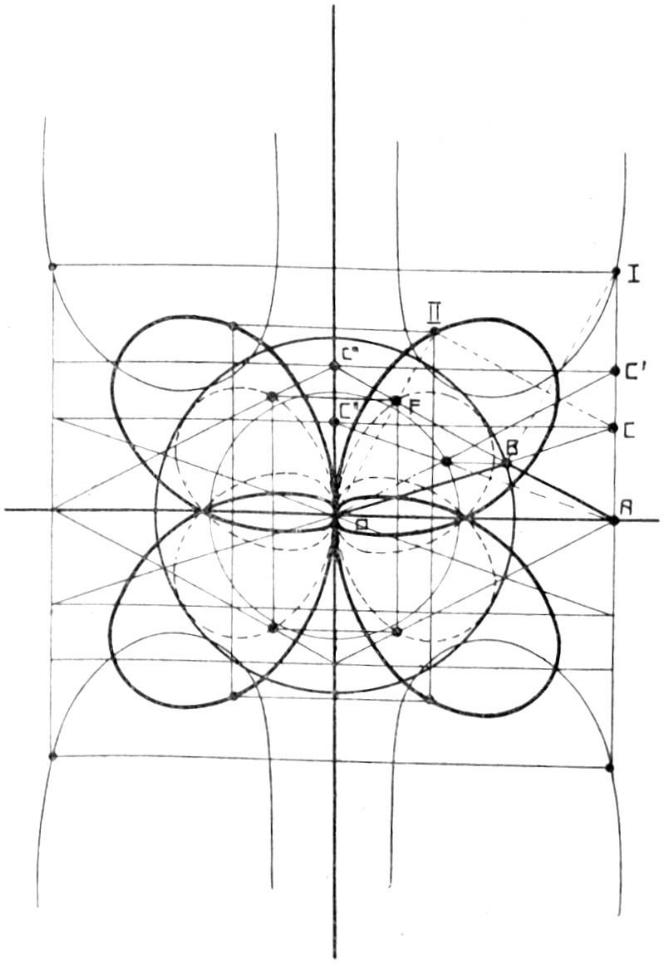

Fig. 9. Kurven I, F′ u. II mit $>$ 1.

Wir bezeichnen die Koordinaten von I mit x und y und diejenigen des Momentanzentrums C mit x_C und y_C. Wir haben:

$$x = x_C \text{ und } y = \frac{l}{\sin\omega} = \frac{l^2}{R\sin\varphi}$$

da aber $$\sin\varphi = \frac{y_C}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}},$$ so erhält man:

$$y = \frac{l^2\sqrt{x^2 + y_C^2}}{R\,y_C} \text{ und } R^2 y^2 y_C^2 = l^4(x^2 + y_C^2)$$

$$y_C^2 = \frac{l^4 x^2}{R\,y^2 - l^4} \text{ ferner } x_C = x$$

Man setzt diese letztern Werte in die Gleichung des Rollbettes, welches der Ort der Punkte C ist, ein und man erhält:

$$y^2 (x^2 + R^2 - l^2)^2 = 4 x^2 (R^2 y^2 - l^4)$$

Die Kurve ist von 6. Ordnung; die Koordinatenaxen sind die Symmetrieaxen. Der Ursprung ist ein isolierter Punkt. Ferner hat man:

$$- R - l < x < - R + l$$

$R - l < x < R + l$. Man hat ferner 4 Asymptoten:

