Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1915)

Artikel: Spezielles über ebene Kreiskegelschnitte
Autor: Benteli, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319259

A. Benteli.

Spezielles über ebene Kreiskegelschnitte.

Längst Bekanntes über das Wesen der zentrischen Kollineation werde zunächst nur kurz angeführt, da die folgenden Mitteilungen sich darauf stützen.

Schneidet man ein Strahlenbündel mit zwei beliebigen Ebenen und verbindet in beiden Ebenen die entsprechenden oder verwandten Schnittpunkte in gleicher Weise zu einer Figur, so erhält man zwei zentrisch kollineare Figuren, deren verwandte Geraden sich im Schnitte der Ebenen, Kollineationsaxe, treffen. Wird ein solches System zentrisch kollinearer Figuren parallel auf eine Ebene projiciert, so erhält man in dieser ein sog. ebenes zentrisch kollineares System und dreht man die eine Figur um die Kollineationsaxe herum, um einen Winkel α, so bleiben die beiden Figuren zentrisch kollinear. Kollineationszentrum wird dabei das um die Gegenaxe um denselben Winkel α herumgedrehte Kollineationszentrum. Dies erhellt sofort aus Fig. 1. Gegenaxe ist der Schnitt der einen Figurenebene mit der zur anderen parallelen Ebene durch das Zentrum.

In Fig. 2 ist eine beliebige vierseitige Pyramide durch eine Ebene in einem Parallelogramm geschnitten. Die Schnittebene ist so gewählt, dass die Gegenaxe durch die Schnittpunkte der Gegenseiten des Grundflächenvierecks geht. So müssen ja die den Gegenseiten verwandten Geraden in der Schnittebene parallel ausfallen und der Pyramidenschnitt wird somit ein Parallelogramm. Denkt man sich das Pyramidenzentrum, Kollineationszentrum, um die Gegenaxe gedreht und die Schnittebene stets um den gleichen Winkel um die Kollineationsaxe herum, so sieht man ein, dass dasselbe Parallogramm aus unendlich vielen Pyramiden über derselben Viereckgrundfläche geschnitten werden kann.

So wie ein beliebiges Viereck durch zentrische Kollineation in ein Parallelogramm übergeht, lässt sich ein beliebiges Viereck auf gleichem Wege in ein Rechteck verwandeln, Fig. 3. Dabei ist aber das Kollineationszentrum auf dem Kreise über dem Durchmesser $\alpha\,\beta$ anzunehmen, damit die den Gegenseitenpaaren des Vierecks verwandten Geraden die Richtungen $O\,\alpha$ und $O\,\beta$ erhalten, d. h. senkrecht zu einander ausfallen.

Wo auf dem Kreise über dem Durchmesser $\alpha\,\beta$ ist nun das Kollineationszentrum zu wählen, damit das Viereck ABCD in ein Quadrat übergeht?

Dazu ist nötig, dass (Fig. 4) die Diagonale $A'C'$ den Winkel $B'A'D'$ halbiert. Wir ziehen den zur Gegenaxe senkrechten Kreisdurchmesser MM^x, verlängern die Vierecksdiagonale AC bis zum Schnitte S auf der Gegenaxe und ziehen MS und M^xS bis zu den Schnitten N und N^x auf dem Kreise. Setzt man das Kollineationszentrum in N oder in N^x, so bekommt die der Diagonalen AC verwandte Gerade $A'C'$ die Richtung von SN oder SN^x, also halbiert sie den Winkel $B'A'D'$, ebenso wie NS oder N^xS den Winkel $\alpha N\beta$ oder $\alpha N^x\beta$ halbiert, denn die Winkel αNS und βNS und anderseits die Winkel αN^xS und βN^xS sind Peripheriewinkel über Viertelkreisen. In Fig. 4 ist das Quadrat der Deutlichkeit halber nur für das Kollineationszentrum N^x konstruiert worden.

