Konrad Witzig.

Ueber erzwungene Wellenbewegungen zäher, inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen Röhren.

I. Teil.

Historische Einleitung.

Die Bestrebungen, den Vorgang der Blutzirkulation genau zu erforschen, führten schon E. Weber[1]) im Jahre 1827 auf den Gedanken, die Pulsbewegungen experimentell zu verfolgen. Hiebei stellte er fest, dass diese Pulsbewegung im ganzen Arteriensystem nicht momentan erfolgt, wie bisher angenommen wurde, sondern eine gewisse, messbare Geschwindigkeit besitzt. Er fand, z. B., dass die Welle eine Röhre von 35,5 mm. Durchmesser, 4 mm. Dicke und 9620 mm. Länge bei einem Druck von 8 mm. Wassersäule in 0,964 Sek. durchläuft, sodass also die Geschwindigkeit za. 10 m/Sek. beträgt.

W. Weber[2]) suchte die von seinem Bruder E. Weber experimentell erhaltenen Resultate auf mathematischem Wege herzuleiten. Er bestimmte die Differenz der Flüssigkeitsvolumina, welche durch zwei unendlich benachbarte Querschnitte einer elastischen Röhre, im Abstande dx voneinander, in dem Zeitelement dt hindurchgehen; sie muss gleich der Vergrösserung des Volumens der Röhre zwischen diesen beiden Querschnitten sein. Ist c die veränderliche Geschwindigkeit der Flüssigkeit, r der veränderliche Radius der Röhre und ist $c \cdot dr << r \cdot dc$ d. h. die Geschwindigkeit sehr klein, so ergibt sich:

$$-\frac{dc}{dx} = \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}.$$

Die Elastizität der Röhre wurde dadurch berücksichtigt, dass die Zunahme des Röhrenhalbmessers der Zunahme des Druckes p proportional gesetzt wurde, also

$$dr = a\,dp,$$

wo $a = \frac{\varepsilon}{P}$ = Vergrösserung des Röhrenhalbmessers pro 1 kg Druck,

ε = „ „ „ bei p kg. „ .

Diese Annahmen führen auf die bekannte Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{r}{2 a \varrho} \frac{d^2 r}{dx^2},$$

wo ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet.

Der Wert $\frac{r}{2 a \varrho}$ drückt das konstante Verhältnis der beiden partiellen Differentialquotienten aus, und dieser ist nach den Gesetzen der Wellenbewegung gleich dem Quadrat der Wellengeschwindigkeit V. Also ist nach W. Weber

$$V = \sqrt{\frac{r}{2 a \varrho}} = \sqrt{\frac{M}{2}},$$

wo M der Elastizitätsmodul nach Webers Auffassung bedeutet. Derselbe ist, entgegen der gewöhnlichen Definition, gleich demjenigen spec. Druck (Druck dividiert durch die Dichtigkeit der Flüssigkeit), welcher nach dem Gesetz der Elastizität einer Verdoppelung des Röhrenhalbmessers entspricht.

Die Webersche Formel ergibt für eine Röhre von 16,5 mm. Radius, bei einem Druck von 3500 mm. Wassersäule, eine Geschwindigkeit von 10033 mm/Sek. Die unmittelbare Messung ergab eine Geschwindigkeit vom 11255 mm/Sek., was mit der Rechnung soweit übereinstimmt, als bei der damals erreichbaren Genauigkeit erwartet werden kann. Resal[3]) schlägt einen ähnlichen Weg ein wie Weber und findet, wenn

v = Geschwindigkeit der Flüssigkeit in Richtung der Achse,
e = Dicke der Röhrenwand,
R_0 = Innerer Radius der Röhre,
π = Dichte der Flüssigkeit,
g = Beschleunigung der Schwerkraft,
ds = Abstand zweier unendlich benachbarter Querschnitte der Röhre,
E = Yongs Elastizitätsmodul der Dehnung,

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{Eeg}{2 R_0 \pi} \cdot \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

Somit folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle

$$V = \sqrt{\frac{E\,e\,g}{2\,R_0\,\pi}}.$$

Dieser Formel entspricht auch die Webersche, wenn $\frac{1}{\varrho} = \frac{g}{\pi}$ und $\frac{r}{a} = \frac{Ee}{R_0}$ gesetzt wird. Eine genaue Bestimmung beider verschieden definierten Elastizitätsmoduln führt also auf die nämlichen Resultate.

Korteweg[4]) behandelt das Problem der Berechnung der Schallgeschwindigkeit in elastischen Röhren. Er legt die sog. Scheibchenhypothese zu Grunde. Dabei wird angenommen, dass irgend ein, zwischen zwei auf der Röhrenachse senkrecht stehenden Ebenen eingeschlossenes Flüssigkeitsscheibchen während des Vorbeischreitens der Verdichtungswelle, zwar in radialer Richtung breiter und in achsialer Richtung schmäler wird, aber immer durch Ebenen begrenzt bleibt, so dass von Verbiegungen dieser Ebenen abgesehen wird. Ferner wird angenommen, dass die Wellenlänge gross genug sei, um bei den in der Röhrenwand entstehenden Spannungen nur auf die Ausdehnung oder Einschnürung des ringförmigen Durchschnittes, senkrecht zu der Achse, achten zu müssen, während die Dehnungen in Richtung der Achse vernachlässigt werden dürfen.

Der von Korteweg eingeschlagene Weg ist nun folgender: Bezeichnen:

R_1 = Innerer Radius der Röhre,
a_1 = Dicke der Röhrenwand,
E_1 = Elastizitätsmodul der Röhrenwand,
E = Elastizitätsmodul der Flüssigkeit (für inkompressible Flüssigkeit ist $E = \infty$),
ϱ_1 = Spec. Masse der Röhrenwand,
ϱ = „ „ „ Flüssigkeit,
x = Entfernung eines Flüssigkeitsteilchens im Gleichgewicht von einer zur x Achse senkrecht stehenden Ebene,
w = Druck daselbst,
u_1 = Änderung von x, zur Zeit t,
p_1 = „ „ w, „ „ „
r_1 = „ „ R_1 „ „ „

so ergibt sich:

1) Durch Vergleichung des Volumens eines Scheibchens im Gleichgewichtszustande und während der Wellenbewegung:

$$\frac{p_1}{E} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{2\, r_1}{R_1} = 0.$$

2) Durch Berechnung der Beschleunigung des Scheibchens vermöge des Druckunterschiedes:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

3) Unter Berücksichtigung der Elastizität der Röhrenwand:

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} = \frac{p_1 - \dfrac{E_1\, a_1\, r_1}{R_1^2}}{a_1\, \varrho_1},$$

oder bei Vernachlässigung der geringen Trägheit der Röhrenwand

$$p_1 = \frac{E_1\, a_1\, r_1}{R_1^2}.$$

Unter diesen Voraussetzungen erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left(\frac{\varrho}{E} + \frac{2\, \varrho\, R_1}{E_1\, a_1}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0.$$

Diese Beziehung gilt, wenn sowohl Flüssigkeit als Röhrenwand elastisch sind, und enthält die Fälle, wo entweder nur die Flüssigkeit, oder nur die Röhre als elastisch zu betrachten ist.

Für inkompressible Flüssigkeiten, wenn $E = \infty$, folgt:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{2\, \varrho\, R_1}{E_1\, a_1} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0$$

und hieraus die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,

$$V = \sqrt{\frac{a_1\, E_1}{2\, \varrho\, R_1}};$$

dies ist wiederum die Resalsche Form, wenn $\frac{1}{\varrho} = \frac{g}{\pi}$ gesetzt wird.

Diese Formel gilt nur unter den folgenden Bedingungen:

1) Wellenlängen gross gegenüber dem Röhrendurchmesser.
2) Vernachlässigung der lebendigen Kraft der Transversalbewegung der Flüssigkeit gegen die der longitudinalen.
3) Elastizitätsmodul unabhängig von der Grösse der Belastung.

4) Flüssigkeit inkompressibel, ohne Berücksichtigung der Zähigkeit.

5) Vernachlässigung der durch die Biegung der Röhrenwand erzeugten Längstensionen.

Wenn E_1^1 den Yong'schen Elastizitätsmodul der Dehnung bezeichnet, dann ist

$$E_1 = E_1^1 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) \frac{a_1}{2 R_1} \right\}$$

wo λ und μ die Lame'schen Konstanten der Elastizität bedeuten. Setzt man nach Wertheim $\lambda = 2\mu$, so ist

$$E_1 = E_1^1 \left(1 - \frac{5 a_1}{6 R_1}\right).$$

Boussinesq[5]) findet in seiner Untersuchung über dieses Problem dieselben Resultate wie Korteweg.

Eine exakte Behandlung der Gesetze der Schallausbreitung in Flüssigkeiten, im Innern elastischer, zylindrischer Röhren, ohne Rücksicht auf die Zähigkeit, wurde von Lamb[6]) durchgeführt. Die Ableitung der von ihm gegebenen Gleichungen folgt später. Er findet, dass die Geschwindigkeit in dünnen Röhren zwischen

$$\frac{1 - \sigma^2}{1 + \frac{2 a \varkappa}{h B}} c_o^2 \text{ und } \frac{1}{1 + \frac{2 a \varkappa}{h B}} c_o^2 \text{ liegt.}$$

Hierin bedeuten:

a = Innerer Radius der Röhre.

h = Dicke der Röhrenwand.

c_0 = Geschwindigkeit in der unbegrenzten Flüssigkeit.

$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ = Poissonscher Koeffizient, wo λ und μ (Steifigkeit) die bekannten Lame'schen Elastizitätskonstanten sind.

$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ = Yong's Elastizitätsmodul der Röhre,

$B = \frac{E}{1 - \sigma^2}$

$\varkappa$ = Kubische Kompressibilität der Flüssigkeit = $\varrho_0 c_0^2$, wo ϱ_0 = Dichte der Flüssigkeit.

Für inkompressible Flüssigkeiten, d. h. für sehr grosse $\varkappa$, werden diese Grenzen:

$$\frac{E h}{2 a \varrho_0} \quad \text{und} \quad \frac{B h}{2 a \varrho_0},$$

also auch hier, da sich B nur wenig von E unterscheidet, eine prinzipielle Übereinstimmung mit der Resalschen Formel.

V. Kries[7]) gibt ebenfalls eine angenäherte math. Theorie der Schlauchwellen. Diese Untersuchung enthält schon die wichtigsten qualitativen Resultate über den Einfluss der innern Reibung auf die Wellenbewegung im elastischen Schlauch. Allein dieser Einfluss ist hier in ganz allgemeiner Weise eingeführt, unter Beibehaltung der Scheibchenhypothese und ohne Rücksicht auf die speziellen Eigenschaften der Zähigkeit inkompressibler Flüssigkeit. Soll dieselbe exakt berücksichtigt werden, so sind die vollständigen hydrodynamischen Gleichungen zu benützen. V. Kries geht aus von der Korteweg entsprechenden Formel (pag. 4)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x},$$

ergänzt dieselbe durch ein Reibungsglied, das allgemein der Geschwindigkeit proportional gesetzt ist, aber behält immer noch die Scheibchenhypothese bei, also

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta v.$$

Für den Druck p wird dann

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{e Q}{\sigma} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Hierin bedeuten:

Q = Querschnitt der Röhre.

x = Abstand eines Querschnittes vom beliebig gewählten Anfangspunkt.

σ = Dichte der Flüssigkeit.

p = Druck.

q = Frequenz in 2π Sekunden.

ε = Dämpfungskonstante (für lange Wellen $= \frac{\eta}{2\alpha}$ also sehr klein).

α = Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle.

$\frac{e\,Q}{\sigma} = \alpha_0^{\,2}$ ist einfach V^2 = Quadrat der Wellengeschwindigkeit nach Resal.

Aus obiger Gleichung folgt für die Geschwindigkeit der Welle

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{2\,\alpha_0^{\,2}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{q^2}}\right)$$

und für die Dämpfung

$$\varepsilon^2 = \frac{q^2}{2\,\alpha_0^{\,2}}\left(\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{q^2}} - 1\right).$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle nimmt demnach mit zunehmender Reibung ab und ist umso grösser, je grösser q, d. h. je kleiner die Wellenlänge. Die Dämpfung ε wächst mit steigendem q; kurze Wellen werden stärker gedämpft als lange.

Für kleine Reibung findet er ausserdem für die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen in Richtung der Röhrenachse

$$v = e^{-\varepsilon x}\,\frac{A}{\sigma \cdot \alpha}\,\frac{q/\alpha}{\sqrt{(q/\alpha)^2 + \varepsilon^2}}\,\cos q\left(t - \frac{x}{\alpha} + \delta\right)$$

Ohne Reibung ergab sich

$$v = \frac{p}{\sigma\,\alpha} = e^{-\varepsilon x}\,\frac{A}{\sigma\,\alpha}\cos q\left(t - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Man sieht, dass (bei sinusförmigen Wellen) die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen mit oder ohne Reibung in doppelter Weise modifiziert ist; erstlich ist der absolute Betrag der Geschwindigkeitsschwankungen kleiner, zweitens findet eine gewisse Phasendifferenz statt.

Über das Fliessen zäher Flüssigkeit in Röhren bestehen Arbeiten von Boussinesq[8]) u. a. Die nachfolgende Untersuchung im III. und IV. Teil soll den Einfluss der Zähigkeit auf die Wellenbewegung in elastischen Röhren ermitteln.

II. Teil.

Elementare Betrachtung der Wellenbewegung inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen, zylindrischen Röhren unter periodisch veränderlichem Druck, ohne Rücksicht auf die Zähigkeit.

Die Flüssigkeit bewege sich im Innern einer unendlich langen, zylindrischen Röhre von gleichförmigem Querschnitt und sei an der Grenzfläche einem elastischen Druck unterworfen. Die wirbelfreie Bewegung werde aus dem Ruhezustand durch Kräfte erzeugt, die nur anfänglich wirken, so dass nachher alle äussern Kräfte, also auch die Schwerkraft, vernachlässigt werden. Im weitern werde angenommen, dass die Bewegung sehr klein sei, sodass die Quadrate der Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen vernachlässigt werden können.

Es bezeichne:

p = Druck in der Flüssigkeit (als Überdruck über den im Ruhezustand vorhandenen konstanten Druck aufgefasst).

a = Elastizitätskonstante der Röhre (in gleicher Weise definiert wie bei Weber, pag. 2).

R = Innerer Radius der Röhre in Ruhe.

Δr = Erweiterung des Röhrenhalbmessers unter dem Drucke p zur Zeit t.

ϱ = Dichte der inkompressiblen Flüssigkeit.

q = Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t mit den Koordinaten x parallel zur Röhrenachse und dem radialen Abstand r von derselben.

u, w = Komponenten dieser Geschwindigkeit parallel zur x Richtung bezw. zur radialen Richtung.

Wir benützen, da die Bewegung wirbelfrei ist, das Geschwindigkeitspotential; dann ist

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

wo φ = Geschwindigkeitspotential.

Die Elastizität der Röhre führen wir ein durch den einfachen Ansatz:

$$p = p_0 + \frac{1}{a} \Delta r \quad \text{für } r = R. \tag{1}$$

Es gelten folgende hydrodynamischen Beziehungen:

1. Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \tag{2}$$

2. Das bekannte Integral der Eulerschen Bewegungsgleichungen.[9]

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t) \tag{3}$$

wo $F(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit darstellt, die in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ eingeschlossen werden darf.