$$x = \pm (R + l) \text{ und}$$

$$x = \pm (R - l).$$

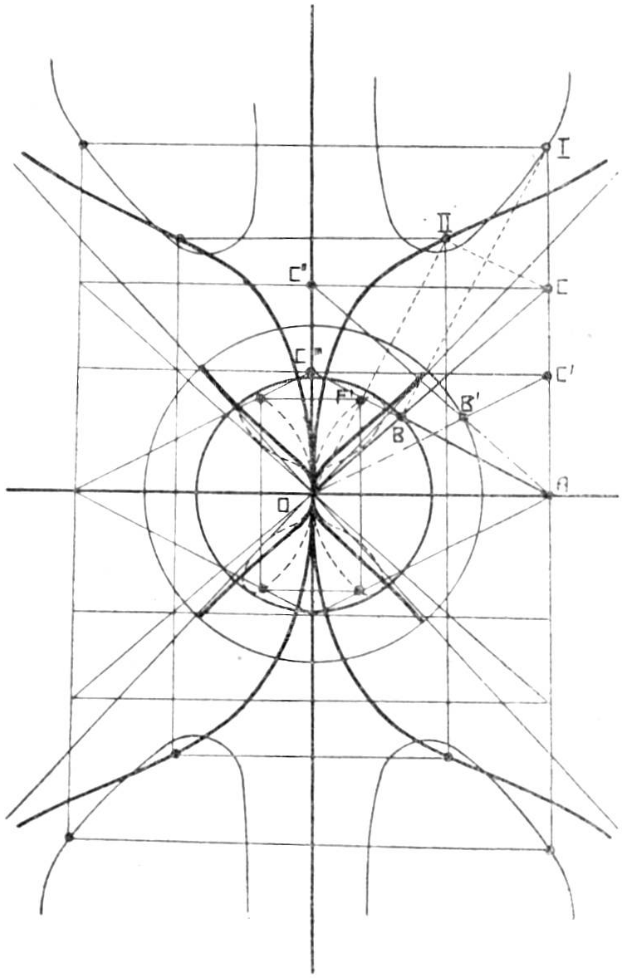

Fig. 10. Kurven I, F′ u. II. mit $R < l$.

Die Polargleichung der Kurve heisst:

$$(\varrho^2 \cos^2 \psi + R^2 - l^2)^2 \sin^2 \psi = \cos \psi (R^2 \varrho^2 \sin^2 \psi - l^4)$$

XV.

Kurven II und III. Wir haben die 2 Punkte C und C_1 der Kurve C gehabt, die bei jeder beliebigen Lage der Kurbel gleich weit vom Endpunkte B derselben entfernt sind. (Fig. 11 u. 12.)

Projizieren wir diese beiden Punkte auf die Normale OF′ der Koppel (OF′ $\perp$ AB), so erhalten wir die Punkte II und III und die gesuchten Kurven bilden den geometrischen Ort dieser Punkte II und III. (Fig. 9, 10, 11 u. 12.)

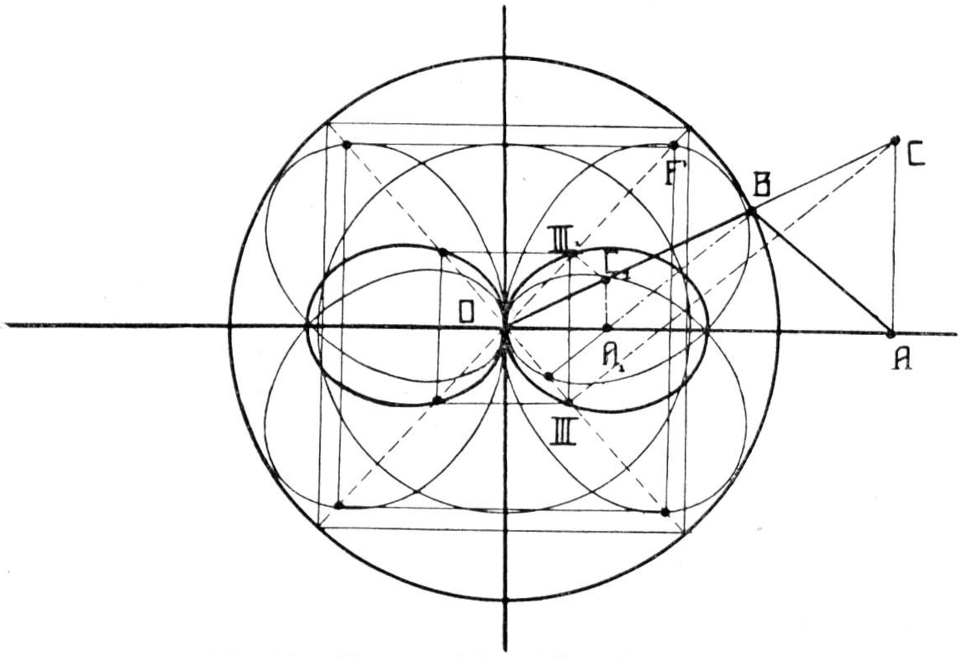

Fig. 11. Kurven F′ u. III mit R > l.

Wir haben: $\varrho = \mathrm{OII} = \mathrm{CO} \sin(\omega + \varphi)$
$= (\mathrm{R} + \cos\omega)\sin(\omega + \varphi)$

Das bezügliche Argument von ϱ ist $\Theta = 90 - \omega$; daraus folgt:

$$\varrho = \left(\mathrm{R} + \mathrm{l}\,\frac{\cos\omega}{\cos\varphi}\right)(\sin\omega\cos\varphi + \sin\varphi\cos\omega)$$

$$= \sin\omega\sqrt{\mathrm{R}^2 - \mathrm{l}^2\sin^2\omega} + 2\,\mathrm{l}\sin\omega\cos\omega + \frac{\mathrm{l}^2\sin\omega\cos^2\omega}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - \mathrm{l}^2\sin^2\omega}}$$

$$(\varrho - 2\,\mathrm{l}\sin\Theta\cos\Theta)^2 = \frac{\cos^2\Theta\,(\mathrm{R}^2 - \mathrm{l}^2\cos^2\Theta)^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{l}^2\cos^2\Theta}$$

Das ist die Polargleichung des Ortes der Punkte II.