Nun liegt der Gedanke nahe, von diesem Resultate Anwendung zu machen auf ebene Kreiskegelschnitte. Wir möchten den Leitlinienkreis durch zentrische Kollineation in einen Kreis überführen, wodurch man zur Einsicht kommen wird, dass derselbe Kreis aus unendlich vielen Kegeln über denselben Leitlinienkreis durch Ebenen ausgeschnitten werden kann. Dazu genügt es allerdings nicht, ein beliebiges, dem Leitlinienkreise umschriebenes Vierseit durch zentrische Kollineation in ein Quadrat zu verwandeln — es kann ja auch einer Ellipse ein Quadrat umschrieben sein —, es muss vielmehr ein solches umschriebenes Vierseit gewählt werden, dessen Kreisberührungspunkte im verwandten System in die Mitten der Quadratseiten zu liegen kommen. Dies ist aber der Fall, sobald die Verbindungsgeraden der Kreisberührungspunkte der Gegenseiten des dem Leitlinienkreise umschriebenen Vierseits konjugierte Geraden sind oder — was gleichbedeutend ist — sobald die Seiten des Vierseits aus konjugierten Punkten der Gegenaxe berührend an den Leitlinienkreis gezogen werden.

In Fig. 5 sind aus dem Punkte P der Gegenaxe die Tangenten an den Leitlinienkreis gezogen. Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte A und B ist die Polare p zum Punkte P. Zieht man p bis zum Schnitte Q auf der Gegenaxe und zieht aus Q die Kreistangenten, so ist die Verbindungsgerade der Kreisberührungspunkte E und F die Polare q. Diese geht durch P, denn, wenn ein Punkt die Polare p durchläuft, so dreht sich seine Polare um den Pol P der Geraden p. P und Q sind also konjugierte Punkte, jeder liegt auf der Polaren des andern; p und q sind konjugierte Geraden, jede geht durch den Pol der andern. Der Schnittpunkt R der Geraden p und q liegt in Bezug auf die Kreisschnittpunkte harmonisch zu P und Q, also ist R der Pol der Gegenaxe r. R, P und Q bilden ein Tripel harmonischer Punkte. Für eine Schnittebene durch irgend einen Kegel über dem Leitlinenkreise werden die verwandten Geraden zu p und q konjugierte Durchmesser, denn der verwandte Punkt R′ zu R wird Zentrum des Kegelschnitts, da die verwandten Punkte zu P und Q ins Unendliche fallen. Deshalb halbieren die zu p und q verwandten Geraden p′ und q′ das je zum andern Durchmesser parallele Sehnensystem. Das durch die Kreistangenten aus P und Q gebildete Vierseit wird im verwandten Systeme das dem konjugierten Durchmesserpaare zugehörige Parallelogramm. Durchläuft P die Gegenaxe r, so bewegt sich Q in gleicher Richtung durch r bis ins Unendliche, sobald P nach M kommt, d. h. in den Schnittpunkt der Gegenaxe mit der Senkrechten zu ihr aus dem Kreiszentrum C. Umgekehrt rückt Q nach M, so rückt P in r in gleicher Richtung ins Unendliche. P und Q bilden eine Involution mit M als Mittelpunkt. Diese Involution P, Q auf r lässt sich in verschiedener Weise erzeugen.

a) Die Polare p steht senkrecht zu PC, ihr Schnittpunkt D liegt somit auf dem Kreise über Durchmesser CR. Wenn D sich also auf diesem Kreise bewegt, so geben die Geraden DC und DR auf der Gegenaxe r konjugierte Punkte P, Q dieser Involution.

b) Die Dreiecke PCM und RQM sind geometrisch ähnlich, somit $\frac{PM}{MC} = \frac{MR}{QM}$ oder $PM \cdot QM = MC \cdot MR =$ Quadrat der Tangente ML aus M an den Kreis über Durchmesser CR. Zieht man über dem Durchmesser PQ den Kreis, der CM in N schneidet, so ist $\overline{MN}^2 = MP \cdot MQ$, also auch $= \overline{ML}^2$, somit erhält man N durch Umklappung von ML nach MN. Alle Kreise durch N, deren Zentra in r liegen, geben die Involution P, Q.

c) Im rechtwinkligen Dreieck PBC ist $\overline{PB}^2 = PD \cdot PC$. Nun ist Dreieck PCM geometrisch ähnlich Dreieck PQD, somit $\frac{PC}{PM} = \frac{PQ}{PD}$ oder $PD \cdot PC = PM \cdot PQ$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck PNQ folgt $PM \cdot PQ = \overline{PN}^2$, also $\underline{PB = PN}$. Man gelangt demnach zum Resultate: Alle den Leitlinienkreis normal schneidenden Kreise, deren Zentra in r liegen, gehen durch N und geben im Schnitte mit r Punkte der Involution P, Q. Selbstverständlich gehen diese Kreise auch durch den zu N in Bezug auf r symmetrisch liegenden Punkt N^x.