Für p setzen wir den Wert aus Gl. (1) in Gl. (3) ein, die konstante Grösse $\frac{p_0}{\varrho}$ wird ebenfalls in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ eingeschlossen, dann folgt, da q^2 verschwindend klein, und wenn $\frac{1}{a\varrho} = \varkappa$ gesetzt wird:

$$\Delta r = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{für } r = R. \tag{4}$$

Bei den verschwindend kleinen radialen Amplituden der Bewegung, wird die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen der Normalkomponente der Grenzfläche in erster Annäherung gleich sein, somit:

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial (\Delta r)}{\partial t} \quad \text{für } r = R. \tag{5}$$

Differentieren wir Gl. (4) nach t und addieren Gl. (5), so folgt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = R. \tag{6}$$

Für stehende Wellenbewegungen mit der Frequenz $\frac{\sigma}{2\pi} = n$ und der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ setzen wir

$$\varphi = P \cos k x \, e^{i(\sigma t + \varepsilon)} \tag{7}$$

wo P nur eine Funktion von r darstellt.

Diesen Wert für φ führen wir in Gl. (6) ein und bekommen

(8) $$\sigma^2 \varphi = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{für } r = R.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (2) erhalten wir durch Einsetzen von (7)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - P k^2, \text{ oder weil } - k^2 = (ik)^2$$

(9) $$\frac{\partial^2 P}{\partial (ikr)^2} + \frac{1}{ikr} \cdot \frac{\partial P}{\partial (ikr)} + P = 0.$$

Dies ist die bekannte Form der Besselschen Differentialgleichung.[10]) Hieraus ergibt sich als allgemeines Integral

$$P = A \overset{0}{J}(ikr) + B \overset{0}{Y}(ikr),$$

wo $\overset{0}{J}(ikr)$ = Besselsche Funktion nullter Ordnung 1. Art und

$\overset{0}{Y}(ikr)$ = » » » » 2. »

In der Röhre darf P natürlich nie unendlich gross werden. Da aber $\lim\limits_{r=0} \overset{0}{Y}(ikr) = \infty$, so muss das Glied mit $\overset{0}{Y}(ikr)$ verschwinden, d. h. es muss die Konstante $B = o$ sein. Es bleibt deshalb als Integral der Gl. (9)

(10) $$P = A \overset{0}{J}(ikr).$$

Diesen Wert in Gl. (7) eingesetzt ergibt:

(11) $$\varphi = A \overset{0}{J}(ikr) \cos kx\, e^{i(\sigma t + \varepsilon)}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung folgt nach Gl. (8)

(12) $$\sigma^2 = - \varkappa \frac{k\, i \overset{1}{J}(ikR)}{\overset{0}{J}(ikR)}$$

Dieser Ausdruck ist reell, da $i \overset{1}{J}(ikR)$ reell ist.

Nach Gl. (4) ergibt sich für die Erweiterung des Röhrenhalbmessers

(13) $$\Delta r = i \frac{A \overset{0}{J}(ikR) \cdot \sigma}{\varkappa} \cos(kx) \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}$$

oder, weil für uns nur der reelle Teil in Betracht kommt,

(13a) $$\Delta r = - \frac{A \sigma}{\varkappa} \overset{0}{J}(ikR) \cos(kx) \sin(\sigma t + \varepsilon).$$

Diese Gleichung stellt ein System stehender, radialer Wellen dar. Um ein System fortschreitender Wellen zu erhalten, superponieren wir, analog dem Vorgang in Lamb [9]) für Oberflächenwellen, 2 Systeme stehender Wellen von der gleichen Wellenlänge. Dabei müssen sie einen Phasenunterschied von ¼ Wellenlänge aufweisen, damit die Berge und Täler des einen Systems mit den Knoten des andern zusammenfallen. Dann erhalten wir auf analoge Weise wie oben

(14) $$\varphi = A \overset{0}{J}(ikr)\, e^{i(\sigma t - kx)}$$

und

(15) $$\varDelta r = i \frac{A\sigma}{\varkappa} \overset{0}{J}(ik R)\, e^{i(\sigma t - kx)}$$

oder als reeller Teil

(15ª) $$\varDelta r = -\frac{A\sigma}{\varkappa} \overset{0}{J}(ik R) \sin(\sigma t - kx).$$

Es ist $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ die Wellenlänge, $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ die Schwingungsdauer, somit folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle aus $\lambda = c T$, $c = \frac{\sigma}{k}$, also nach Gl. (12)

(16) $$c = \sqrt{\frac{\varkappa}{k} \cdot \frac{-i\overset{1}{J}(ik R)}{\overset{0}{J}(ik R)}} = \sqrt{\frac{1}{a\varrho k} \cdot \frac{-i\overset{1}{J}(ik R)}{\overset{0}{J}(ik R)}}.$$

Dieser Ausdruck gilt für beliebige Wellenlängen. Wird aber λ im Verhältnis zu R sehr gross, dann wird

$$-i\overset{1}{J}(ik R) = \frac{\pi R}{\lambda} \text{ und } \overset{0}{J}(ik R) = 1, \text{ also}$$

(17) $$c = \sqrt{\frac{\varkappa}{k}\pi\frac{R}{\lambda}} = \sqrt{\varkappa\frac{R}{2}} = \sqrt{\frac{R}{2a\varrho}},$$ in Uebereinstimmung mit Weber (pag. 2), also auch mit Resal, Korteweg, etc. Unsere Berechnung zeigt somit, wie weit dieser Ausdruck bei kleiner werdenden Wellenlängen zu modifizieren ist.

III. Teil.

Wellenbewegung zäher inkompressibler Flüssigkeiten in dünnen, zylindrischen, elastischen Röhren.

§ 1. Die hydrodynamischen Gleichungen.

Die allgemeinen Gleichungen für zähe Flüssigkeit ohne Einwirkung äusserer Kräfte lauten nach Lamb [9]):

$$
\begin{aligned}
&\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\mu\triangle u-\frac{\partial p}{\partial x}\\
(18)\qquad&\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\mu\triangle v-\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\mu\triangle w-\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Hierin bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten parallel zu den Koordinaten Achsen in einem Punkte (x y z) zur Zeit t. Für irgend einen bestimmten Zeitmoment t geben sie die Bewegung in irgend einem Punkte des von Flüssigkeit erfüllten Raumes, wo $p =$ Druck, $\varrho =$ Dichte der Flüssigkeit, $\mu =$ Reibungskoeffizient ist und $\triangle$ das Symbol für $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bedeutet.

Da die Geschwindigkeit sehr klein vorausgesetzt ist, können die Grössen $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $v\frac{\partial u}{\partial y}$, $w\frac{\partial u}{\partial z}$ etc. gegenüber $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ etc. vernachlässigt werden, und es bleibt

$$
\begin{aligned}
&\varrho\frac{du}{dt}=\mu\triangle u-\frac{\partial p}{\partial x}\\
(19)\qquad&\varrho\frac{dv}{dt}=\mu\triangle v-\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\varrho\frac{dw}{dt}=\mu\triangle w-\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Da die Bewegungserscheinungen symmetrisch zur Röhrenachse sind, so führen wir die Zylinderkoordinaten x und r ein, wo die x-Achse mit der Röhrenachse zusammenfällt. Bezeichnet jetzt u die longitudinale Geschwindigkeitskomponente längs der x-Richtung und w die radiale Geschwindigkeitskomponente, so wird nach Stokes [11])

$$
(20) \quad \begin{aligned}
\varrho \frac{du}{dt} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \\
\varrho \frac{dw}{dt} &= \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{w}{r^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial r}
\end{aligned}
$$

Wir führen die Stokes'sche Stromfunktion ψ ein, indem wir setzen

$$
(21) \qquad u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{und} \quad w = +\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}.
$$

Damit wird die Kontinuitätsgleichung

$$
(22) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} w + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad \text{erfüllt.}
$$

Setzen wir in Gl. (20) $\frac{\mu}{\varrho} = \nu$ (wo ν der sog. kinematische Reibungskoeffizient ist), eliminieren den Druck p, indem wir die obere Gl. nach ∂r und die untere nach ∂x ableiten und die obere von der untern subtrahieren, so ergibt sich in symbolischer Schreibweise

$$
(23) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu . \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right] = 0.
$$

Nach (21) wird

$$
\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right),
$$

also wird Gl. (23)

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \right]
\left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] = 0,
$$

oder

$$
(24) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \cdot
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] \left(\frac{\psi}{r} \right) = 0.
$$

Zur Abkürzung sei symbolisch $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} = D$ gesetzt, dann lautet Gl. (24)

(25) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu D\right)\left(D\frac{\psi}{r}\right) = 0$$

Setzt man nach Stokes $\psi = \psi_1 + \psi_2$, wobei $D\left(\frac{\psi_1}{r}\right) = 0$, so ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu D\right)\left(D\frac{\psi_2}{r}\right) = 0 \text{ oder } D\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu D\right)\frac{\psi_2}{r}\right] = 0.$$

Die Gleichung (25) wird also auch erfüllt, wenn

a) $D\left(\frac{\psi_1}{r}\right) = 0$ und b) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu D\right)\frac{\psi_2}{r} = 0.$

Für ψ_1 und ψ_2 bestehen somit die folgenden Differentialgleichungen:

(26) $$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0$$

(27) $$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0.$$

Wir suchen ein partikuläres Integral dieser Gleichungen, das die Erscheinungen einer einfachen Sinuswellenbewegung mit vorgeschriebener Frequenz $n = \frac{\sigma}{2\pi}$ darstellt, setzen also sowohl ψ_1 wie auch ψ_2 proportional $e^{i(\sigma t + kx)}$. Es sei $\psi_1 = P.e^{i(\sigma t + kx)}$, wo P nur eine Funktion von r, dann wird Gl. (26)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} - k^2 P = 0 \quad \text{oder, weil } -k^2 = (ik)^2,$$

(28) $$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + (ik)^2 P = 0.$$

Hieraus folgt [12])

$$P = r\,[A_1 \overset{1}{J}(ikr) + E\,Y^1(ikr)]$$ also

weil auch hier $\lim\limits_{r=0} Y^1(ikr) = \infty$, muss die Konstante E, aus denselben Gründen wie früher, Null sein. Es wird daher

$$\psi_1 = r\,A_1\,J^1(ikr)\,e^{i(\sigma t + kx)}$$

Aber da $i\,J^1(ikr)$ reell ist, setzen wir $A_1 = i\,A$, also

(29) $$\psi_1 = r\,A\,i\,J^1(ikr)\,e^{i(\sigma t + kx)}$$

Da nach obigem auch $\psi_2 = P' e^{i(\sigma t + kx)}$, wird Gl. (27), wenn $-k^2 = (ik)^2$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P'}{\partial r} + (ik)^2 P' - \frac{i\sigma}{\nu} P' = o$$

oder, wenn

(30) $$\frac{i\sigma}{\nu} + k^2 = \beta^2$$ gesetzt wird,

(31) $$\frac{\partial^2 P'}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P'}{\partial r} + (i\beta)^2 P'.$$

Diese Form entspricht genau derjenigen der Gl. (28), deshalb folgt

$$P' = r\,B\,J^1(i\beta r)$$

also, wenn wir statt B, analog wie bei (29), i C setzen,

(32) $$\psi_2 = r\,C\,i\,J^1(i\beta r)\,e^{i(\sigma t + kx)}$$

Da $\psi = \psi_1 + \psi_2$, so wird

(33) $$\psi = r\left[A\,i\,J^1(ikr) + C\,i\,J^1(i\beta r)\right] e^{i(\sigma t + kx)}$$

wo β durch Gl. (30) gegeben ist.

Durch diesen Ausdruck für ψ wird die Differentialgleichung (25) erfüllt. Gl. (33) ist also ein Integral derselben.

Um eine Beziehung zwischen der Stromfunktion ψ und dem Druck p zu finden, gehen wir aus von Gl. (20), in welcher wir $\frac{\mu}{\varsigma} = \nu$ und für u und w die Werte aus (21) einsetzen; dann ergibt sich:

(34) $$\begin{aligned} -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \delta t} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \delta t} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}. \end{aligned}$$

Durch Addition der Gl. (26) und (27) erhält man

(35) $$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial \psi_2}{\partial t}$$

Diesen Wert setzen wir in Gl. (34) ein und bekommen

(36) $$\begin{aligned} -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \delta t} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{\nu}\frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{1}{\nu}\frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right) &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}. \end{aligned}$$

Da aber $\psi = \psi_1 + \psi_2$, so folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varrho}{r}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\varrho}{r}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial t} \tag{37}$$

Diese Beziehungen finden sich bereits in der erwähnten Arbeit von Stokes[11]).

Es sollen p und ψ proportional $e^{i(\sigma t + kx)}$ sein. Dadurch beschränken wir unsere Untersuchung auf rein stationäre, fortschreitende Wellen mit bestimmt vorgeschriebenem Schwingungszustand für p.

Multipliziert man beide Gl. (37) mit r, übt auf die Erstere $\frac{\partial}{\partial x}$ und auf die Zweite $\frac{\partial}{\partial r}$ aus, addiert beide, so folgt:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{38}$$

Für $p = P''(r)e^{i(\sigma t + kx)}$ gesetzt, folgt aus (38) wenn $-k^2 = (ik)^2$ wieder die bekannte Bessel'sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 P''}{\partial (ikr)^2} + \frac{1}{ikr}\frac{\partial P''}{\partial (ikr)} + P = o. \tag{39}$$

Somit

$$P'' = C\overset{0}{J}(ikr) + D\overset{0}{Y}(ikr).$$

Auch hier muss $D = 0$ sein, damit p nicht für $r = o$ unendlich wird; es ist daher:

$$p = C\overset{0}{J}(ikr)e^{i(\sigma t + kx)} \tag{40}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (37) u. (29) wird

$$p = -A\varrho\sigma\overset{0}{J}(ikr)e^{i(\sigma t + kx)}. \tag{41}$$

Führt man in den Gl. (21) für ψ den Wert aus Gl. (33) ein, so erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten u und w die folgenden Ausdrücke:

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{aligned} u &= \left[Ak\overset{0}{J}(ikr) + C\beta\overset{0}{J}(i\beta r)\right]e^{i(\sigma t + kx)} \\ w &= \left[-AkJ^1(ikr) - CkJ^1(i\beta r)\right]e^{i(\sigma t + kx)}, \\ \text{wo}\quad & \\ p &= -A\varrho\sigma\overset{0}{J}(ikr)e^{i(\sigma t + kx)} \\ \psi &= r\left[Ai\overset{1}{J}(ikr) + Ci\overset{1}{J}(i\beta r)\right]e^{i(\sigma t + kx)} \end{aligned}\right.$$

$$\beta = \pm \sqrt{k^2 + \frac{i\sigma}{\nu}}.$$

Da aber k^2 für langen Wellen (wie sie für unsere Untersuchung allein in Betracht fallen) sehr klein und ν klein, also $\frac{\sigma}{\nu}$ gross gegenüber k^2, so kann man setzen

$$\beta = \pm \sqrt{i\frac{\sigma}{\nu}} = \pm \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}\sqrt{i} = q\sqrt{i}$$

Ferner kann für $k^2 \ll 1$, $\overset{0}{J}(ikr) = 1$ und $\overset{1}{J}(ikr) = \frac{ikr}{2}$ gesetzt werden, dann folgt:

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{aligned} u &= \left[Ak + Cq\sqrt{i}\,\overset{0}{J}(rq\sqrt{-i})\right]e^{i(\sigma t + kx)} \\ \text{wo}\quad w &= -\left[\frac{i}{2}Ak^2 r + CkJ^1(rq\sqrt{-i})\right]e^{i(\sigma t + kx)}, \\ p &= -A\varrho\sigma e^{i(\sigma t + kx)} \\ \psi &= r\left[-\frac{Akr}{2} + CiJ^1(rq\sqrt{-i})\right]e^{i(\sigma t + kx)} \end{aligned}\right.$$

§ 2. Die Gleichungen der Elastizität.