Die Gleichung in orthogonalen Koordinaten bietet nichts von besonderem Interesse.

Die geometrische Diskussion der Kurve zeigt uns:

1. Die Koordinatenaxen sind Symmetrieaxen.
2. Der Ursprung ist ein vierfacher Punkt der Kurve.
3. Die y-Axe ist eine 4-fache Tangente der Kurve. Für $R > l$ ist sie viermal einfache Tangente und für $R < l$ ist sie viermal Krümmungstangente.
4. Für $R < l$ verschwinden diese doppelten Punkte, aber die Kurve lässt folgende Geraden zu:

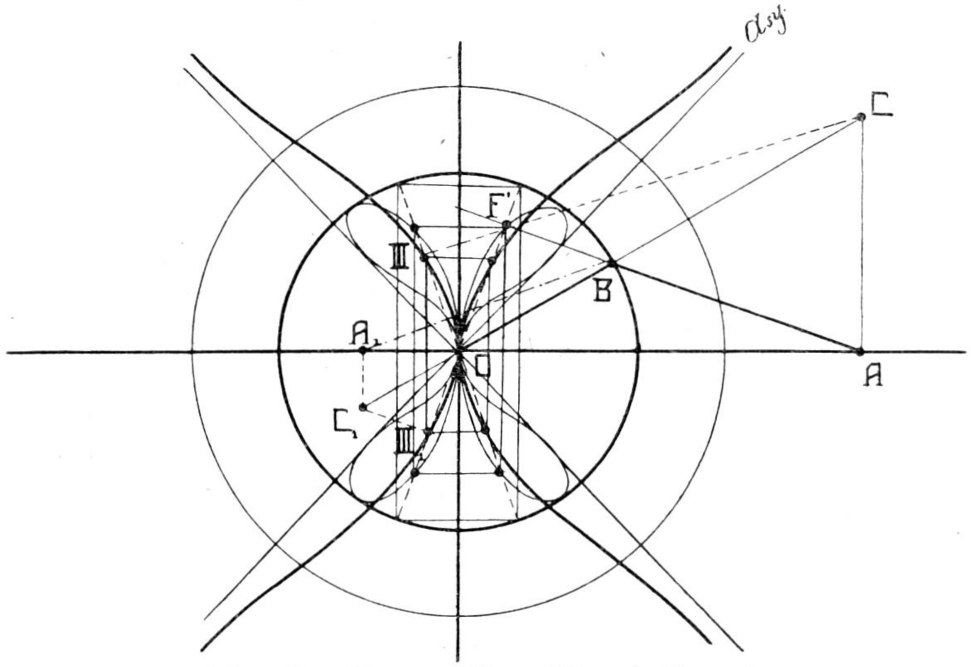

Fig. 12. Kurven F′ u. III. mit $R < l$.

$$y = +\sqrt{\frac{l'^2 - R'^2}{R}} \cdot x \text{ und } y = -\sqrt{\frac{l'^2 - R'^2}{R}} \cdot x$$

als doppelte Asymptoten. Die Asymptoten stehen senkrecht zu den Lagen von AB, für welche B auf der y-Axe und das Momentanzentrum C im Unendlichen liegt.

Betrachten wir nun die Kurve III näher (Fig. 11 u. 12), so finden wir, dass sie bedeutend einfacher ist, dass sie aber andere nicht weniger wichtige Eigenschaften aufweist. Wir haben zuerst:

$$\varrho = OC_1 \sin(\omega + \varphi) = \left(R - \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi}\right) \sin(\omega + \varphi)$$

$$\varrho = \left(R - \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi}\right)(\sin \omega \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega)$$

$$= \sin \omega \sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega} - \frac{l^2 \sin \omega \cos^2 \omega}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}}$$

$$\varrho = \frac{\sin \omega \left(R^2 - l^2 \sin^2 \omega - l^2 \cos^2 \omega\right)}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}} = \frac{\sin \omega \left(R^2 - l^2\right)}{\sqrt{R^2 - l^2 \sin^2 \omega}}$$

oder $\varrho^2 = \dfrac{\cos^2 \Theta \left(R^2 - l^2\right)^2}{R^2 - l^2 \cos^2 \Theta}$