Will man für die Horizontalprojektion eines ebenen Schnittes durch einen Kreiskegel in der Horizontalebene das Axensystem der Ellipse erhalten, so braucht man nur den P und Q liefernden Kreis zugleich durch N und O, (Horizontalprojektion des Kegelzentrums) gehen zu lassen. Doch, wir lassen dies bei Seite und wenden uns zur Verwandlung des Leitlinienkreises durch zentrische Kollineation in einen Kreis.

Die Kreistangenten aus P und Q (Fig. 5) bilden ein dem Leitlinienkreis umschriebenes Vierseit, dessen Diagonalen die Geraden 𝔄ℭ, 𝔅𝔇 und r sind. Damit das Vierseit in ein Quadrat verwandelt werde, ist das Kollineationszentrum auf dem Kreise über Durchmesser PQ zu wählen. Nur so kann die verwandte Figur ein Rechteck werden. Damit das Rechteck ein Quadrat wird, muss die zur Vierseitdiagonalen 𝔇𝔅 verwandte Gerade 𝔇′𝔅′ den rechten Winkel 𝔄′𝔅′ℭ′ halbieren. So zieht man denn die Diagonale 𝔅𝔇 bis zum Schnitte S auf r und zieht die Gerade αS bis zum Schnitte N^x mit dem Kreise über Durchmesser PQ. Es zeigt sich nun, dass die Gerade αS mit der Geraden SN^x zusammenfällt. Dies muss eintreffen, wenn Winkel $QN^xS = 45^0$, denn Peripheriewinkel $QN^x\alpha$ über dem Viertelkreis $Q\alpha$ ist $= 45^0$. Dass Winkel $QN^xS = 45^0$ erhellt aus Folgendem:

In einem Vierseit wird jede Diagonale durch die beiden andern harmonisch geteilt. Hier (Fig. 5) wird im Vierseit 𝔄𝔅ℭ𝔇 die Diagonale PQ durch die Diagonale 𝔅𝔇 in S und durch die Diagonale 𝔄ℭ in T geschnitten. PQ, ST ist somit eine harmonische Punktreihe und das Strahlenbüschel N^x(PQ, ST) ein harmonisches Strahlenbüschel. N^x liegt auch auf dem Kreise über Durchmesser ST, denn es soll gleich nachher bewiesen werden, dass S und T konjugierte Punkte, also auch Punkte der Involution P, Q sein müssen. Wenn in einem harmonischen Strahlenbüschel zwei zugeordnete Strahlen zu einander senkrecht stehen, so sind sie die Halbierstrahlen des Winkels der anderen zugeordneten Strahlen. Im harmonischen Strahlenbüschel N^x(PQ, ST) stehen die zugeordneten Strahlen N^xS und N^xT zu einander senkrecht, also halbiert N^xS den Winkel der Strahlen N^xP und N^xQ, somit ist Winkel QN^xS wirklich $= 45^0$. Der Punkt N^x oder auch N ist also als Kollineationszentrum für die Verwandlung des umschriebenen Vierseits in ein Quadrat zu wählen. Für jedes aus konjugierten Punkten P, Q konstruiertes umschriebenes Vierseit ist stets bei Verwandlung in ein Quadrat N oder N^x als Kollineationszentrum anzunehmen.