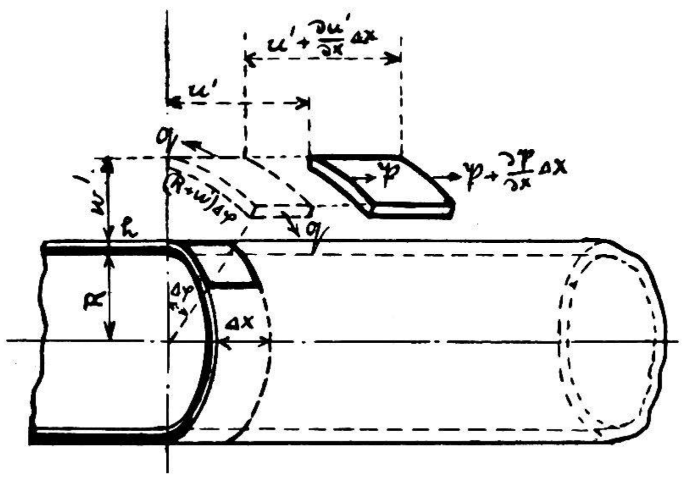


Fig. 1.

Wir greifen ein Volumelement der Röhrenwand heraus, bezeichnen es mit ΔV und setzen voraus, dass es so dünn sei, dass die Variation der Wanddicke vernachlässigt werden könne. Bezeichnet:

R = Innerer Radius der Röhre im Ruhezustand.

$\Delta\varphi$ = Winkel, unter dem das Element von der Röhrenachse aus erscheint.

h = unveränderliche Dicke der Röhrenwand.

Δx = Länge des herausgegriffenen Elementes.

u' = Verschiebung in der Längsrichtung bei Einwirkung eines radial gerichteten Druckes p.

w' = Verschiebung in radialer Richtung unter demselben Druck p.

$\mathfrak{P}$ = Spannung in Richtung der x-Achse.

$\mathfrak{Q}$ = Spannung in Richtung des Umfanges.

E = Yongs Elastizitätsmodul der Röhrensubstanz.

Θ = Poissonscher Koeffizient = Koeffizient der Querkontraktion zur Längendilatation. (Diese von Lamb abweichende Bezeichnung benützen wir, um die Verwechslung mit der Frequenz σ zu vermeiden.)

ϱ_0 = Dichte der Röhrensubstanz.

Es ist $\Delta V = r \cdot \Delta\varphi \cdot h \Delta x$, somit die Masse dieses Elementes

$$\Delta M = \varrho_0 \cdot r \cdot \Delta\varphi \cdot h \Delta x.$$

$$\text{Dehnung in der Längsrichtung} = \frac{\frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u'}{\partial x}.$$

$$\text{Dehnung in Richtung des Umfanges} = \frac{(R + w')\Delta\varphi - R\Delta\varphi}{R \cdot \Delta\varphi} = \frac{w'}{R}$$

$\frac{1}{h}\mathfrak{P}$ und $\frac{1}{h}\mathfrak{Q}$ sind die oben genannten Werte für die Dicke 1, so dass sich ergibt:

Dehnung in der Längsrichtung: $\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{1}{E \cdot h}(\mathfrak{P} - \Theta\mathfrak{Q})$

Dehnung in tangentialer Richtung: $\frac{w'}{R} = \frac{1}{Eh}(\mathfrak{Q} - \Theta\mathfrak{P})$.

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{P} = \frac{h \cdot E}{1 - \Theta^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \Theta \frac{w'}{R}\right) \tag{42}$$

und

$$\mathfrak{Q} = \frac{h \cdot E}{1 - \Theta^2}\left(\frac{w'}{R} + \Theta \frac{\partial u'}{\partial x}\right). \tag{43}$$

Wirkt aber in der Längsrichtung in irgend einem Querschnitt die Spannung $\mathfrak{P}$, so erreicht diese Spannung im Abstande Δx von diesem Querschnitt den Wert $\mathfrak{P} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \Delta x$. Die Kraftwirkung auf unser Volumelement in der Längsrichtung beträgt demnach

$$\left(\frac{\mathfrak{P}}{h} + \frac{\partial \mathfrak{P}/h}{\partial x} \Delta x\right) h \cdot R \cdot \Delta \varphi - \frac{\mathfrak{P}}{h} \cdot h \cdot R \cdot \Delta \varphi = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \Delta x \cdot R \cdot \Delta \varphi.$$

Somit, da die Beschleunigung in longitudinaler Richtung $\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}$ ist, $\varrho_0 \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot h \cdot \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \Delta x \cdot R \Delta \varphi$ also

$$\varrho_0 h \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}. \tag{44}$$

Da der innere Überdruck, welcher in Richtung wachsender r wirkt, p ist, so wirkt auf das Röhrenelement der Druck $p \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta x$; in entgegengesetzter Richtung wirkt infolge der Elastizität die Kraft $\frac{\mathfrak{Q}}{h} \Delta x \cdot h$ mit ihrer Komponente $\frac{2}{h} \mathfrak{Q} \Delta x \cdot h \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$ $= \mathfrak{Q} \cdot \Delta x \cdot h \Delta \varphi$. Somit, da die Beschleunigung in tangentialer Richtung $= \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}$,

$$\varrho_0 \cdot h \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = p \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta x - \mathfrak{Q} \cdot \Delta x \cdot h \cdot \Delta \varphi, \quad \text{also}$$

$$\varrho_0 h \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = p - \frac{1}{r} \mathfrak{Q} \tag{45}$$

Substituiert man Gl. (42) in (44) und (43) in (45), so erhält man die Lambschen Gleichungen.*)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2 u'}{d t^2} &= \frac{B}{\varrho_0}\left(\frac{d^2 u'}{d x^2} + \frac{\Theta}{R} \frac{d w'}{d x}\right) \quad \text{und} \\ \frac{d^2 w'}{d t^2} &= \frac{p}{h \varrho_0} - \frac{B}{\varrho_0}\left(\frac{\Theta}{R} \frac{d u'}{d x} + \frac{w'}{R^2}\right) \end{aligned}\right. \tag{46}$$

wo $B = \frac{E}{1 - \Theta^2}$.

*) Genau genommen müssen noch die durch die Zähigkeit der Flüssigkeit erzeugten Druckkomponenten mitberücksichtigt werden. Statt p wäre

Da u', w' und p proportional $e^{i(\sigma t + kx)}$, so ergibt sich:

$$(47)\quad \begin{cases} \left(c^2 - \frac{B}{\varrho_0}\right) u' + \frac{i\Theta}{kR} \cdot \frac{B}{\varrho_0} w' = 0 \qquad \text{und} \\ -\frac{\Theta i}{kR} \cdot \frac{B}{\varrho_0} u' + \left(c^2 - \frac{1}{k^2 R^2} \cdot \frac{B}{\varrho_0}\right) w' = -\frac{p}{k^2 h \varrho_0} \end{cases}$$

In den hydrodynamischen Gleichungen treten die Geschwindigkeitskomponenten auf und nicht die Verschiebungen wie in Gl. (47); wir setzen also $\frac{\partial u'}{\partial t} = u$ und $\frac{\partial w'}{\partial t} = w$, folglich sind diese Gleichungen noch nach der Zeit t zu differentieren. Sie lauten dann:

$$(48)\quad \begin{cases} \left(c^2 - \frac{B}{\varrho_0}\right) u + \frac{i\Theta}{kR} \cdot \frac{B}{\varrho_0} w = o \qquad \text{und} \\ -\frac{\Theta i}{kR} \cdot \frac{B}{\varrho_0} u + \left(c^2 + \frac{1}{k^2 R^2} \cdot \frac{B}{\varrho_0}\right) w = -\frac{i\sigma p}{k^2 h \varrho_0}. \end{cases}$$

§ 3. Bedingungsgleichungen für die Geschwindigkeit langer Wellen.

Die Gleichungen II charakterisieren die Bewegung der Flüssigkeit für lange Wellen. Die Gleichungen (48) dagegen diejenige der elastischen Röhre. An der Röhrenwand, für $r = R$, müssen die Geschwindigkeiten u und w der Gl. II denjenigen der Gl. (48) entsprechen. Wir führen die Werte aus II in (48) ein, sondern die Konstanten A und C ab, dann folgt aus (48)

$$(49)\quad \begin{cases} A \cdot \alpha + C\beta = o \\ A\gamma \quad + C\delta = o, \end{cases}$$

$p - 2\mu \frac{\partial w}{\partial r}$ zu setzen, ebenso ist in der tangentialen Richtung ein Zusatzglied zu $\mathfrak{Q}$ mit dem Faktor μ beizufügen. Diese Glieder können aber in den Gl. (46) im Verhältnis zu p und zum grossen Faktor $\frac{B}{\varrho_0}$ vernachlässigt werden, um so mehr als eine ev. Reibung in der elastischen Wand sowieso nicht berücksichtigt wird.

wo

$$
(50)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \mathrm{R\,k}\left(\mathrm{D} + \frac{\Theta \mathrm{b}}{2}\right) \\
\beta &= \overset{1}{\mathrm{J}}(\mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}})\left\{\mathrm{R\,q}\sqrt{\mathrm{i}}\,\mathrm{D}\,\frac{\overset{0}{\mathrm{J}}(\mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}})}{\overset{1}{\mathrm{J}}(\mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}})} - \mathrm{i}\,\Theta \mathrm{b}\right\} \\
\gamma &= \mathrm{i}\,\Theta \mathrm{b} + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{k}^2\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{c}^2}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{b}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\tau\sigma^2\mathrm{R}}{\mathrm{k}^2}\ (\text{wo } \sigma = \mathrm{k}\cdot\mathrm{c}) \\
\delta &= \overset{1}{\mathrm{J}}(\mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}})\left\{\mathrm{q}\sqrt{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{k}}\,\Theta \mathrm{b}\,\frac{\overset{0}{\mathrm{J}}(\mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}})}{\overset{1}{\mathrm{J}}(\mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}})}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \mathrm{R\,k}\left(\mathrm{c}^2 - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{k}^2\,\mathrm{R}^2}\right)\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

wenn $\frac{\mathrm{B}}{\varrho} = \frac{\mathrm{E}}{\varrho(1-\Theta^2)} = \mathrm{b}$, $\mathrm{c}^2 - \mathrm{b} = \mathrm{D}$ und $\frac{\varrho}{\varrho_0\,\mathrm{h}} = \tau$ gesetzt wird. Da die Determinante der Gl. (49) null sein muss, so erhalten wir als Bedingungsgleichung für k

$$
(51)\qquad \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma.
$$

Ferner ergibt sich aus Gl. (49) der Wert für die Konstante C

$$
(52)\qquad \mathrm{C} = -\frac{\mathrm{A}\cdot\alpha}{\beta}.
$$

Führt man in Gl. (51) die Werte (50) ein, berücksichtigt, dass $\mathrm{q}\sqrt{\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\mathrm{q}\sqrt{-\mathrm{i}}$, und setzt $\mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}} = \mathrm{Z}$, so ergibt sich

$$
(53)\quad
\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}\,\mathrm{D\,Z}\,\frac{\overset{0}{\mathrm{J}}(\mathrm{Z})}{\overset{1}{\mathrm{J}}(\mathrm{Z})} - \mathrm{i}\,\Theta\,\mathrm{b}\right\}\left\{\mathrm{i}\,\Theta \mathrm{b} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{b}}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{c}^2\left(\tau + \frac{\mathrm{k}^2\,\mathrm{R}^2}{2}\right)\right\} = \\
= &\left\{\frac{\Theta \mathrm{b}}{\mathrm{k\,R}}\cdot \mathrm{Z}\,\frac{\overset{0}{\mathrm{J}}(\mathrm{Z})}{\overset{1}{\mathrm{J}}(\mathrm{Z})} + \mathrm{R\,k}\left(\mathrm{c}^2 - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{k}^2\,\mathrm{R}^2}\right)\right\}\left\{\mathrm{R\,k}\left(\mathrm{c}^2 - \mathrm{b} + \frac{\Theta}{2}\,\mathrm{b}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Aber $\tau = \frac{\varrho}{\varrho_0\,\mathrm{h}}$ ist bei nicht zu dicken Röhrenwänden relativ groß, also kann für lange Wellen $\frac{\mathrm{k}^2\,\mathrm{R}^2}{2}$ gegenüber τ vernachlässigt werden.

Weil $\dfrac{\overset{0}{J}(Z)}{\overset{1}{J}(Z)}$ eine komplexe Grösse ist, setzen wir

$$(54)\qquad R\,q\sqrt{-i}\,\frac{\overset{0}{J}(R\,q\sqrt{-i})}{\overset{1}{J}(R\,q\sqrt{-i})} = Z\,\frac{\overset{0}{J}(Z)}{\overset{1}{J}(Z)} = P + i\,Q.$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$(55)\qquad S = b\left(\frac{1}{2} - \Theta\right);\quad L = 2\,D + \Theta\,b,$$

so ergibt Gl. (53)

$$(56)\qquad [D(P + i\,Q) + \Theta b][k^2 S - R\tau\sigma^2] + k^2\,[(P + i\,Q)\,\Theta\,b - b]\,\frac{L}{2} = 0.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung zur Berechnung von k.