In orthogonalen Koordinaten haben wir:

$$(x^2 + y^2)\left[R^2(x^2 + y^2) - l^2 x^2\right] = (R^2 - l^2)^2 x^2$$

Die Kurve ist vom 4. Grade. Die Koordinatenaxen sind Symmetrieaxen; der Ursprung ist ein Doppelpunkt und die y-Axe ist eine doppelte Tangente. Infolge der Symmetrie setzt sich der Doppelpunkt aus zwei entgegengesetzten Rückkehrpunkten zusammen.

Im Falle $R > l$ besitzt die Kurve zwei einfache und symmetrische Schnittpunkte auf der x-Axe, mit

$$x = \pm \sqrt{R^2 - l^2}$$

Der Ursprung ist der Berührungspunkt zweier geschlossenen, symmetrischen Kurvenäste.

Im Falle $R < l$ sind die andern Schnittpunkte mit der x-Axe imaginär und die Kurve lässt zwei einfache Asymptoten zu:

$$y = + \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{R} \cdot x \text{ und } y = - \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{R} \cdot x.$$

Diese Geraden sind die gleichen wie im vorangehenden Falle. Der Ursprung wird durch zwei Inflexionspunkte gebildet, die beide die y-Axe als Inflexionstangente zulassen.

Betrachten wir nun (Fig. 11) zwei Punkte C und C_1 des Rollbettes, die auf dem gleichen Strahle liegen und suchen wir die Lage von zwei korrespondierenden Punkten III und III_1.

Die Koppeln AB und A_1B sind symmetrisch, folglich werden die Normalen dieser Richtungen symmetrisch sein inbezug auf die x-Axe. Es seien ferner die bezüglichen Winkel der Koppeln $BAO = BA_1A = \omega$, dann haben wir:

$$BC = \lambda = \frac{l \cos \omega}{\cos \varphi}$$

$$OIII = (R + \lambda) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \omega + \varphi \right) = (R + \lambda) \sin (\omega - \varphi)$$

$$OIII_1 = (R - \lambda) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \omega - \varphi \right) = (R - \lambda) \sin (\omega + \varphi)$$

daraus folgt: $OIII = - OIII_1$.

Da wir nur die absoluten Werte der Vektoren betrachten, und da wir wissen, dass sie ferner symmetrische Argumente bilden, können wir daraus schliessen, dass die Punkte III und III_1 symmetrische Punkte seien.

Einen ähnlichen Schluss können wir im Falle $R < l$ ziehen und wir finden auf symmetrischen Strahlen zwei symmetrische Punkte inbezug auf den Ursprung.

Unter diesen Bedingungen wird die Kurve III die totale Bewegung der Koppeln, die symmetrisch auf jeder Seite der y-Axe liegen, doppelt durchlaufen. Mit $R > l$ erzeugt die vollständige Bewegung der Koppel rechts zweimal die rechte Seite der Kurve; mit $R < l$ erzeugt die gleiche Bewegung die zwei Aeste der Kurve aber nur einmal; wenn wir die Koppel links haben, so erzeugt sie dieselben noch einmal. Im ersten Falle durchläuft die linksstehende Koppel zweimal die linke Seite der Kurve.

XVI.

Tangenten: Wir wissen, dass die rollende Kurve des betrachteten Kurbeltriebes eine Konchoïde eines Kegelschnittes ist, inbezug auf einen Brennpunkt dieses letztern; die Konstante R der Konchoïde ist gleich der halben Axe a derselben.[5] Die Rollende ist die Kurve von Jerabek[6]. Es sei C der Kegelschnitt; die Brennpunkte sind F_1 und F_2 und das Zentrum 0. Wir bezeichnen die rollende Kurve mit K_1 (Fig. 13). Es ist eine Konchoïde von C inbezug auf F_2.

Wenn wir die Tangente in einem beliebigen Punkte M von K_1 bestimmen wollen, so ziehen wir $F_2 M$ bis a' auf dem Leitkreis von C inbezug auf F_2. In der Mitte von a' F_1 errichten wir ein Perpendikel, welches a gibt und die Tangente in a ist.