Von P aus wird die harmonische Punktreihe AB, RQ nach 𝔄𝔇, FQ und nach 𝔅ℭ, EQ projiziert und von Q aus die harmonische Punktreihe EF, RP nach ℭ𝔇, BP und nach 𝔅𝔄, AP, somit hat man auf den vier Seiten des Vierseits 𝔄𝔅ℭ𝔇 harmonische Punktreihen. Da P und Q auf der Gegenaxe r liegen, ihre verwandten Punkte also ins Unendliche rücken, so fallen die verwandten Punkte der ihnen harmonisch zugeordneten Punkte F, E und B, A in die Mitten der Quadratseiten 𝔄′𝔇′, 𝔅′ℭ′ und ℭ′𝔇′, 𝔄′𝔅′. Die dem Leitlinienkreise verwandte Figur muss demnach der dem Quadrate 𝔄′𝔅′ℭ′𝔇′ eingeschriebene Kreis sein.

Nun ist, wie oben bemerkt, noch zu beweisen, dass die auf der Gegenaxe r durch Vierseitsdiagonalen erhaltenen Punkte S und T Punkte der Involution P, Q sind.

Zunächst weisen wir nach, dass der Schnittpunkt der Vierseitdiagonalen $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$, bezeichnen wir ihn mit V, mit dem Pole R der Gegenaxe zusammenfallen muss. P ($\mathfrak{B}\mathfrak{D}$, VS) ist ein harmonisches Strahlenbüschel, ebenso P (AB, RQ). Die Strahlen P$\mathfrak{B}$ und PA, ebenso P$\mathfrak{D}$ und PB, PS und PQ sind dieselben, somit fallen auch PV und PR zusammen. Q ($\mathfrak{B}\mathfrak{D}$, VS) ist ein harmonisches Strahlenbüschel, ebenso Q (EF, RP). Die Strahlen Q$\mathfrak{B}$ und QE, sowie Q$\mathfrak{D}$ und QF und QS und QP sind dieselben, also fallen auch QV und QR zusammen. V fällt somit auf R. — Zu diesem Resultate würde auch der Brianchon'sche Satz führen, man hätte nur die Seiten des Vierseits $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ verschieden zu numerieren. —

Die Diagonale AF des Vierseits $\mathfrak{A}$ARF und auch die Diagonale EB des Vierseits $\mathfrak{C}$ERB schneiden die Gegenaxe r in S, sonst lägen verschiedene Punkte auf r harmonisch zu T in Bezug auf die Punkte P und Q. Ganz analog lässt sich nachweisen, dass die Diagonalen AE und FB die Gegenaxe r in T treffen, da sonst mehrere Punkte auf r harmonisch lägen zu S in Bezug auf P und Q. Es ist also S der Pol zur Diagonalen $\mathfrak{A}C = s$ und T der Pol der Diagonalen $\mathfrak{B}\mathfrak{D} = t$. Die Punkte STR bilden somit ein Tripel harmonischer Punkte in Bezug auf den Leitlinienkreis. Die Punkte S und T gehören der Involution P, Q an.[1])

Die Tangenten aus S und T an den Leitlinienkreis bilden ein Vierseit $\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}$, das durch zentrische Kollineation mit Zentrum in N^x in ein dem verwandten Kreise umschriebenes Quadrat übergeht, das gegen das erste Quadrat $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ um 45^0 gedreht erscheint. Die Diagonale $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ schneidet die Gegenaxe r in Q, βQ gibt auf dem Kreise über Durchmesser ST das Kollineationszentrum, das ist aber nach früher gegebenem Beweise wieder Punkt N^x.

Würde man die Kollineationsaxe parallel näher zur Gegenaxe oder weiter davon verschieben, so würde der verwandte Kreis mit den umschriebenen Quadraten kleiner oder grösser ausfallen, aber stets bekäme man zentrisch ähnliche Systeme mit Zentrum in N^x.

---

[1]) Es ist ja übrigens bekannt, dass die Diagonalen eines einem Kreise umschriebenen Vierseits ein Tripel in Bezug auf den Kreis bilden.

Denkt man sich nun auch hier N^x als um die Gegenaxe r herum in die Leitlinienkreisebene umgeklapptes Kegelzentrum und klappt N^x wieder in den Raum zurück, so bekommen wir die Vorstellung von unendlich vielen Kegeln über dem Leitlinienkreise, aus denen derselbe Kreis durch Ebenen durch die Kollineationsaxe parallel zur Ebene durch Gegenaxe und Kegelzentrum geschnitten werden kann.