Da k eine komplexe Grösse ist, setzen wir $k = m + i\,n$ wo $m = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$, $\lambda = c\,T =$ Wellenlänge, $T = \dfrac{2\,\pi}{\sigma} =$ Schwingungsdauer, n = Dämpfungskonstante in Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Den Wert für $k^2 = (m^2 - n^2) + i\,2\,mn$ und $\sigma = m \cdot c$ in Gl. (56) eingeführt, gibt:

$$(57)\qquad \begin{aligned} &- \tau\,m^2\,c^2[R\,D\,(P + i\,Q) + R\,\Theta\,b] + (m^2 - n^2 + i\,2\,mn) \\ &\quad \cdot [D\,(P + i\,Q) + \Theta\,b]\,S \\ &+ (m^2 - n^2 + i\,2\,mn)\,[(P + i\,Q)\,\Theta\,b - b]\,\frac{L}{2} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gestattet zunächst, das Verhältnis $\dfrac{m}{n}$ zu berechnen. Zerlegen wir sie in ihre reelle und imaginäre Komponente, ordnen nach den Variabeln n und m, so folgt:

$$(58)\qquad \begin{aligned} m^2\,\alpha' - n^2\,\beta' - 2\,mn\,\gamma' &= o \\ m^2\,\delta' - n^2\,\gamma' + 2\,mn\,\beta' &= o, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung folgende Setzungen gemacht werden:

$$(59)\qquad \begin{cases} \alpha' = D\left(\dfrac{P\,b}{2} - \tau\,c^2\,R\,P - b\right) + \Theta^2 b^2\left(\dfrac{P}{2} - 1\right) - \tau\,c^2\,R\,\Theta\,b \\ \beta' = \dfrac{b}{2}(P - 2)\,(D + \Theta^2\,b) \\ \gamma' = Q\left[\dfrac{b}{2}\,(D + \Theta^2\,b)\right] \\ \delta' = Q\left[D\left(\dfrac{b}{2} - \tau\,c^2\,R\right) + \dfrac{\Theta^2 b^2}{2}\right] \end{cases}$$

Dividiert man die Gl. durch m·n, addiert beide und ordnet, so folgt:

$$\frac{m}{n} = 2\,\frac{\beta'^2 + \gamma'^2}{\alpha'\gamma' - \beta'\delta'}\text{; die obigen Werte eingesetzt, ergibt:}$$

(60) $$\frac{m}{n} = 2\,\frac{b\,(c^2 - b + \Theta^2 b)\,(Q^2 + (P-2)^2)\,^{*)}}{2\,Q\,[2\,(c^2 - b) + \Theta\, b]\,\tau\, c^2\, R}$$

Wir berechnen ferner aus Gl. (56) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c. Zu dem Zweck schreiben wir sie wie folgt:

(61) $$\Big[D\,(P + i\,Q) + \Theta\, b\Big]\cdot\Big[2S - 2\tau R\,\frac{\sigma^2}{k^2}\Big] = -\Big[(P + i\,Q)\,\Theta\, b - b\Big]\,L.$$

Wir setzen links den Ausdruck

(62) $$2\,\tau\, R\,\frac{\sigma^2}{k^2} = X + i\,Y.$$

Die reellen und imaginären Teile der Gl. (61) sind dann:

1. Reeller Teil:

(63) $$-X\,[D\,P + \Theta\, b] + Y\,D\,Q = -2\,S\,[D\,P + \Theta\, b] - (P\,\Theta b - b)L$$

2. Imaginärer Teil:

(64) $$X D Q + Y\,[D\cdot P + \Theta\, b] = Q\,\Theta b L + 2\,S\cdot D\cdot Q.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Elimination von Y

(65) $$-X = \Big[(DP + \Theta b)\,\{-2\,S(D\cdot P + \Theta b) - (P\,\Theta b - b)\cdot L\,\} - D\,Q^2\,\{\,\Theta\, b\, L + 2\,S\cdot D\,\}\Big]\cdot\frac{1}{(D\,P + \Theta b)^2 + D^2\,Q^2}.$$

Löst man die Klammern auf und ordnet, so wird

(66) $$X = \frac{b\,(D + \Theta^2\, b)\,[(P-2)\,(D\cdot P + \Theta b) + Q^2\, D]}{(D\cdot P + \Theta b)^2 + D^2\, Q^2}.$$

---

*) Anmerkung: In den für uns in Betracht kommenden Fällen ist $\frac{m}{n}$ sehr gross. Denn für $\varrho = \varrho_0 = 1$, $b \sim 10^8$, $\Theta = 0{,}5$, $R\tau = 10$, $c^2 \sim 10^6$ (s. pag. 35—36) und den Werten für $Rq = 10$, $P \sim Q \sim 10$ (s. pag. 34) ergibt sich $\frac{m}{n} \sim \frac{10^8 \,.\, 10^8 \,.\, 10^2}{10 \,.\, 10^8 \,.\, 10^6 \,.\, 10} \sim 10^2$.

Es darf also jedenfalls n^2 gegen m^2, in erster Annäherung aber auch n gegen m vernachlässigt werden.

X ist der reelle Teil von $2\tau R \frac{\sigma^2}{k^2}$. Für $k = m + in$ wird, wenn $n^2 \ll m^2$ (s. Anmerkg. pag. 21), $X = 2\tau R c^2$.

Dies in Gl. (66) eingesetzt, ergibt in erster Annäherung, wenn c^2 zunächst gegen b vernachlässigt wird, also

$$D = -b = -\frac{B}{\varrho_0} \text{ und } D + \Theta^2 b = -b(1-\Theta^2) = -\frac{E}{\varrho_0}$$

gesetzt wird:

$$c^2 = \frac{h \cdot E}{2R\varrho} \cdot \frac{(P-2)(P-\Theta)+Q^2}{(P-\Theta)^2+Q^2} = c_0^2 K. \tag{67}$$

Ist die Reibung $\nu = o$, also $q = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}} = \infty$, so wird auch $P = Q = \infty$, also $K = 1$ und es bleibt

$$c_0^2 = \frac{h \cdot E}{2R\varrho}, \tag{68}$$ die von Resal gefundene Form (s. p. 3).

Der Ausdruck $K = \frac{(P-2)(P-\Theta)+Q^2}{(P-\Theta)^2+Q^2}$ berücksichtigt die Zähigkeit der Flüssigkeit, er ist also der Resalschen Formel als Korrektionsfaktor beizufügen.

Für eine genauere Berechnung kann der so korrigierte Wert in Gl. (66) eingeführt werden. Es wird dann in 2. Annäherung:

$$D = c^2 - b = c_0^2 K - b = -bH \qquad \text{wo}$$

$$H = 1 - \frac{c_0^2}{b} K = 1 - \frac{h(1-\Theta^2)}{2R} K \qquad \text{dann wird}$$

$$c^2 = c_0^2 \frac{H-\Theta^2}{1-\Theta^2} \cdot \frac{(P-2)(HP-\Theta)+HQ^2}{(HP-\Theta)^2+H^2Q^2} = c_0^2 K_0, \tag{69}$$

wo K_0 ein verbesserter Korrektionsfaktor ist. Wenn nötig, kann durch fortgesetzte Substitution in Gl. (66) der Wert von c^2 mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden.

§ 4. Die Longitudinale und die radiale Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen bei einfach harmonischer Schwingung von p.

In Gl. (52) ist die Konstante C durch die Konstante A ausgedrückt. Da C komplex ist, so schreiben wir zweckmässig, damit die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten u und w möglichst einfach ausfallen,

$$C = \frac{A\,k\,(\Phi + i\,\Psi)}{q\sqrt{i}} = \frac{A\,k\,(\Phi + i\,\Psi)\,(-\sqrt{-i})}{q}, \tag{70}$$

wo Φ und Ψ zu bestimmende Funktionen von R sind. Aus Gl. (52) folgt, wenn für α und β die Werte (50), sowie die Substitutionen L und Z Gl. (54) und (55) eingeführt werden.

$$\Phi + i\,\Psi = -\frac{L\,R\,q\sqrt{i}}{2\,J^1(Z)\left[D\,R\,q\sqrt{i}\,\dfrac{\overset{0}{J}(Z)}{J^1(Z)} - i\,\Theta\,b\right]}. \tag{71}$$

Nach unserer Setzung (54) wird im Nenner

$$R\,q\sqrt{i}\,\frac{\overset{0}{J}(Z)}{J^1(Z)} = \frac{R}{i}\,q\sqrt{-i}\,\frac{\overset{0}{J}(Z)}{J^1(Z)} = \frac{1}{i}(P + i\,Q).$$

Führen wir nun die Thomsonsche [12]) Bezeichnung ein

$$-\sqrt{-i}\,J^1(Z) = \mathrm{ber}'\,Z + i\,\mathrm{bei}'\,Z, \tag{72}$$ so wird

$$\Phi + i\,\Psi = -R\,q\sqrt{i}\,\frac{i}{\sqrt{-i}}\,\frac{L}{2[\mathrm{ber}'\,Z + i\,\mathrm{bei}'\,Z]\left[\dfrac{D}{i}(P + iQ) - i\Theta b\right]}$$

oder

$$\Phi + i\,\Psi = -\frac{i\,R\,q}{2[\mathrm{ber}'\,Z + i\,\mathrm{bei}'\,Z]}\cdot\frac{L}{D(P + i\,Q) + \Theta\,b}. \tag{73}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$M = D\,P + \Theta\,b \text{ und } D\,Q = N,$$

so erhält man aus (73) durch Trennung des reellen und imaginären Teiles

$$\tag{74} \left\{ \begin{aligned} \Phi &= -\frac{R\,q}{2}\cdot\frac{L\,(M\,\mathrm{bei}'\,Z + N\,\mathrm{ber}'\,Z)}{[\mathrm{ber}'\,Z^2 + \mathrm{bei}'\,Z^2]\,(M^2 + N^2)} \\ \Psi &= -\frac{R\,q}{2}\,\frac{L\,(M\,\mathrm{ber}'\,Z - N\,\mathrm{bei}'\,Z)}{[\mathrm{ber}'\,Z^2 + \mathrm{bei}'\,Z^2]\,(M^2 + N^2)}. \end{aligned} \right.$$

Wird in erster Annäherung c^2 gegenüber b vernachlässigt, also, weil $D = c^2 - b$, $L = b\,(\Theta - 2)$, $M = b\,(\Theta - P)$ und $N = -b\,Q$ gesetzt, so folgt

$$\tag{74^a} \left\{ \begin{aligned} \Phi &= -\frac{R\,q}{2}\,\frac{(2 - \Theta)\,[(P - \Theta)\cdot\mathrm{bei}'\,Z + Q\,\mathrm{ber}'\,Z]}{[\mathrm{ber}'\,Z^2 + \mathrm{bei}'\,Z^2]\cdot[(P - \Theta)^2 + Q^2)}. \\ \Psi &= -\frac{R\,q}{2}\,\frac{(2 - \Theta)\,[(P - \Theta)\,\mathrm{ber}'\,Z - Q\,\mathrm{bei}'\,Z}{[\mathrm{ber}'\,Z^2 + \mathrm{bei}'\,Z^2]\cdot[(P - \Theta)^2 + Q^2]}. \end{aligned} \right.$$

Mit der Substitution (70) ergeben die Gl. II:

Erstens: für die Geschwindigkeit u in Richtung der Röhrenachse, wenn wir $r q \sqrt{-i} = z$ setzen und nach Thomson

(75) $$\overset{0}{J}(r q \sqrt{-i}) = \mathrm{ber}\, z + i \,\mathrm{bei}\, z$$ einführen,

(76) $$u = A k \left[1 - (\Phi + i \Psi)\{\mathrm{ber}\, z + i \,\mathrm{bei}\, z\}\right] e^{i(\sigma t + kx)}$$

Da $k = m + i n$, wo aber n nach Gl. (60) gegenüber m vernachlässigt werden darf (s. Anmerkung auf pag. 23) folgt,

(77) $$u = A e^{-nx} m \left[1 - (\Phi + i \Psi)(\mathrm{ber}\, z + i \,\mathrm{bei}\, z)\right] e^{i(\sigma t + mx)}$$

Da wir im Folgenden nur die Schwingungen der Flüssigkeitsteilchen betrachten, die in der Gleichgewichtslage in einem bestimmten Querschnitt (z. B. $x = o$) liegen, so braucht auf diese Dämpfung nicht mehr weiter Rücksicht genommen zu werden, so dass wir den Faktor e^{-nx} weglassen. Er ergibt sich als reeller Teil aus Gl. (77):

(78) $$u = A m \left[(1 + \Phi \,\mathrm{ber}\, z - \Psi \,\mathrm{bei}\, z) \cos\chi - (\Psi \,\mathrm{ber}\, z + \Phi \,\mathrm{bei}\, z) \sin\chi\right],$$

wo $\chi = \sigma t + m x$

Bezeichnen wir den Koeffizient von $\sin\chi$ mit E und denjenigen von $\cos\chi$ mit F, so ist

$u = -E \sin\chi + F \cos\chi = G \cos(\chi + \delta)$, also $G = \pm\sqrt{E^2 + F^2}$

somit:

(79) $$\begin{cases} u = A m \sqrt{(1 + \Phi \,\mathrm{ber}\, z - \Psi \,\mathrm{bei}\, z)^2 + (\Psi \,\mathrm{ber}\, z + \Phi \,\mathrm{bei}\, z)^2} \cdot \cos(\chi + \delta), \\ \text{wo} \\ \mathrm{tg}\, \delta = \dfrac{E}{F} = \dfrac{\Psi \,\mathrm{ber}\, z + \Phi \,\mathrm{bei}\, z}{1 + \Phi \,\mathrm{ber}\, z - \Psi \,\mathrm{bei}\, z}. \end{cases}$$

Zweitens: für die Geschwindigkeit w in radialer Richtung, ebenfalls unter Vernachlässigung der Dämpfung n,

(80) $$w = -\frac{A m^2}{q}\left[\frac{iqr}{2} + (\Phi + i \Psi)(-\sqrt{-i}) J^1(r q \sqrt{-i})\right] e^{i(\sigma t + mx)}$$

und, wenn

(81) $$(-\sqrt{-i}) J^1(r q \sqrt{-i}) = \mathrm{ber}'z + i \,\mathrm{bei}'z,$$

ergibt der reelle Teil von (80):

(82) $$w = -\frac{A m^2}{q}\left[(\Phi \,\mathrm{ber}'z - \Psi \,\mathrm{bei}'z)\cos\chi - \left(\frac{qr}{2} + \Psi \,\mathrm{ber}'z + \Phi \,\mathrm{bei}'z\right)\sin\chi\right]$$

oder, analog behandelt wie u:

$$(83)\begin{cases} w = \dfrac{Am^2}{q}\sqrt{\left[\dfrac{qr}{2} + \Psi \operatorname{ber}'z + \Phi \operatorname{bei}'z\right]^2 + \left[\Phi \operatorname{ber}'z - \Psi \operatorname{bei}'z\right]^2}\cos(x + \delta^1), \\ \text{wo} \\ \operatorname{tg}\delta' = \dfrac{\dfrac{qr}{2} + \Psi \operatorname{ber}'z + \Phi \operatorname{bei}'z}{\Phi \operatorname{ber}'z - \Psi \operatorname{bei}'z} \end{cases}$$

§ 5. Untersuchung der Bewegung bei Annahme rein radialer Schwingung der Röhrenwand.

Die bisherigen Ausdrücke zeigen, dass stets u, die Geschwindigkeit in Richtung der Röhrenachse, ausserordentlich viel grösser ist als die Geschwindigkeit w senkrecht zur Röhrenachse. Die Röhrenwand macht also hauptsächlich longitudinale Schwingungen. Betrachten wir deshalb den speziellen Fall, wo sie nur radiale Schwingungen vollzieht.

Es sei also in der Röhre für $r = R$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Röhrenwand in Richtung der Röhrenachse $u = o$; ebenso setzen wir $\frac{dw}{dx}$, da dieser Betrag sehr klein ist, gleich null.