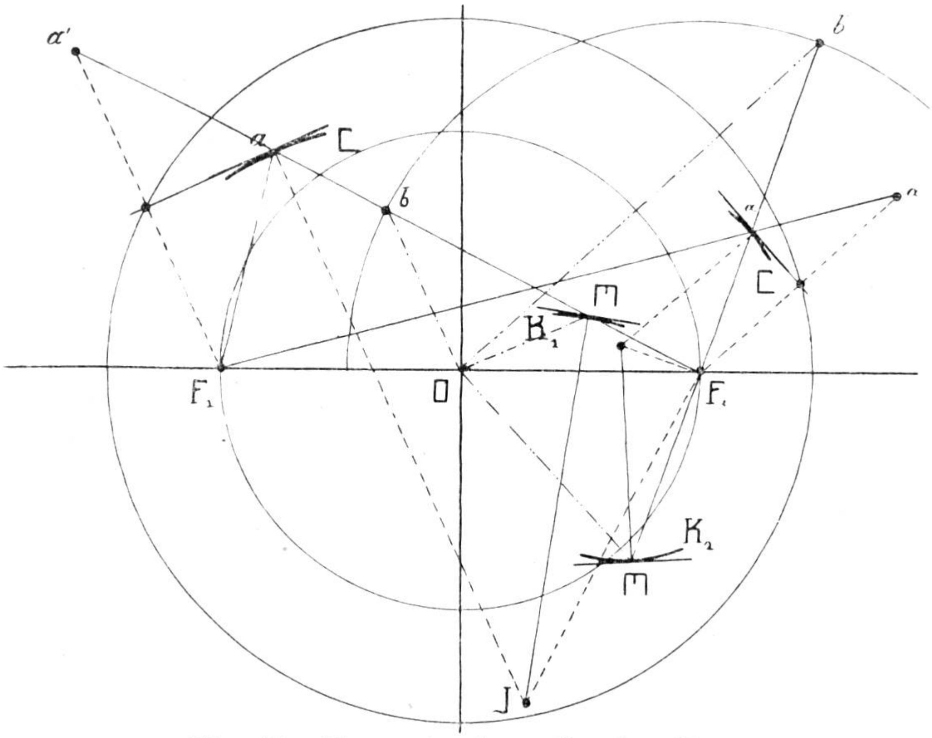

Fig. 13. Tangente der rollenden Kurve.

Ein Perpendikel zu dieser Tangente in a liefert die Normale von C. Sie schneidet die durch F_2 gehende Senkrechte von MF_2 in J. J ist dann das Momentanzentrum des Mechanismus, welcher aus der um F_2 drehbaren Geraden MF_2 besteht, und wovon ein bestimmter Punkt a der Geraden MF_2 den Kegelschnitt C beschreibt. Die Bahn von M, mit $aM = R =$ konstant, ist die rollende Kurve des ursprünglichen Kurbeltriebes. JM ist ihre Normale von M und das betreffende korrespondierende Perpendikel in M ist die gesuchte Tangente.

Wenn wir von K_1 ausgehen, ohne dass wir C kennen, so suchen wir zuerst die konstante R mit Ob $\perp$ OM und b auf F_2M. $\overline{F_2b}$ stellt R dar.[5]) Wir können ferner a' auf dem Leitkreise bestimmen mit $\overline{F_2a'} = 2\,R$. Man erhält dann a des Kegelschnittes, dann J und endlich die Tangente in M.

Der betrachtete Mechanismus, der durch eine Gerade, welche sich um F_2 dreht, gebildet wird, während ein bestimmter Punkt dieser Geraden auf einem Kegelschnitte gleitet, kann zu folgenden Uebungen führen.

1. Es sei das betreffende Rollbett graphisch und analytisch zu bestimmen.
2. Es sei davon die rollende Kurve zu bestimmen.
3. Es sei die Umhüllungskurve einer Parallelen oder einer Senkrechten der beweglichen Geraden zu bestimmen.

Aus dem Vorangehenden können wir die Konstruktion der Tangente in einem Punkte des Rollbettes des Kurbeltriebes OBA ableiten. Wir suchen die Tangente des Rollbettes für den Punkt C (Fig. 14). Wir wissen, dass das Rollbett und die Rollende in jedem Punkte C eine gemeinschaftliche Tangente besitzen und dass jeder Punkt C einer bestimmten Lage der Kurve K_1 entspricht.