Nun lässt sich leicht die Frage besprechen:

W i e f i n d e t m a n E b e n e n, d i e e i n e n b e l i e b i g e n K r e i s k e g e l m i t g e g e b e n e m Z e n t r u m i n K r e i s e n s c h n e i d e n, selbstverständlich abgesehen von den zur Leitlinienebene parallelen Ebenen?[1])

Dazu ist Richtung und Lage der Gegenaxe r zu bestimmen. Aus Obigem ist die Richtung schon bestimmt, sie muss senkrecht zur Projektion der Kegelaxe auf die Leitlinienebene stehen. Das um die Gegenaxe r umgeklappte Kegelzentrum muss in den Punkt N oder N^x (Fig. 5) fallen. Zu dieser Drehungsebene steht die Gegenaxe senkrecht. Nun ist noch die Lage der Gegenaxe zu bestimmen. Sie muss so liegen, dass ihr Abstand vom Kegelzentrum gleich ist dem Abstande vom Punkte N (Fig. 6), also von dem Punkte, in dem sich alle Kreise über den Durchmessern P Q schneiden. Dieser Abstand hängt von der Lage des Punktes N ab, die ihrerseits wieder durch die Lage der Gegenaxe bedingt ist. Die Entfernung des Punktes N von der Gegenaxe ist gleich der Länge der Tangente aus F an den Leitlinienkreis. Für diese Länge gilt (Fig. 6) $y^2 = (x + r)^2 - r^2 = x^2 + 2rx$, wo x von A weg gemessen ist. Die Werte von y sind für verschiedene Werte von x als Ordinaten aufgetragen und die Endpunkte derselben durch die Kurve M verbunden. Für den Abstand des Kegelzentrums O von der Gegenaxe gilt $\mathfrak{y}^2 = b^2 + (\mathfrak{x} - a)^2$, wo a und b die Koordinaten des Kegelzentrums O in Bezug auf den Koordinatenursprung in A bedeuten. — In Fig. 6 denke man sich die

[1]) Die Richtung solcher Kreisschnittebenen kann freilich in verschiedener einfacher Weise bestimmt werden, wie auch die später folgende Arbeit des Herrn Dr. Flükiger zeigen wird. Es bietet aber doch einiges Interesse, zu sehen, wie man vom Verfahren der zentrischen Kollineation ausgehend zu demselben Resultate gelangt.

Vertikalebene durch O und AH um AH herum in die Kreisebene geklappt. — Die Verbindung der Endpunkte der Ordinaten $\mathfrak{y}$ gibt die Kurve N. Für die richtige Lage der Gegenaxe muss y gleich $\mathfrak{y}$ sein und $x = \mathfrak{x}$, also $x^2 + 2rx = b^2 + (x - a)^2$. Dies entspricht dem Schnittpunkte der Kurven M und N. $x^2 + 2rx = b^2 + x^2 - 2ax + a^2$, somit $x = \frac{a^2 + b^2}{2a + 2r} = \frac{c^2}{2a + 2r}$. c ist also die mittlere Proportionale zwischen x und $2a + 2r$ und danach ist x leicht zu konstruieren. Man errichtet in A senkrecht zur X Axe die Strecke c nach D, trägt links von H die Strecke a zweimal ab, verbindet B mit D und errichtet darauf die Senkrechte, die auf der X Axe den Punkt F, d. h. die richtige Lage für die Gegenaxe r gibt. Betrachten wir einige spezielle Fälle:

1. $a = o \therefore x = \frac{b^2}{2r}$ oder $x : b = b : 2r$. Man errichtet in A die Höhe b des Kegelzentrums senkrecht nach E, verbindet H mit E, so gibt die darauf Senkrechte auf der X Axe den Punkt G, durch den die Gegenaxe gehen muss.

2. $a = -r$ (senkrechter Kreiskegel) $\therefore x = \frac{r^2 + b^2}{o} = \infty$. Die Gegenaxe rückt ins Unendliche, die Schnittebene parallel zur Ebene durch r und Kegelzentrum, die aus dem Kegel einen Kreis ausschneidet, wird parallel zur Leitlinienkreisebene.