Aus Gl. (46) folgt unter dieser Annahme und unter Berücksichtigung der Bemerkung, die zu der Gl. (48) führte, sowie mit der Substitution $\frac{B}{\varrho_0} = b$,

$$(84)\qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{1}{h\varrho_0}\frac{dp}{dt} - \frac{b}{R^2}w \qquad \text{(für die Röhrenwand).}$$

p und w setzen wir auch hier proportional $e^{i(\sigma t + kx)}$, dann ist

$$(85)\qquad -\sigma^2 w = \frac{1}{h\varrho_0} i\sigma p - \frac{b}{R^2}w.$$

Es ist σ^2 gegenüber $\frac{b}{R^2}$ sehr klein, wir lassen es also weg und bekommen als Bedingungsgleichung für k:

(86) $$\frac{b}{R^2} w = i \frac{\sigma}{h\varrho_0} p. \text{*)}$$

Da wir an der Röhrenwand $r = R$, die Geschwindigkeit $u = o$ annehmen, folgt aus II

(87) $$\left\{ \begin{array}{l} A k + C q \sqrt{i}\, \overset{0}{J}(Z) = o, \qquad \text{hieraus} \\ C = - \dfrac{A k}{q \sqrt{i}\, \overset{0}{J}(Z)}. \end{array} \right.$$

Diesen Wert für die Konstante C führen wir im Ausdruck für w in II ein und bekommen für $r = R$ unter Berücksichtigung von (54)

(88) $$w = - A k^2 \left(\frac{iR}{2} - \frac{iR}{P + iQ} \right) e^{i(\sigma t + kx)}.$$

Diesen Wert in (86) eingesetzt, gibt

(89) $$k^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{P + iQ} \right) = \frac{\tau \sigma^2 R}{b}.$$

Aber $k^2 = (m^2 - n^2) + i\, 2 m n$, $\quad \sigma^2 = m^2 c^2$ und

$$\frac{1}{P + iQ} = \frac{P}{P^2 + Q^2} - i \frac{Q}{P^2 + Q^2}.$$

Also wird Gl. (89):

(90) $$(m^2 - n^2 + i\, 2 m n) \left(\frac{1}{2} - \frac{P}{P^2 + Q^2} + i \frac{Q}{P^2 + Q^2} \right) - m^2 c^2 \tau \frac{R}{b} = o;$$

hieraus ergeben sich für die reelle und imaginäre Komponente folgende Gleichungen:

(91) $$\left\{ \begin{array}{l} (m^2 - n^2) \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{P}{P^2 + Q^2} \right) - 2 m n \dfrac{Q}{P^2 + Q^2} - m^2 c^2 \tau \dfrac{R}{b} = o \\ (m^2 - n^2) \dfrac{Q}{P^2 + Q^2} + 2 m n \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{P}{P^2 + Q^2} \right) = o. \end{array} \right.$$

---

*) Bemerkung: Nach Gl. II wird für $\nu = o$, wenn keine Reibung vorhanden wäre, $w = - \frac{i}{2} A k^2 R e^{i(\sigma t + kx)}$ und $p = - A \varrho \sigma e^{i(\sigma t + kx)}$

Da $\sigma = k . c$, folgt aus Gl. (86)

$$c^2 = \frac{b h \varrho_0}{2 R \varrho};$$ dies ist wieder die Resalsche Form, wenn $b = \frac{B}{\varrho_0} = \frac{E}{\varrho_0}$ gesetzt wird, was in erster Annäherung statthaft ist.

Aus diesen beiden Gleichungen berechnet sich das Verhältnis $\frac{m}{n}$ zu:

$$\frac{m}{n} = -2 \frac{b\left\{\frac{1}{4}(P^2 + Q^2 - 2P)^2 + Q^2\right\}}{(P^2 + Q^2)\,Q c^2 \tau R} \tag{92}$$

Eine Überschlagsrechnung ergibt der Grössenordnung nach den nämlichen Wert wie Gl. (60), so dass wir auch hier zur Berechnung von c, n gegenüber m vernachlässigen können. Unter dieser Voraussetzung ergibt die 1. Gl. (91)

$$m^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{(P^2 + Q^2 - 2P)}{P^2 + Q^2} - m^2 c^2 \tau \frac{R}{b} = o \qquad \text{und}$$

hieraus, wenn durch m^2 dividiert wird, und die Werte von b und τ (pag. 20) eingesetzt werden,

$$c^2 = \frac{b}{\tau R} \cdot \frac{1}{2} \frac{(P^2 + Q^2 - 2P)}{(P^2 + Q^2)} = \frac{E h}{2 R \varrho} \frac{(P^2 + Q^2 - 2P)}{(1 - \Theta^2)(P^2 + Q^2)} \tag{93}$$

$$= \frac{Eh}{2 R \varrho} K',$$

wo K' das Korrektionsglied angibt, das der Resalschen Formel beigefügt wird.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit u bei radialen Schwingungen der Röhrenwand setzen wir den Wert der Konstanten C aus (87) in II ein und bekommen:

$$u = A k \left(1 - \frac{\overset{o}{J}(z)}{\overset{o}{J}(Z)}\right) e^{i(\sigma t + kx)}. \tag{94}$$

Für $k = m + in$ und mit der Thomsonschen Bezeichnung nach (75) und unter Vernachlässigung der Dämpfung in der x-Richtung, wird der reelle Teil in (94), wenn $\sigma t + m x = \chi$,

$$u = A m \left[\left(1 - \frac{\mathrm{ber} Z \cdot \mathrm{ber} z + \mathrm{bei} Z \cdot \mathrm{bei} z}{\mathrm{ber} Z^2 + \mathrm{bei} Z^2}\right) \cos\chi + \right. \tag{95}$$

$$\left. + \frac{\mathrm{ber} Z \cdot \mathrm{bei} z - \mathrm{bei} Z \cdot \mathrm{ber} z}{\mathrm{ber} Z^2 + \mathrm{bei} Z^2} \sin\chi \right],$$

oder analog behandelt wie Gl. (79)

$$
(96)\quad \begin{cases}
u = \dfrac{Am\cdot\cos(\chi+\delta)}{\operatorname{ber}Z^2+\operatorname{bei}Z^2}\sqrt{[\operatorname{ber}Z\cdot\operatorname{bei}z-\operatorname{bei}Z\cdot\operatorname{ber}z]^2+} \\
\qquad \overline{+[\operatorname{ber}Z^2+\operatorname{bei}Z^2-\{\operatorname{ber}Z\cdot\operatorname{ber}z+\operatorname{bei}Z\cdot\operatorname{bei}z\}]^2}, \\
\text{wo} \\
\operatorname{tg}\delta = -\dfrac{\operatorname{ber}Z\cdot\operatorname{bei}z-\operatorname{bei}Z\cdot\operatorname{ber}z}{\operatorname{ber}Z^2-\operatorname{bei}Z^2-[\operatorname{ber}Z\cdot\operatorname{ber}z+\operatorname{bei}Z\cdot\operatorname{bei}z]}.
\end{cases}
$$

Auf gleiche Weise ergeben sich aus II, nach Einführung der Gl. (87), für die **Geschwindigkeit in radialer Richtung** die folgenden Gleichungen:

$$
(97)\qquad w = -Ak^2\left[\frac{ir}{2}-\frac{J^1(z)}{q\sqrt{i}\,\overset{0}{J}(Z)}\right]e^{i(\sigma t+kx)}.
$$

Unter den nämlichen Bedingungen wie früher wird die reelle Komponente

$$
(98)\qquad w = Am^2R\left[\frac{\operatorname{ber}Z\operatorname{ber}'z+\operatorname{bei}Z\operatorname{bei}'z}{(\operatorname{ber}Z^2+\operatorname{bei}Z^2)Rq}\cos\chi \right.
\left. -\left\{\frac{\operatorname{ber}Z\operatorname{bei}'z-\operatorname{bei}Z\operatorname{ber}'z}{(\operatorname{ber}Z^2+\operatorname{bei}Z^2)Rq}-\frac{r}{2R}\right\}\sin\chi\right]
$$

oder

$$
(99)\quad \begin{cases}
w = \dfrac{Am^2\cdot\cos(x+\delta')}{q(\operatorname{ber}Z^2+\operatorname{bei}Z^2)}\sqrt{\left[\operatorname{ber}Z\operatorname{bei}'z-\operatorname{bei}Z\cdot\operatorname{ber}'z-\right.} \\
\qquad \overline{\left.\dfrac{rq}{2}\left(\operatorname{ber}Z^2+\operatorname{bei}Z^2\right)\right]^2+\left[\operatorname{ber}Z\operatorname{ber}'z+\operatorname{bei}Z\operatorname{bei}'z\right]^2} \\
\text{wo} \\
\operatorname{tg}\delta' = \dfrac{\operatorname{ber}Z\operatorname{bei}'z-\operatorname{bei}Z\operatorname{ber}'z-\dfrac{rq}{2}(\operatorname{ber}Z^2+\operatorname{bei}Z^2)}{\operatorname{ber}Z\operatorname{ber}'z+\operatorname{bei}Z\operatorname{bei}'z}.
\end{cases}
$$

§ 6. Untersuchung der Bahn eines einzelnen Flüssigkeitsteilchens.

Es seien (x, r) die Gleichgewichtskoordinaten eines Flüssigkeitselementes in einer Meridianebene. $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{r})$ die Koordinaten der Verschiebung aus dieser Mittellage. Nun ist:

$$
(100)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\mathfrak{x}}{dt}=\dfrac{d(x+\mathfrak{x})}{dt}=u=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \\
\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}=\dfrac{d(r+\mathfrak{r})}{dt}=w=+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}.
\end{cases}
$$

Für u und w setzen wir die gefundenen Werte aus den Gleichungen (79), (83), (96) und (99) ein und bezeichnen zur Abkürzung die Amplituden von u und w mit f bezw. F, dann ist

$$(101)\quad \begin{cases} d\mathfrak{x} = \mathrm{f} \cos(\sigma t + m(x + \mathfrak{x}) + \delta)\, dt \\ d\mathfrak{r} = F \cos(\sigma t + m(x + \mathfrak{x}) + \delta')\, dt. \end{cases}$$

Bei der Integration nach t können im Argument die mit dem kleinen Faktor m multiziplierten Werte x als konstant angesehen werden, also

$$(102)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathrm{f}\, \frac{1}{\sigma} \sin(\sigma t + m\, x + \delta) \\ \mathfrak{r} = F\, \frac{1}{\sigma} \sin(\sigma t + m\, x + \delta'). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich nach Elimination der Zeit t:

$$(103)\quad \mathfrak{x}^2 F^2 + \mathfrak{r}^2 \mathrm{f}^2 - 2\mathfrak{x}\mathfrak{r} \cdot F\mathrm{f} \cos(\delta' - \delta) = \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{f}^2 F^2 \sin^2(\delta' - \delta).$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse mit variabler Neigung der Achsen.

Zur Bestimmung dieser Neigung gegen die Röhrenachse transformieren wir die Gl. (103) auf ein neues Koordinatensystem, indem wir setzen:

$$(104)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}' \cos\gamma - \mathfrak{r}' \sin\gamma \\ \mathfrak{r} = \mathfrak{x}' \sin\gamma + \mathfrak{r}' \cos\gamma, \text{ woraus folgt} \\ \mathfrak{x}'^2 [F^2 \cos^2\gamma + \mathrm{f}^2 \sin^2\gamma - 2 F \mathrm{f} \cos(\delta' - \delta) \cos\gamma \sin\gamma] \end{cases}$$

$$+ \mathfrak{r}'^2 [F^2 \sin^2\gamma + \mathrm{f}^2 \cos^2\gamma + 2 F \mathrm{f} \cos(\delta' - \delta) \cos\gamma \cdot \sin\gamma]$$
$$- 2\, \mathfrak{x}'\mathfrak{r}' [F^2 \cos\gamma \sin\gamma - \mathrm{f}^2 \cos\gamma \sin\gamma + F \mathrm{f} \cos(\delta' - \delta)$$
$$\cdot (\sin^2\gamma - \cos^2\gamma)] - \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{f}^2 F^2 \sin^2(\delta' - \delta) = 0.$$

Um die Normalform herzustellen, muss die letzte Klammer Null sein, also:

$$(105)\quad F^2 \cos\gamma \sin\gamma - \mathrm{f}^2 \cos\gamma \sin\gamma - F \mathrm{f} \cos(\delta' - \delta)(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) = 0$$

hieraus folgt

$$(106)\quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2 F \mathrm{f} \cos(\delta' - \delta)}{F^2 - \mathrm{f}^2}$$

Da die Amplituden der Geschwindigkeit w senkrecht zur Röhrenachse stets sehr viel kleiner sind als diejenigen von u in Richtung der Röhrenachse, also $F \ll f$, so ist aus Gl. (106) ohne weiteres ersichtlich, dass die grossen Achsen der Ellipsen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen praktisch parallel zur Röhrenachse liegen.

IV. Teil.

Diskussion der erzwungenen Wellenbewegung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit.

§ 1. Zusammenfassung.

In unseren Untersuchungen des III. Teiles stellten wir die hydrodynamischen Gleichungen für die Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit auf und suchten unter Benützung der Stokes'schen Stromfunktion ein Integral für Wellenbewegungen im Innern einer unendlich langen, zylindrischen Röhre mit kreisförmigem Querschnitt, ohne Rücksicht auf die Schwerkraft. Hiebei ergab sich Gl. (33).

Die Grenzbedingungen der Flüssigkeitsbewegung folgten aus der Elastizitätstheorie mit der Annahme einer elastischen Röhrensubstanz und unter der Voraussetzung, dass die Röhre im Vergleich zum Durchmesser nur eine geringe Wandstärke besitze. Dabei wurde jedoch die Reibung im Innern der Röhrenwand unberücksichtigt gelassen, obwohl sie möglicherweise einen merklichen Einfluss auf die Fortpflanzung der Wellenbewegung der Flüssigkeit ausüben könnte.

Die ganze Betrachtung beschränkte sich auf einen stationären Zustand; auf die Entstehung der Wellen wurde nicht Rücksicht genommen. Die erzwungenen, fortschreitenden Wellen haben eine bestimmte gegebene Frequenz σ (in 2π Sek.) und haben eine sehr grosse Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, so dass also $k^2 \ll 1$ ist. Für den periodisch oszillierenden Druck wurde eine einfache cos. Schwingung angenommen, $p = - A\varrho\sigma\cos(\sigma t + kx)$, wo ϱ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet.

Die Dämpfung in Richtung der Röhrenachse ergab sich aus der komplexen Grösse $k = m + i\,n$, wo n die Dämpfungskonstante bedeutet. Wie sich aus der Ueberschlagsrechnung Seite 21 zeigte, ist das Verhältnis $\frac{n}{m}$ von einer zu vernachlässigenden Grössenordnung.

Unter diesen Bedingungen gelten unsere Gleichungen, die hier zusammengestellt sind.

I. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.

a) Für allgemeine Wellenbewegung.

In erster Annäherung:

$$c = \sqrt{\frac{h \cdot E}{2\,R\,\varrho}} \cdot \sqrt{\frac{(P-2)(P-\Theta)+Q^2}{(P-\Theta)^2+Q^2}} = c_0\sqrt{K}, \qquad \text{Gl. (68)}$$

wo $c_0 = \sqrt{\frac{h \cdot E}{2\,R\,\varrho}}$ die bekannte Formel von Resal ist, oder

in zweiter Annäherung:

$$c = \sqrt{\frac{h \cdot E}{2\,R\,\varrho}} \cdot \sqrt{\frac{H-\Theta^2}{1-\Theta^2} \cdot \frac{(P-2)(HP-\Theta)+HQ^2}{(HP-\Theta)^2+H^2Q^2}} = c_0\sqrt{K_0}, \qquad \text{Gl. (69)}$$

wo $H = 1 - \frac{c_0^2}{b}K$ und $b = \frac{B}{\varrho} = \frac{E}{\varrho\,(1-\Theta^2)}$.

b) Für rein radiale Schwingung der Röhrenwand.

$$c = \sqrt{\frac{h\,E}{2\,R\,\varrho}} \cdot \sqrt{\frac{P^2+Q^2-2\,P}{(1-\Theta^2)(P^2+Q^2)}} = c_0\sqrt{K'}. \qquad \text{Gl. (93)}$$

II. Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen.

a) Für allgemeine Wellenbewegung.