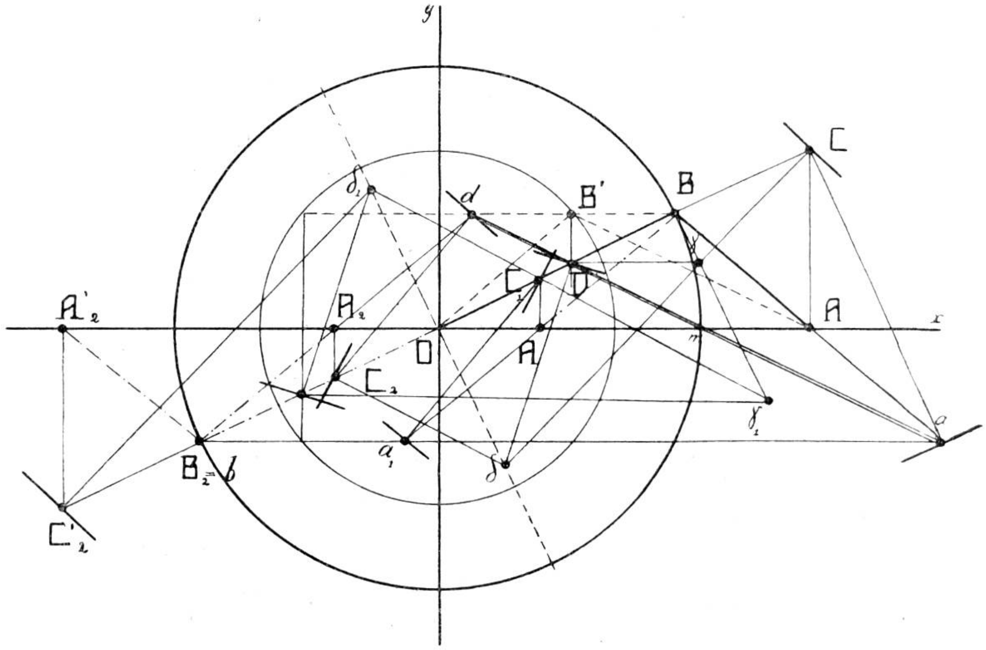

Fig. 14. Tangenten der Kurven C, D und (a).

Für unsern Punkt ist die rollende Kurve auf AB als Axe konstruiert. A ist der Mittelpunkt des Hülfskegelschnittes und B sein Brennpunkt, der als Fundamentalpunkt für die Konchoïde dient.

Unter diesen Bedingungen können wir die Tangente in C auf AB wie vorher konstruieren und wir finden so die Tangente des Rollbettes in C.

Die bezügliche Konstante der Rollenden ist die Kurbel R = OB. Wir erhalten den Punkt des Kegelschnittes auch, indem wir CD = R machen, sodass BD + D*a* = 2 R; *a* sei der 2. Brennpunkt des Hülfskegelschnittes.

Es ist zu bemerken, dass der Punkt des Kegelschnittes mit dem korrespondierenden Punkte der Kurve D zusammenfällt.

Anderseits gibt die Verlängerung von BC bis auf den Leitkreis den Punkt *b*, der ebenfalls auf dem Grundkreise liegt.

Die Gerade $\overline{ab}$ ist parallel mit der x-Axe, weil O und A die Mittelpunkte der Geraden $B\overline{b}$ und B*a* sind.

Die Tangente des Kegelschnittes in D ist also parallel zur y-Axe. Sie geht durch B′ und so ist die Normale des Kegelschnittes durch D eine Parallele zur x-Axe. Sie schneidet das Perpendikel auf BC durch B in γ.

Der Punkt γ ist das Momentanzentrum des erzeugenden Mechanismus der rollenden Kurve K_1.

γC ist die Normale in C und man erhält die Tangente durch das Perpendikel auf γC durch C.

Die vorangehende Konstruktion kann daher zur folgenden einfachen Regel führen.

«Man erhält die Normale in einem Punkte C des Rollbettes, indem man im Endpunkte B der Kurbel eine Senkrechte auf diese errichtet und durch den betreffenden Punkt D der Kurve eine Parallele zu Ox zieht. Die Verbindungsgerade γC des Schnittpunktes dieser Geraden mit C ist die gesuchte Normale.» (Fig. 14.)

Der bezügliche Punkt γ_1 der symmetrischen Lage A_1B der Koppel liegt auf der Verlängerung von Bγ und so, dass γ_1 in der Mitte durch die x-Axe geschnitten wird.

Nach den vorangehenden Konstruktionen können wir auch die Tangente der Kurve D in einem beliebigen Punkte D bestimmen. Der Ort der Punkte C ist eine Konchoïde der Kurve D inbezug auf den Ursprung O.

Wir haben also eine Gerade, die sich um den Ursprung dreht, während ein bestimmter Punkt derselben die Kurve D beschreibt.