3. $a = -2r \therefore x = \frac{(2r)^2 + b^2}{-2r} = -\frac{d^2}{2r}$, $\therefore x : d = d : 2r$. Wieder hat man auf HE die Senkrechte zu errichten bis G auf der X Axe. Die Strecke HG gibt den absoluten Wert für x, ist aber, da x negativ geworden, von A nach links abzutragen. Wir erhalten eben einfach den zum Spezialfall 1, symmetrischen Fall in Bezug auf das Kreiszentrum.

Die Kurven M und N (Fig. 6) sind gleichseitige Hyperbeln, was durch einfache Koordinatentransformationen sich leicht ergibt.

Für Kurve M gilt $y^2 = (x + r)^2 - r^2$, Koordinatenursprung in A. Setzt man den Ursprung in das Kreiszentrum C und nennt die Abscisse x', so ist $x = x' - r$, somit $y^2 = (x' - r + r)^2 - r^2$

oder $= x'^2 - r^2$, daraus $\frac{x'^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1$, d. h. die Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel mit reeller Axe $= 2r$.

Für Kurve N gilt $\mathfrak{y}^2 = b^2 + (\mathfrak{x} - a)^2$ Koordinatenursprung in A. Setzt man den Ursprung in den Endpunkt von a und vertauscht $\mathfrak{y}$ Axe und $\mathfrak{x}$ Axe, d. h. setzt $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} = a + \mathfrak{y}'$, so erhalten wir $\mathfrak{x}'^2 = b^2 + (a + \mathfrak{y}' - a)^2$ oder $\mathfrak{x}'^2 = b^2 + \mathfrak{y}'^2$, daraus $\frac{\mathfrak{x}'^2}{b^2} - \frac{\mathfrak{y}'^2}{b^2} = 1$. Die Kurve N ist somit auch eine gleichseitige Hyperbel mit reeller Axe $= 2b$.

In Fig. 7 ist für den schiefen Kreiskegel, dessen Zentrum O die Koordinaten a und b hat, in gleicher Weise wie oben in Fig. 6 nach $x = \frac{a^2 + b^2}{2a + 2r}$ die Gegenaxe r bestimmt, parallel zur Ebene rO eine Schnittebene S angenommen worden, die also nach Obigem den Kegel in einem Kreise schneiden muss, und dann wurde der Schnittkreis zunächst als zentrisch kollineare Figur zum Leitlinienkreise mit Hülfe des speziellen umschriebenen Vierseits $\mathfrak{ABCD}$, das durch die Tangenten aus den konjugierten Punkten Q und P (im Unendlichen) entstanden, konstruiert, also wie in Fig 5 für das Vierseit von beliebigen konjugierten Punkten P, Q aus. Der Kreis über Durchmesser Q, P wird, da P im Unendlichen, unendlich gross, so dass der Punkt *a* (Fig. 5) hier in Fig. 7 in Richtung 45^0 zur Gegenaxe ins Unendliche fällt. Diese 45^0 Gerade gibt auf der Geraden durch Zentrum des Leitlinienkreises senkrecht zur Gegenaxe r das Kollineationszentrum N^x und wir bekommen $QN^x = QS = QT = QN = QC = QO$, wie es für den Kreisschnitt der Ebene S erforderlich ist. Nachher klappte man den Schnittkreis der Ebene S um die Kollineationsaxe herum in die Leitlinienebene. Dabei zeigte sich sofort, dass, wie selbstverständlich zu erwarten war, beide Konstruktionen zu demselben Resultate führten. Der umgelegte Durchmesser A′B′ fiel auf den Durchmesser A′B′ des kollinearen Kreises und der senkrechte Durchmesser C′D′ fiel nach Umklappung auf den senkrechten Kreisdurchmesser C′R′D′, denn $\frac{C_,'D_,'}{C_,D_,} = \frac{R_,'O_,}{RO_,} = \frac{R_{,,}'O_{,,}}{R_{,,}O_{,,}} = \frac{mn}{R_{,,}n} = \frac{R'N^x}{RN^x} = \frac{C'D'}{C_,D_,}$. Da die äusser-

Fig. 1.