1) In Richtung der Röhrenachse:

$$u = A\,m\sqrt{(1+\Phi\,\mathrm{ber}\,z - \Psi\,\mathrm{bei}\,z)^2 + (\Psi\,\mathrm{ber}\,z + \Phi\,\mathrm{bei}\,z)^2}\cos(\chi+\delta), \qquad \text{Gl. (79)}$$

wo

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\Psi\,\mathrm{ber}\,z + \Phi\,\mathrm{bei}\,z}{1+\Phi\,\mathrm{ber}\,z - \Psi\,\mathrm{bei}\,z}.$$

2) In radialer Richtung senkrecht zur Röhrenachse:

$$w = \frac{Am^2}{q} \sqrt{\left[\frac{qr}{2} + \Psi \operatorname{ber}' z + \Phi \operatorname{bei}' z\right]^2 + \left[\Phi \operatorname{ber}' z - \Psi \operatorname{bei}' z\right]^2} \cdot \cos(\chi + \delta'),$$

wo

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{\frac{qr}{2} + \Psi \operatorname{ber}' z + \Phi \operatorname{bei}' z}{\Phi \operatorname{ber}' z - \Psi \operatorname{bei}' z}.$$

Gl. (83).

wo

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\frac{Rq}{2} \cdot \frac{(2-\Theta)[(P-\Theta)\cdot \operatorname{bei}'Z + Q \operatorname{ber}'Z]}{[\operatorname{ber}'Z^2 + \operatorname{bei}'Z^2][(P-\Theta)^2 + Q^2]}. \\ \Psi &= -\frac{Rq}{2} \frac{(2-\Theta)[(P-\Theta)\operatorname{ber}'Z - Q\operatorname{bei}'Z]}{[\operatorname{ber}'Z^2 + \operatorname{bei}'Z^2][(P-\Theta)^2 + Q^2]}. \end{aligned}\right\} \text{ Gl. } (74^a).$$

b) Für rein radiale Schwingung der Röhrenwand.

1) In Richtung der Röhrenachse:

$$u = \frac{Am \cos(\chi + \delta)}{\operatorname{ber} Z^2 + \operatorname{bei} Z^2} \sqrt{[\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{bei} z - \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{ber} z]^2 + [\operatorname{ber} Z^2 + \operatorname{bei} Z^2 - \{\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{ber} z + \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{bei} z\}]^2}$$

wo

Gl. (96).

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{bei} z - \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{ber} z}{\operatorname{ber} Z^2 - \operatorname{bei} Z^2 - [\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{ber} z + \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{bei} z]}.$$

2) In radialer Richtung, senkrecht zur Röhrenachse

$$w = \frac{Am^2 \cos(\chi + \delta')}{q(\operatorname{ber} Z^2 + \operatorname{bei} Z^2)} \sqrt{\left[\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{bei}' z - \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{ber}' z - \frac{rq}{2}\left(\operatorname{ber} Z^2 + \operatorname{bei} Z^2\right)\right]^2 + \left[\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{ber}' z + \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{bei}' z\right]^2}$$

wo

Gl. (99).

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{bei}' z - \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{ber}' z - \frac{rq}{2}(\operatorname{ber} Z^2 + \operatorname{bei} Z^2)}{\operatorname{ber} Z \cdot \operatorname{ber}' z + \operatorname{bei} Z \cdot \operatorname{bei}' z}$$

III. Die Elongationen x, r der Flüssigkeitsteilchen.

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{f}\,\frac{1}{\sigma}\sin(\sigma\,\mathrm{t} + \mathrm{m\,x} + \delta) \\ r &= \mathrm{F}\,\frac{1}{\sigma}\sin(\sigma\,\mathrm{t} + \mathrm{m\,x} + \delta') \end{aligned}\right\} \qquad \text{Gl. (102)}$$

$$\mathrm{tg}\,2\gamma = \frac{2\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{f}\cdot\cos(\delta' - \delta)}{\mathrm{F}^2 - \mathrm{f}^2} \qquad \text{Gl. (106)}$$

wo f = Amplitude bezw. Maximalwert von u
F = Amplitude bezw. Maximalwert von w
γ = Neigung der Achse der Bahnellipse zur Röhrenachse.

Ferner bedeuten in den obigen Ausdrücken

A = Eine Konstante, die sich aus $\mathrm{p} = \mathrm{A}\,\varrho\,\sigma\cos(\sigma\,\mathrm{t} + \mathrm{kx})$ bestimmen lässt.

E = Yong's Elastizitätsmodul der Dehnung.

Θ = Poissonscher Koeffizient (Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation).

ϱ_0 = Dichte der Röhrensubstanz.

h = Dicke der Röhrenwand.

R = Radius der Röhre.

ϱ = Dichte der Flüssigkeit.

$\mathrm{q} = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}$ wo ν = kinematischer Reibungskoeffizient (Viskosität) der Flüssigkeit, σ = Frequenz in $2\,\pi$ Sekunden.

$\mathrm{Z} = \mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}}$ und $\mathrm{z} = \mathrm{r\,q}\sqrt{-\mathrm{i}}$.

$\overset{0}{\mathrm{J}}(\mathrm{z}) = \mathrm{ber\,z} + \mathrm{i\,bei\,z}$ = Besselsche Funktion nullter Ordnung I. Art.

$-\sqrt{-\mathrm{i}}\,\mathrm{J}^1(\mathrm{z}) = \mathrm{ber'z} + \mathrm{i\,bei'z}$ = Besselsche Funktion I. Ordnung I. Art nach Thomsons Darstellungen.

$$\mathrm{P} + \mathrm{i\,Q} = \mathrm{Z}\,\frac{\overset{0}{\mathrm{J}}(\mathrm{Z})}{\mathrm{J}^1(\mathrm{Z})} = \mathrm{R\,q}\sqrt{-\mathrm{i}}\,\frac{\overset{0}{\mathrm{J}}(\mathrm{Rq}\sqrt{-\mathrm{i}})}{\mathrm{J}^1(\mathrm{Rq}\sqrt{-\mathrm{i}})} \qquad \text{(Gl. 54.)}$$

§ 2. Berechnung der Funktionen P und Q, die durch Bessel'sche Funktionen dargestellt sind, und Zusammenstellung der Konstanten.

Wir benützen nach obigem die von Thomson [13]) eingeführte Bezeichnung **ber**, für den reellen und **bei** für den imaginären Teil der Besselschen Funktion:

$$\overset{\circ}{J}(rq\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}(rq) + i\,\mathrm{bei}(rq)$$

$$-\sqrt{-i}\,J^1(rq\sqrt{-i}) = \mathrm{ber}'(rq) + i\,\mathrm{bei}(rq),$$

wo

$$\mathrm{ber}(rq) = 1 - \frac{(rq)^4}{2^2 4^2} + \frac{(rq)^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \frac{(rq)^{12}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2 12^2} + \cdots\cdots$$

$$\mathrm{bei}(rq) = \frac{(rq)^2}{2^2} - \frac{(rq)^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{(rq)^{10}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \cdots\cdots.$$

Es sei $\frac{Rq}{2\sqrt{2}} = \frac{Rq}{\sqrt{8}} = \varkappa$ und $Rq\sqrt{-i} = 2\varkappa\sqrt{2}\sqrt{-i} = x$;

ferner ist nach Gray and Mathews [14].

$$\frac{x}{2}\frac{\overset{\circ}{J}(x)}{J^1(x)} = 1 - \frac{(x/2)^2}{2} - \frac{(x/2)^4}{12} - \frac{(x/2)^6}{48} - \frac{(x/2)^8}{180} - \frac{13\,(x/2)^1}{8640}$$
$$- \frac{11\,(x/2)^{12}}{26880} - \cdots\cdots$$

Deshalb folgt näherungsweise für $\varkappa < 1$

$$\frac{Rq\sqrt{-i}}{2}\,\frac{\overset{\circ}{J}(Rq\sqrt{-i})}{J^1(Rq\sqrt{-i})} = \left(1 + \frac{\varkappa^4}{3} + \cdots\right)$$
$$+ i\varkappa^2\left(1 - \frac{\varkappa^4}{6} - \cdots\right)$$

Für $\varkappa > 1$ gibt Sommerfeld [15] näherungsweise den Wert

$$\frac{Rq\sqrt{-i}}{2}\,\frac{\overset{\circ}{J}(Rq\sqrt{-i})}{J^1(Rq\sqrt{-i})} = \left(\varkappa + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\varkappa}\right)$$
$$+ i\left(\varkappa - \frac{3}{64\varkappa} - \frac{3}{128\varkappa^2}\right).$$

Für $10 > \varkappa > 1{,}5$ gilt sehr genau nach Zenneck [16])

$$\frac{Rq\sqrt{-i}}{2}\,\frac{J^0(Rq\sqrt{-i})}{J^1(Rq\sqrt{-i})} = (0{,}997\,\varkappa + 0{,}277) + i\,(1{,}007\,\varkappa - 0{,}040).$$

Multiplizieren wir diese Gl. mit 2, so folgt für unsere Gl. (54)

$$Rq\sqrt{-i}\,\frac{J^0(Rq\sqrt{-i})}{J^1(Rq\sqrt{-i})} = P + iQ = 2\,(0{,}997\,\varkappa + 0{,}277)$$
$$+ i\,2\,(1{,}007\,\varkappa - 0{,}040) \text{ für } 1{,}5 < \varkappa \left(=\frac{Rq}{\sqrt{8}}\right) < 10.$$

Also wird:

$$P = 2\left(1 + \frac{q^4 R^4}{3 \cdot 64} + \ldots\right) \qquad \text{für } \varkappa < 1$$

$$P = 2\left(\frac{qR}{\sqrt{8}} + \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{8}}{64\,qR}\right) \qquad \text{für } \varkappa > 1$$

$$P = 2\left(\frac{0{,}997}{\sqrt{8}}\,qR + 0{,}277\right) \qquad \text{für } 10 > \varkappa > 1{,}5$$

und

$$Q = 2\,\frac{q^2 R^2}{8}\left(1 - \frac{q^4 R^4}{6 \cdot 64} \ldots\right) \qquad \text{für } \varkappa < 1$$

$$Q = 2\left[\frac{qR}{\sqrt{8}} - \frac{3\sqrt{8}}{64\,qR} - \frac{3 \cdot 8}{128\,q^2 R^2}\right] \qquad \text{für } \varkappa > 1$$

$$Q = 2\left[\frac{1{,}007}{\sqrt{8}}\,qR - 0{,}040\right] \qquad \text{für } 10 > \varkappa > 1{,}5$$

In der folgenden, Jahnke und Emde [12]) entnommenen Tabelle, sind für verschiedene Argumente Rq die numerischen Werte von P und Q,*) sowie von ber, bei, ber′ und bei′ angegeben.

Rq	P	Q	ber (Rq)	bei (Rq)	ber′ (Rq)	bei′ (Rq)
0	2,0000	0	1,000	0	0	0
0,5	2,0000	0,0626	0,999	0,063	— 0,008	0,249
1,0	2,0002	0,2494	0,984	0,249	— 0,062	0,499
1,5	2,0516	0,5554	0,921	0,558	— 0,210	0,730
2,0	2,1610	0,9612	0,752	0,972	— 0,493	0,917
2,5	2,3494	1,4272	0,399	1,457	— 0,944	0,998
3,0	2,6360	1,9016	— 0,221	1,938	— 1,569	0,881
3,5	2,9840	2,344	— 1,194	2,283	— 2,336	0,435
4,0	3,3556	2,746	— 2,563	2,293	— 3,135	— 0,491
4,5	3,7256	3,116	— 4,299	1,686	— 3,754	— 2,053
5,0	4,0860	3,474	— 6,230	0,116	— 3,844	— 4,354
5,5	4,4380	3,832	— 7,974	— 2,790	— 2,907	— 7,373
6,0	4,7874	4,186	— 8,858	— 7,335	— 0,293	— 10,846
8,0	6,1912	5,628	+ 20,974	— 35,017	+ 38,294	— 7,662
10,0	7,5880	6,874	+ 138,841	+ 56,370	+ 51,373	+ 135,230

*) Der Hälfte dieser Werte P und Q entsprechen in der Tabelle von Jahnke und Emde Seite 147, die Ausdrücke $\frac{w'}{w_0}$ bezw. $\frac{L_i' w}{w_0}$

Ueber die Grösse der in Flüssigkeiten und Röhrensubstanzen auftretenden physikalischen Konstanten geben die folgenden Tabellen Aufschluss.

1. Viskosität und Dichte einiger Flüssigkeiten.[17])

Flüssigkeit	Viskosität $\mu =$	beider Temp. t^0	Dichte ϱ
Wasser	0,0178 ÷ 0,0028	0 — 100	1
Terpentinöl	0,0146 ÷ 0,007	20 — 80	0,87
Olivenöl	0,808 — 0,115	20 — 80	0,91
Glyzerin	42 — 7,8	2,8 — 20,9	1,24
Blut *)	0,07 — 0,108	37°	1,053—1,066

2. Elastizitätskoeffizienten.[17])

Substanz	Elastizitätsmodul in Dyn/cm² E	Poissonscher Koeffizient Θ	Dichte ϱ_0
Eisen	$21000 \cdot 10^8$	0,243—0,310	7,8
Kupfer	$10500 \cdot 10^8$	0,348	8,9
Blei	$1700 \cdot 10^8$	0,375	11,4
Glas	$4700—7900 \cdot 10^8$	0,22—0,31	2,4—3,8
Holz	$500—1000 \cdot 10^8$	—	0,5
Kautschuk	$0,02—0,8 \cdot 10^8$	0,5	0,92—0,99

Für die numerischen Beispiele wählen wir die Konstanten so, wie sie etwa einer Röhre aus Kautschuk entsprechen, in welcher eine relativ zähe Flüssigkeit, wie z. B. Blut, mit einer Frequenz, die ungefähr der Pulsfrequenz entspricht, Wellenbewegungen ausführt.

Es sei $\varrho = \varrho_0 = 1$, $b = \frac{B}{\varrho_0} = \frac{E}{\varrho_0(1-\Theta^2)} = 0{,}5 \cdot 10^8$ Dyn/cm² $\Theta = 0{,}5$ also $E = 0{,}38 \cdot 10^8$. σ möge zwischen 1 und 10, ν zwischen 0,01 und 0,1, R zwischen 1 und 10 cm variieren. Da diese 3 Grössen immer in der Form $Z = Rq = R\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}$ zusammen auftreten, so können natürlich für bestimmte Werte

*) Nach E. Münzer und F. Bloch[18]) ist die Viskosität des normalen Blutes ca. 4—6 mal grösser als für Wasser.

von Z noch viel mannigfachere Kombinationen von R, σ, ν vorgenommen werden.

Das Verhältnis der Dicke der Röhrenwand zum innern Radius, h/R, sei im allgemeinen 0,1 also $R\tau = 10$.