Das Momentanzentrum für eine Lage des neuen Mechanismus befindet sich auf einer Normalen im Ursprung der beweglichen Geraden und auf der Normalen von D in D; die Normale von C geht durch diesen Punkt, weil DC = R = konstant. Die Normalen in C und in O sind bekannt; sie schneiden sich in δ; daher ist dieser Punkt das betrachtete Momentanzentrum. Folglich hat man auch die Normale OD in D, dann die entsprechende Tangente. Mit $C_1\gamma_1$ erhalten wir das Momentanzentrum δ_1.

Die Momentanzentren δ und δ_1, die 2 symmetrischen Lagen der Koppel entsprechen, liegen auf dem gleichen Strahle, in gleicher Entfernung vom Ursprung.

In der Tat können wir inbezug auf die Schnittpunkte C, C_1 und B den Strahl OB als eine Gerade betrachten, die sich an die drei Kurven anlehnt und die Normale einer derselben ist. Die Normalen in C und C_1 schneiden die Normale $O\delta$ der Umhüllungskurve von OB in den Punkten δ, δ_1, die folgendes ergeben:

$$CB : BC_1 = \delta O : O\delta_1$$

weil $$CB = BC_1;\ \text{daher}\ \delta O = O\delta_1.$$

XVII.

Andere Eigenschaften, die sich auf die Konstruktionen der Tangenten beziehen.

1. Gleichung der Kurve δ: Der Strahl $O\delta$ bildet einen Winkel Θ, der von φ abhängig ist. Wir haben (Fig. 14):

$$\Theta = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{3\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin\Theta = -\cos\varphi;\quad \cos\Theta = \sin\varphi$$

ferner $$O\delta = \varrho_C \operatorname{tg}(OC\delta) = \varrho_C \frac{B\gamma}{BC}$$

$$O\delta = \varrho_C \frac{R - \dfrac{l\cos\omega}{\cos\varphi}}{(\varrho_C - R)} \operatorname{tg}\varphi = \left.\frac{(R^2\cos^2\varphi - l^2\cos^2\omega)\sin\varphi}{l\cdot\cos\omega\cos^2\varphi}\right|;$$

$$\varrho^\delta = \frac{(R^2 - l^2)\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\varphi}}\ \text{woraus}\ \varrho_\delta = \frac{(R^2 - l^2)\cos\Theta}{\sin^2\Theta\sqrt{l^2 - R^2\cos^2\Theta}}$$

In orthogonalen Koordinaten erhalten wir:

$$x^4\left[l^2(x^2+y^2)-R^2y^2\right]=(R^2-l^2)\,y^2(x^2+y^2) \text{ oder}$$

$$(x^2+y^2)\left[(R^2-l^2)\,y^2-l^2y^4\right]=R^2y^2x^4.$$

Der Ursprung ist ein vierfacher Punkt. Im Falle $R > l$ wird dieser Punkt durch zwei Inflexionspunkte gebildet, die die Axe Oy als gemeinschaftliche Tangente zulassen. Die geometrische Diskussion ergibt, dass die Perpendikel auf die äussersten Kurbeln $y = \pm \frac{l}{\sqrt{R^2-l^2}} \cdot x$ Asymptoten sind, deren Gleichung ihrerseits lautet: $y = \mp \frac{\sqrt{R^2-l^2}}{l} \cdot x$.

Wir haben eine vollständige Symmetrie inbezug auf die Axen und das Zentrum. Der Kurbeltrieb rechts erzeugt selbst die ganze Kurve und der Kurbeltrieb links ergibt sie noch ein zweites Mal; dies sei erwähnt, weil bei vielen der vorangehenden Kurven jeder Kurbeltrieb nur eine Hälfte der ganzen Kurve erzeugt hat.

Mit $R < l$ liegen die unendlich fernen Punkte auf horizontalen Tangenten des Hilfskreises, dessen Radius gleich der Länge der Koppel ist. Diese Punkte sind nicht mehr die Schnittpunkte zweier paralleler Richtungen und die vorerwähnten Tangenten sind nicht mehr Asymptoten. Die zwei Kurvenäste sind parabolische Aeste.

2. Bahn von a mit $Aa = l$. Wir können zuerst an die Gleichung der Bahn des Punktes a auf der Verlängerung der Koppel erinnern oder die Gleichung aufstellen:

Wir haben: $Aa = l$ $aB = -2l$ und nach den allgemeinen Gleichungen der Bahnen der Koppel[7] erhalten wir:

$$(x^2-3y^2+4l^2-R^2)^2=16x^2(l^2-y^2)$$

Wenn wir dagegen direkt ableiten, so erhalten wir:

$$x = R\cos\varphi + 2l\cos\omega$$
$$y = -l\sin\omega, \text{ ferner}$$

$$x=\sqrt{R^2-y^2}+2\sqrt{l^2-y^2} \text{ oder}$$

$$(x^2-R^2-4l^2+5y^2)^2=16(R^2-y^2)(l^2-y^2)$$

Die beiden Gleichungen sind identisch; eine einfache algebraische Modifikation führt uns von der einen zur andern. Die so erhaltene Kurve ist auch der Ort des zweiten Brennpunktes a der Hilfskegelschnitte, die nötig waren zur Konstruktion der Tangenten.