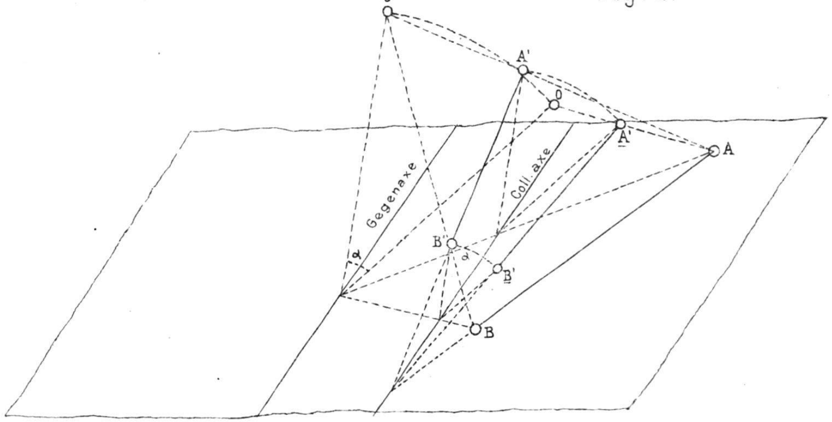


Fig. 2.

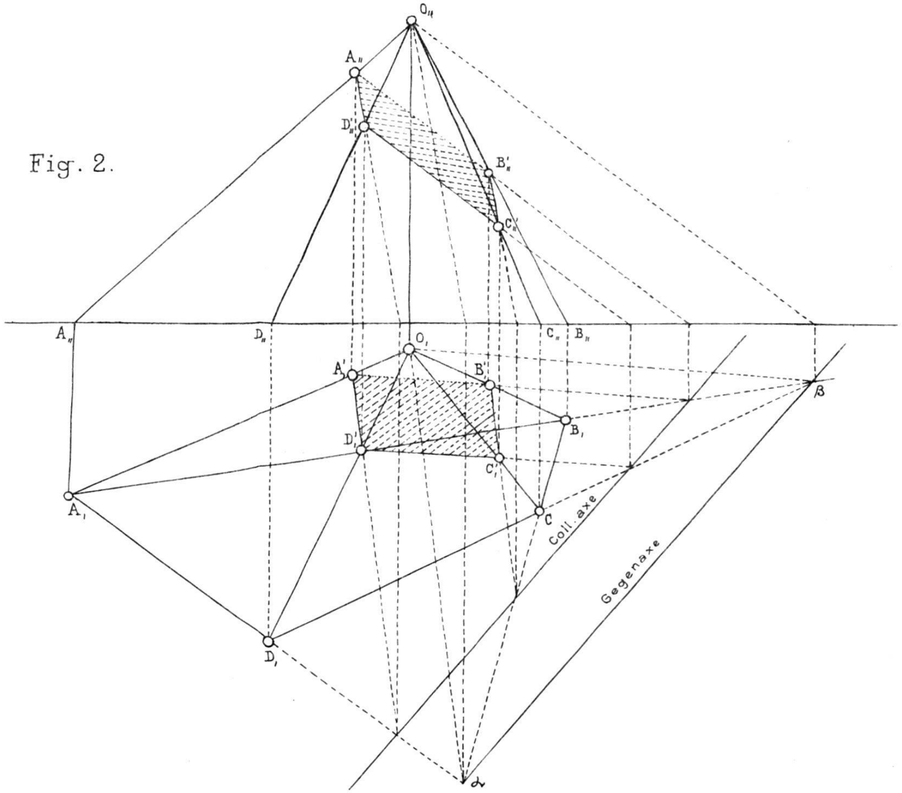


Fig. 3.