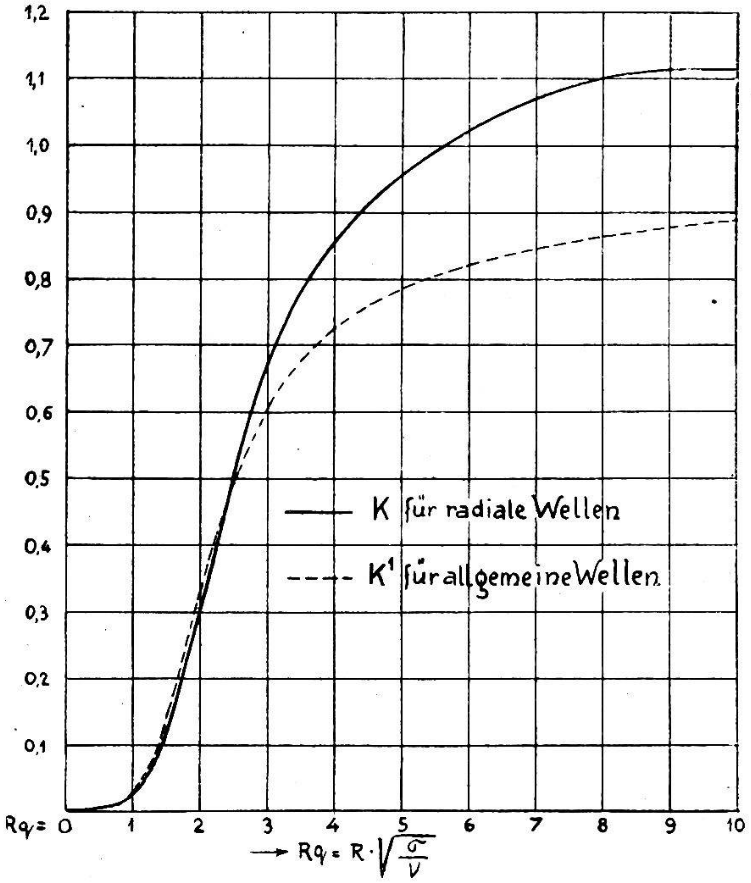
§ 3. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen und Berechnung der Konstanten Φ und Ψ.

Unter den angenommenen Verhältnissen ergibt sich, ohne Rücksicht auf die Zähigkeit, nach Resal:

$$c_0 = \sqrt{\frac{h \cdot E}{2 R \varrho}} = 1369 \text{ cm/sek.}$$

Der Korrektionsfaktor erster Annäherung, der den Einfluss der Zähigkeit ergibt, wird für $Z = R\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}} = 10$, also z. B. für eine Röhre von 1 cm Radius, bei einer Frequenz $\sigma = 10$ (in 2π Sek.) und einer Zähigkeit $\nu = 0{,}1$, $K = 0{,}891$, somit $c = c_0\sqrt{K} = 1290$ cm/sek. Es ist ersichtlich, dass die Zähigkeit einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ausübt. Die Formel für die erste Annäherung ist in unserem Fall genügend genau, obwohl hier c^2 ($\sim 1{,}7 \cdot 10^6$) gegenüber b ($\sim 0{,}5 \cdot 10^8$) vernachlässigt wurde; denn der Korrektionsfaktor der 2. Annäherung wird $K_0 = 0{,}885$, woraus sich c zu 1285 cm/sek ergibt, d. h. ein Wert, der von dem Vorigen nicht zu unterscheiden ist. Die Art und Weise, wie c mit der Zähigkeit variiert, zeigt die nachfolgende Tabelle und Figur (2) für den Korrektionsfaktor K, wobei auch der Korrektionsfaktor K' für rein radiale Schwingung der Röhrenwand angegeben ist. Beide Kurven nehmen zu, wenn Z wächst, wenigstens innerhalb der hier angegebenen Werte. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle nimmt also mit abnehmendem Röhrendurchmesser, abnehmender Frequenz und mit zunehmender Viskosität ab. Der Einfluss des Erstern macht sich aber viel stärker geltend, da er gegenüber $\frac{\sigma}{\nu}$ im Quadrat auftritt; der Einfluss der Frequenz und der Zähigkeit dagegen macht sich in gleich starker Weise gerade entgegengesetzt geltend. Ferner folgt, dass in erster Annäherung die Elastizität der Röhrenwand keinen wesentlichen Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausübt; denn in den beiden Korrektionsfaktoren K u. K′ tritt nur der Poissonsche Koeffizient auf, welcher sich für die verschiedensten Substanzen nur in verhältnismässig geringen Grenzen bewegt, während b nicht auftritt.

Fig. 2.



Z= Rq	K	K′
0	0	0
0,5	0,0018	0,0013
1,0	0,027	0,020
1,5	0,143	0,140
2,0	0,324	0,305
2,5	0,493	0,503
3,0	0,608	0,675
3,5	0,680	0,782
4,0	0,728	0,859
4,5	0,760	0,915
5,0	0,786	0,958
5,5	0,805	0,990
6,0	0,821	1,018
8,0	0,865	1,100
10,0	0,891	1,141

Vergleichen wir noch im folgenden die Formel von v. Kries (pag. 7) mit unsern Resultaten.

Die Formel von v. Kries lautet in unserer Bezeichnungsweise

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \eta\, u.$$

Wir gingen aus von den Eulerschen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

etc. etc.

Nehmen wir an, dass u nicht von r abhängig sei, legen also die Scheibchenhypothese zu Grunde, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

da $u \sim e^{i(\sigma t + k x)}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u$, folgt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu k^2 u.$$

Diese Gleichung ist mit derjenigen von v. Kries identisch, wenn $\eta = k^2 \nu$; es ist also η selber eine Funktion der Frequenz.

Setze $k = m = \frac{\sigma}{c}$, dann ist $\eta = \nu m^2 = \frac{\nu \sigma^2}{c^2}$; hierin kann für c die Resalsche Wellengeschwindigkeit c_0 gesetzt werden, so dass

$$\eta = \frac{\nu \sigma^2}{c_0^2} \text{ (wo } c_0^2 = \alpha_0^2 \text{ von v. Kries)}.$$

Dies in die v. Kries'sche Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eingesetzt, ergibt:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2 c_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2 \sigma^2}{c_0^2}}\right)$$

also

$$c = c_0 \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2 \sigma^2}{c_0^2}}}} \quad \text{(für Scheibchenhypothese)}$$

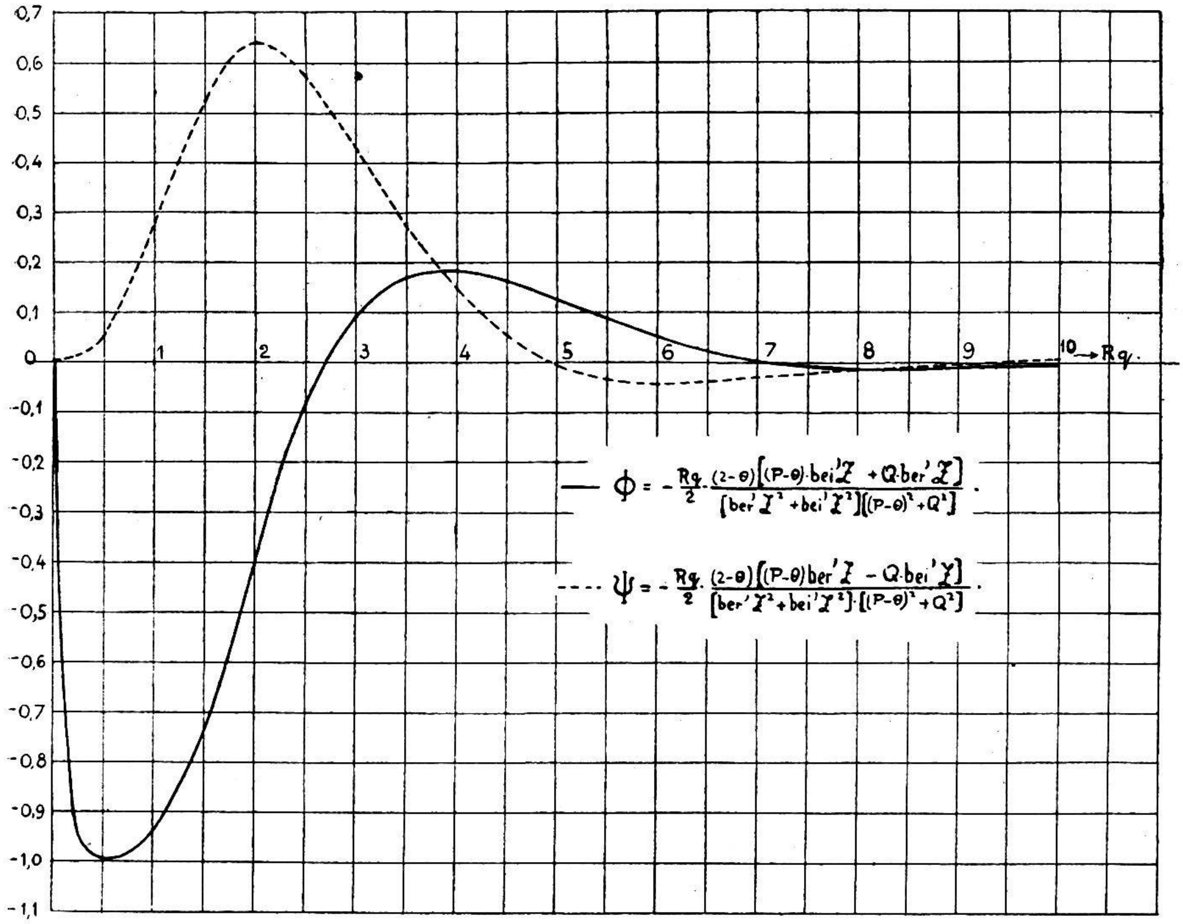
Der v. Kries'sche Korrektionsfaktor, der sich schreiben lässt $\sqrt{1 - \frac{1}{4}\frac{\nu^2 \sigma^2}{c_0^2}}$, zeigt auch eine Abhängigkeit von ν, von σ und von R, aber doch in wesentlich anderer Weise, als in unseren Formeln. Der Einfluss der Zähigkeit der Flüssigkeit ist also durch den v. Kries'schen Ausdruck nicht richtig wiedergegeben.

Z = Rq	Φ	Ψ
0	0	0
0,5	— 0,99	+ 0,05
1,0	— 0,94	+ 0,28
1,5	— 0,74	+ 0,53
2,0	— 0,39	+ 0,64
2,5	— 0,09	+ 0,58
3,0	+ 0,09	+ 0,43
3,5	+ 0,18	+ 0,27
4,0	+ 0,19	+ 0,15
4,5	+ 0,16	+ 0,05
5,0	+ 0,13	— 0,006
5,5	+ 0,09	— 0,04
6,0	+ 0,05	— 0,04
8,0	— 0,01	— 0,02
10,0	- 0,005	+ 0,002

Die Konstanten Φ und Ψ sind gegeben durch die Gl. (74[a]) wenn c^2 gegen b zu vernachlässigen ist. Die Werte von Φ u. Ψ finden sich in nebenstehender Tabelle; der graphische Verlauf für verschiedene Rq, also für verschiedene Röhrendurchmesser, verschiedene Frequenzen und verschiedene Flüssigkeiten ist aus Fig. (3) ersichtlich. Auch die genaue Formel (74), wo c^2 nicht gegen b vernachlässigt ist, liefert für Rq = 10 keine merklich verschiedenen Werte; z. B. wird nach (74) $\Phi = -0{,}007$ und nach (74[a]) $\Phi = -0{,}005$.

Da also die Vernachlässigung von c^2 gegen b statthaft ist, zeigen sich Φ und

Fig. 3.



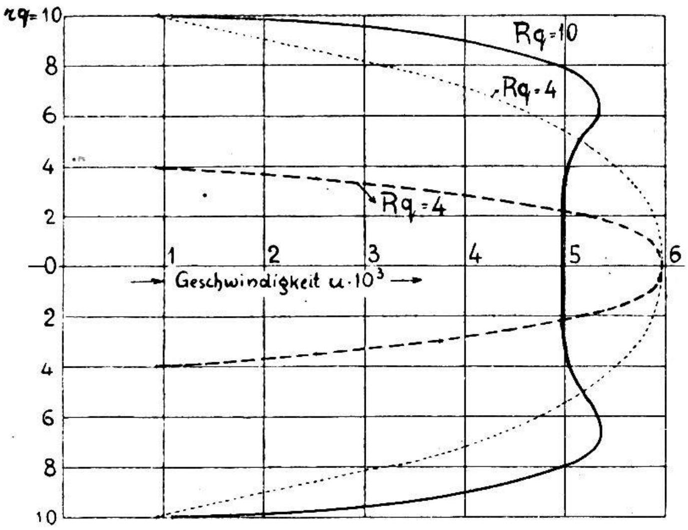
Ψ und damit alle unsere weitern Ausdrücke im wesentlichen von der Elastizität der Röhrensubstanz unabhängig; denn sie enthalten nur den Poisson'schen Coeffizienten Θ, nicht b.

§ 4. Bewegung der Flüssigkeitsteilchen.

Ueber die Geschwindigkeit u in Richtung der Röhrenachse und w senkrecht dazu in radialer Richtung, geben die Gl. 79 und 83 für allgemeine Wellen und die Gl. 96 und 99 für rein radiale Schwingung der Röhrenwand Aufschluss. Da w im Verhältnis m : 1 kleiner ist als u, so sind die radialen Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteilchen stets sehr klein im Vergleich zu den Longitudinalen. Die Werte der Amplituden von u und w, also die Maximalwerte dieser Geschwindigkeiten, für allgemeine Wellen und für rein radiale Bewegung der Röhrenwand, finden sich in den nachstehenden Tabellen. In der nebenstehenden Zusammenstellung sind die Amplituden von u für allgemeine Wellenbewegung, für 2 Werte von Rq angegeben (je mit 10^3 multipliziert), Fig. 4 zeigt die graphische Darstellung derselben.

r q	Geschwindigk. u	
	Rq = 4	Rq = 10
0	5,98	4,97
2,0	5,21	4,97
4,0	0,94	5,05
6,0	—	5,29
8,0	—	4,96
10,0	—	1,06

Geschwindigkeit u für allgemeine Wellen. Fig. 4.



Die unerwartete Form dieser Kurven, wie auch der spätern Fig. 5 u. 6, lässt sich durch folgende Ueberlegung verstehen.