Die Strahlen $\overline{Da}$ und DB sind die betreffenden Vektoren des Punktes D des Kegelschnittes.

Der Strahl $\overline{Da}$ ist parallel dem Strahle AB′ des Hauptkreises und $\overline{Da}$ verlängert bis BB′ parallel zur Normalen gibt $\overline{Dd} = \overline{BD}$ und $\overline{ad} = 2\,R =$ Konstante des Kegelschnittes. Im übrigen ist die Mitte M von $\overline{ad}$ auf der x-Axe.

Wir wollen nun den Ort der Punkte d suchen.

$$x = 2\,l\cos\omega - R\cos\varphi$$
$$y = +\,l\sin\omega \qquad \text{woraus}$$
$$x = 2\sqrt{l^2 - y^2} - \sqrt{R^2 - y^2}$$
$$(x^2 - R^2 - 4\,l^2 + 5\,y^2)^2 = 16\,(R^2 - y^2)\,(l^2 - y^2)$$

Diese Kurve ist ebenfalls die Bahn von a.

Daraus ergibt sich folgender Lehrsatz:

Lehrsatz: Im Kurbeltrieb besteht eine bewegliche Gerade von fester Länge 2 R, die durch den Punkt D geht und symmetrisch zum Strahl ODB liegt, so dass ihr Mittelpunkt auf der x-Axe gleitet, während ihre Endpunkte die Bahn (a) eines Punktes a der Koppel mit $\overline{Aa} = R$ durchlaufen.

oder mit andern Worten:

Die Sehnen der Bahn (a), die symmetrisch zu den Strahlen OB liegen und durch die verschiedenen Punkte D gezogen sind, haben feste Länge 2 R und werden durch die x-Axe in gleiche Teile geteilt.

3. Tangenten in d. Die Normale $\overline{aC}$ von (a) in a und die Senkrechte $m\varepsilon$ zu Ox durch m ergeben das bezügliche Momentanzentrum der Bewegung der Geraden $\overline{ad}$. Die Normale in d geht daher durch den Punkt ε und man kann daraus die betreffende Tangente ableiten. Es ist weiter zu bemerken, dass diese Normale $d\varepsilon$ durch den entsprechenden Punkt des Rollbettes

geht. Die Gerade $\overline{db}$, symmetrisch zu Ba ergibt die Koppel A_2B_2, welche mit $\overline{d}$ auf der Rollbahn (a) korrespondiert und von A_2 findet man das Momentanzentrum C_2, auf dem Rollbett, durch welches die Normale $\overline{d\varepsilon}$ gehen muss. Der Punkt C_2 ist zu C_1 symmetrisch inbezug auf das Zentrum.

Die Normalen in C_2 und C'_2, welches symmetrische Punkte von C und C_1 sind, gehen auch durch δ und δ_1, wegen der Symmetrie. Die bezüglichen Hauptaufgaben der Bewegung der Sehne $\overline{ad}$ können in folgenden Uebungen abgeleitet werden.

Uebungen:

1. Geometrische Diskussion der Bahn (a) für $R \gtrless 1$.
2. Geometrische Diskussion der Bewegung von $\overline{ad}$ in den 2 Fällen $R \gtrless 1$.
3. Aufstellung und Besprechung des Ortes der Momentanzentren ε.

Ich möchte an diesem Orte Herrn M. Baumann in Lengnau, der die Uebersetzung meines Manuskripts besorgt hat, herzlich danken.

Literaturverzeichnis.

		Seite
1.	*L. Crelier:* «Systèmes cinématiques» . . . . Gauthier-Villars «Scientia», Paris	91
2.	*L. Crelier:* id.	58
3.	*L. Crelier:* id.	83
4.	*H. Wieleitner:* Spezielle ebene Kurven . . . . Göschen «Sammlung Schubert», Leipzig.	71
5.	*L. Crelier:* Sys. cinématiques «Scientia»	55
6.	*H. Wieleitner:* Spezielle ebene Kurven	107
7.	*L. Crelier:* Sys. cinématiques «Scientia»	94