Durch die mit konstanter Amplitude erzeugte Schwingung der elastischen Umhüllung werden die anliegenden Flüssigkeitsteilchen ebenfalls in gleichen Schwingungszustand gebracht und die kinetische Energie wird nun auf die benachbarten Flüssigkeitsschichten übertragen. Infolge der freien Beweglichkeit der Flüssigkeit, können dieselben mit zunehmender Geschwindigkeit hin und her pendeln, so dass bei dünnen Röhren, resp. kleiner Frequenz oder grosser Viskosität (Rq = 4) (gestrichelte Kurve) die Amplitude der Geschwindigkeitskomponente u bis zur Röhrenachse stetig zunimmt. Es nimmt aber mit wachsender Geschwindigkeit und besonders mit wachsendem Geschwindigkeitsgefälle in radialer Richtung auch die Reibung zu, so dass diese Amplituden bei genügend grossen Röhren und bei genügend kleiner Viskosität, wo u rasch wachsen kann, also auch ein starkes radiales Gefälle besitzt, nicht dauernd zunehmen, sondern ein Maximum erreichen und dann wieder abnehmen. Für Rq = 10 (ganz ausgezogene Kurve Fig. 4), für eine Röhre mit relativ grossem Durchmesser resp. für grosse Frequenz oder relativ kleine Viskosität, tritt diese Erscheinung deutlich zu Tage. Im Abstand von ca. $^3/_5$ R ist dieses Maximum erreicht, nachher nimmt u bei Annäherung an die Röhrenachse wieder ab. Bei zäherer Flüssigkeit dagegen zeigt die nebenstehende Tabelle und die schwach punktierte Kurve der Fig. 4 für Rq = 4 (welche für dieselbe Röhre, mit dem gleichen Radius R wie diejenige für Rq = 10, nur mit veränderlichem q, speziell für grössere Viskosität gilt), dass in der Nähe der Röhrenwand die Geschwindigkeitszunahme viel langsamer erfolgt, also auch die Reibung viel geringer wird als für Rq = 10. Infolgedessen kann die Geschwindigkeit mit Annäherung an die Röhrenachse immer noch zunehmen, während sie für die weniger zähe Flüssigkeit bereits ihr Maximum erreicht hat. Es ist also möglich, dass, wie Fig. 4 zeigt, für zähe Flüssigkeiten die Kurve bis zur Röhrenachse stetig zunimmt.

r	Geschwindigk. u	
	Rq = 4	Rq = 10
0	5,90	4,97
0,25	5,85	4,97
0,50	5,20	5,14
0,60	4,70	5,29
0,80	3,20	4,96
1,00	0,94	1,06

Genau dieselben Bemerkungen gelten für rein radiale Schwingungen der Röhrenwand.

Numerische Angaben für allgemeine Wellenbewegung.

r q	Max. d. Geschw. 10^3		Phasen- differenz		Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage multipl. mit 10^4									
	u in x Richtg.	w in r Richtg.	δ	δ'	t = o		t = T/8		t = 2 T/8		t = 3 T/8		t = 7 T/16	
					x	r	x	r	x	r	x	r	x	r
0	4,97	0	0° 7′	0	+ 0,0104	0	3,525	0	4,97	0	3,51	0	1,88	0
2,5	4,97	0,003	— 0° 21′	+ 90°	— 0,0311	+0,003	3,504	+0,002	4,97	0,000	3,52	—0,002	1,93	—0,003
5,0	5,14	0,006	— 0° 46′	+89° 22′	— 0,0674	+0,006	3,585	+0,004	5,14	0,000	3,68	—0,004	2,07	—0,006
8,0	4,96	0,010	+12° 20′	—87° 40′	+ 1,060	—0,010	4,160	—0,007	4,84	+0,0004	2,67	+0,008	0,875	+0.010
10,0	1.06	0,011	+ 4° 18′	—83° 15′	+ 0,0795	—0,011	0,800	—0,007	1,06	+0,0013	0,69	+0,009	0,331	+0.011

Numerische Angaben für rein radiale Schwingung der Röhrenwand.

r q	Max. d. Geschw. 10^8		Phasen- differenz		Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage multipl. mit 10^4									
	u in x Richtg.	w in r Richtg.	δ	δ'	t = o		t = T/8		t = 2 T/8		t = 3 T/8		t = 7 T/16	
					x	r	x	r	x	r	x	r	x	r
0	4,97	0	— 0° 12′	0	+ 0,017	0	3,520	0	4,97	0	3,50	0	2,03	0
2,5	4,97	0,003	— 0° 40′	+90°	— 0,055	+ 0,003	3,473	+ 0,002	4,97	0,000	3,55	— 0,002	2,10	—0,003
5.0	5,17	0,006	— 1° 22′	+89° 12′	— 0,124	+ 0,003	3,570	+ 0,004	5,17	0,000	3,74	— 0,004	2,28	—0,005
8,0	4,80	0,010	+28° 26′	—86° 56′	+ 2,576	— 0,010	4,60	— 0,007	4,23	0,001	1,37	+ 0,007	—0,49	+0,009
10,0	0	0,014	90°	— 82° 10′	0	— 0,014	0	— 0,009	0	0,002	0	+ 0,010	0	+0,014

Für die Amplituden der Geschwindigkeit w, senkrecht zur Röhrenachse gelten analoge Betrachtungen, nur dass hier ihr Betrag auf der Röhrenachse Null ist und an der Röhrenwand der Maximalwert erreicht wird.

Um die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen genau zu verfolgen, genügt es nicht, die Amplituden von u und w zu kennen, es spielen die auftretenden Phasendifferenzen δ u. δ' gegenüber der Schwingung des Druckes eine beträchtliche Rolle. Noch deutlicher ergibt sich diese Bewegung durch Berechnung der Elongationen x und r der einzelnen Teilchen für verschiedene Zeiten. In den vorstehenden Tabellen sind für einen bestimmten Fall, $Rq = 10$, diese Werte berechnet, wobei die Zahlen mit 10^3 resp. 10^4 erweitert sind. Dabei wurde $m = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}005$ gesetzt, was bei einer Frequenz $\sigma = 10$, einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = 20$ m/sek, entspricht. Fig. 5 zeigt die betreffenden Verhältnisse für allgemeine Wellen für die Mittellage $x = o$ in graphischer Darstellung für die Werte

$$t = o, \frac{T}{8}, \frac{2T}{8}, \frac{3T}{8}, \left(\frac{7T}{16}\right), \frac{4T}{8}, \frac{5T}{8}, \frac{6T}{8}, \frac{7T}{8}, \left(\frac{15T}{16}\right), \frac{8T}{8}$$

(wo T = Schwingungsdauer) $R = 1$, $\sigma = 10$ und $\nu = 0{,}1$.

In Fig. 6 sind die nämlichen Verhältnisse für rein radiale Schwingung der Röhrenwand aufgetragen.

§ 5. Bemerkungen über die Anwendung der Formeln auf Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Pulswellen in den Arterien.

Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Pulswellen im menschlichen Körper wurden seit Weber von Prof. Münzer[19]) u. a. zahlreiche Versuche gemacht; die Werte von Münzer variieren zwischen 5—26 m/sek. je nach dem pathologischen Zustand des Patienten und der Anzahl Pulsbewegungen. Um unsere Formeln auf die experimentellen Resultate anwenden zu können, sollte in erster Linie der Elastizitätsmodul E der Arterien bekannt sein, worüber aber keine bestimmten Angaben vorliegen und überhaupt schwer zu erhalten sein werden, da die Arterien nicht das einfache Verhalten eines isotropen, elastischen Körpers zeigen und zudem die sie umgebenden Fettmassen, Bindgewebe etc. den Elastizitätsmodul beeinflussen. Als Röhrendurchmesser R käme der mittlere Arteriendurchmesser zwischen den beiden Messpunkten, zwischen denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ermittelt wird, in Betracht, und in entsprechender Weise müsste ein Mittelwert für die Dicke h der Arterien bestimmt werden. Da aber bei den Arterien das Verhältnis $\frac{h}{R}$ nicht klein ist, so fallen dieselben wieder etwas ausserhalb des Gültigkeitsgebietes unserer Formeln. Immerhin ist es möglich in angenäherter Weise, aus Gl. (67) $c^2 = \frac{h \cdot E}{2\varrho R} K$, bei bekannten Dimensionen der Arterien und bei bekannter Viskosität ν einen Elastizitätsmodul E der Arterien zu berechnen.*) Aber diese Konstante E hat natürlich aus den angeführten Gründen keine einfache physikalische Bedeutung mehr. Dagegen zeigen unsere Ausdrücke, wie die Wellengeschwindigkeit c (wie auch die Geschwindigkeitskomponenten u und w der einzelnen Blutteilchen) von dem Arteriendurchmesser, der Pulsfrequenz und der Viskosität des Blutes abhängen, woraus vielleicht Konsequenzen für die Physiologie gezogen werden können. Insbesondere liegt auch die Möglichkeit vor, die von Prof. O. Frank[20]) ausgeführten Messungen an Manometerschläuchen auf ihre Abhängigkeit von der Zähigkeit der Flüssigkeit hin zu prüfen.

Berechnungen über die Dissipation von Energie infolge der Reibung wurden in der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt. Ueber direkte Energie-Messungen der Pulswelle sei auf die Arbeiten von Dr. Th. Christen,[21]) Prof. Dr. Sahli[22]) u. a. verwiesen.

---

*) Umgekehrt kann bei irgend einer elastischen Röhre, deren Dimensionen und Elastizitätsmodul bekannt sind, nach experimenteller Bestimmung von c die Konstante K berechnet werden, aus welcher sich nach Fig. 2 ein bestimmtes R q ergibt, und hieraus kann, da $R\,q = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}$, bei gegebener Frequenz σ der kinematische Reibungskoeffizient ν berechnet werden.

Literatur-Verzeichnis.

[1]) *E. H. Weber:* Ueber die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislauf des Blutes etc. Berichte über die Verh. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig. Math. phys. Klasse. 1850. Auch in Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 6.

[2]) *W. Weber:* «Theorie der durch Wasser oder andere inkomp. Flüssigkeiten in elastischen Röhren fortgepflanzten Wellen» aus Verh. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig 1866, Bd. 18, p. 353.

[3]) *M. H. Resal:* «Note sur les petits mouvements d'un fluide incompr. dans un tuyau élastique». Journal de Math. pures et appliquées par J. Liouville. 3e série, II. Bd. 1876, p. 342.

[4]) *D. J. Korteweg:* «Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren». Ann. Phys. Chem. N. F. V. 1878, p. 525.

[5]) *J. Boussinesq:* «Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible.» Annales scientifiques de l'école normale supérieure. XXI. Bd. 1905, p. 349 (Paris).

[6]) *H. Lamb:* On the velocity of Sound in a Tube as affected by the Elasticity of the Walls. Memoires and proceeding of Manchester Lit. a. phil. Soc. Volume XLII. 1897—1898, Nr. 9.

[7]) *J. v. Kries:* «Studien zur Pulslehre» .... p. 127. Freiburg i./B. 1892.

[8]) *J. Boussinesq:* .... Sur la Théorie des eaux courantes. Journal de Math. pures et appliquées par J. Liouville. 3e série. IV. Bd. 1878, p. 335.

[9]) *H. Lamb:* Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig und Berlin 1907.

[10]) *A. R. Forsyth:* Lehrbuch der Differentialgleichungen. Braunschweig 1912, p. 188.

J. H. Graf und *E. Gubler:* Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen. 1. Heft, p. 34. Bern 1898.

[11]) *G. G. Stokes:* Solution of the equations in the case of a sphere oscillating in a mass of fluid. Trans. Cambridge phil. soc. IX. 1819, p. 23.

[12]) *E. Jahnke* und *F. Emde:* Funktionentafeln. Leipzig und Berlin 1909, p. 166.

[13]) *W. Thomson:* Math. and phys. papers, 3. p. 493. Cambridge 1890.

[14]) *A. Gray* and *G. Mathews:* A Treatise on Bessel Functions, p. 154. London 1895.

[15]) *A. Sommerfeld:* Phys. Zeitschr. 8, p. 805 (1907).

[16]) *J. Zenneck:* Ann. d. Phys. 11, p. 1141 (1903).

[17]) *Recueil de constantes physiques* de la Société française de phys. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

O. D. Chwolson: Lehrbuch der Physik. I. Bd., p. 649. Braunschweig 1902.

[18]) *E. Münzer* und *F. Bloch:* Weitere Beiträge zur Kritik der Viskositätsbestimmungsmethoden (p. 12). Zeitschrift für experimentelle Pathologie und Therapie. Bd. 11, 1912.

[19]) *E. Münzer:* Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Pulswellen .... Verhandl. des Deutschen Kongresses für innere Medizin. XXIX. Kongress. Wiesbaden 1912.

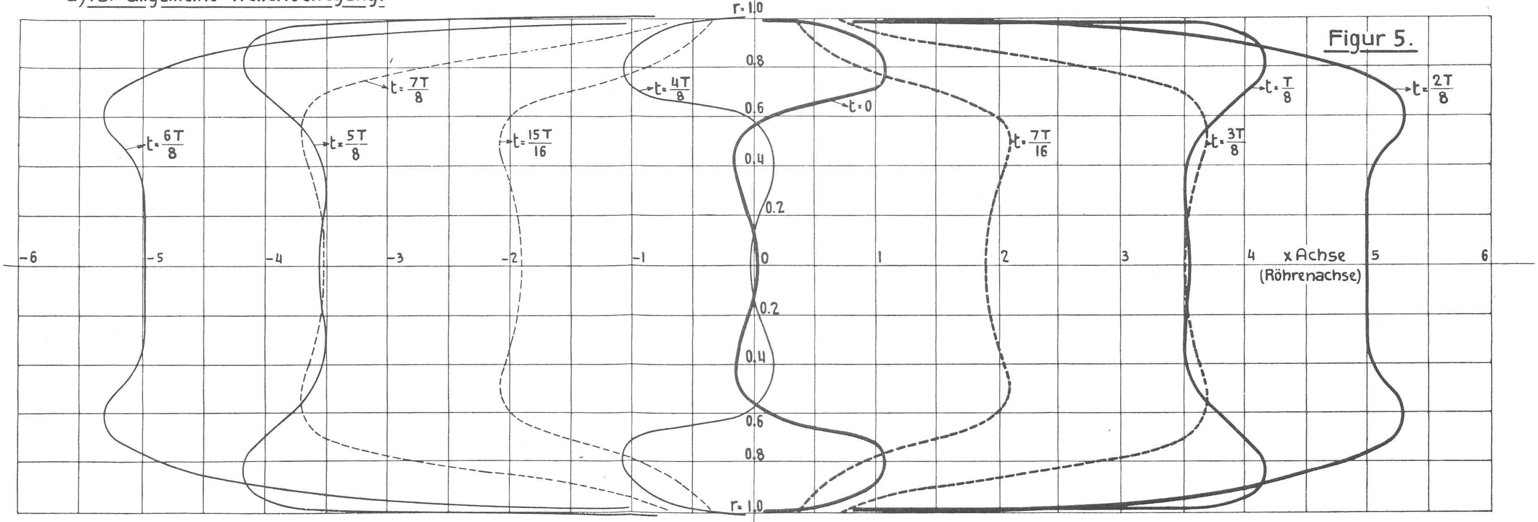
[20]) *O. Frank:* Kritik der elastischen Manometer. Zeitschrift für Biologie v. G. Voigt. N. F. XXVI. p. 445 (1903).

[21]) *Th. Christen:* Die neuen Methoden der dynamischen Pulsdiagnostik. Zeitschr. für klin. Medizin. 73. Bd., H. 1 und 2.

[22]) *H. Sahli:* Der weitere Ausbau der Sphygmobolometrie oder energetischen Pulsdiagnostik. Zeitschrift für klin. Medizin. 72. Bd., H. 1 und 2.

Elongationen der Flüssigkeitsteilchen für $R_q = 10$.

a) für allgemeine Wellenbewegung.



NB. Die radialen Elongationen sind der Deutlichkeit wegen etwas zu kräftig aufgetragen.

b) Für rein radiale Schwingung der Röhrenwand.