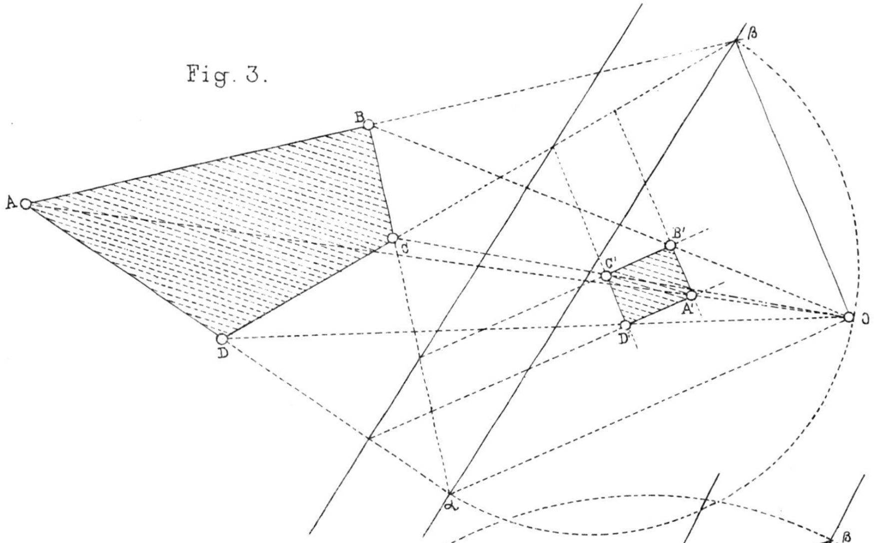
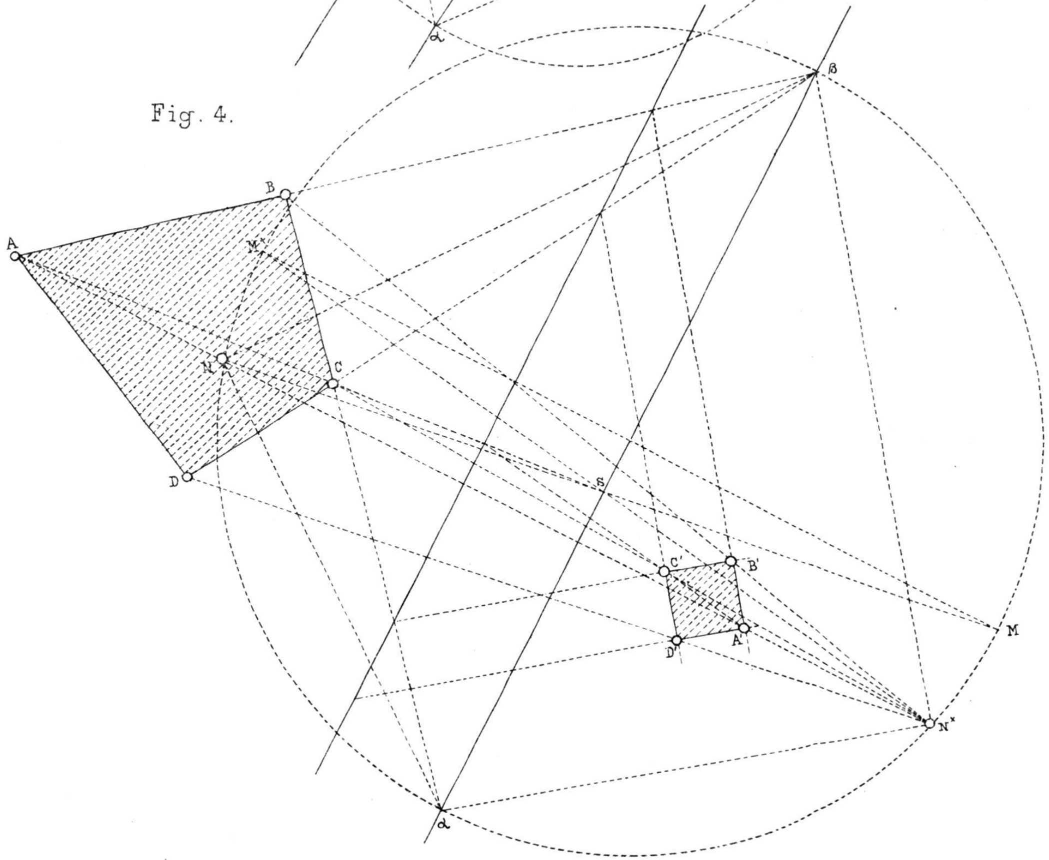


Fig. 4.



Tafel II.

Fig. 5.

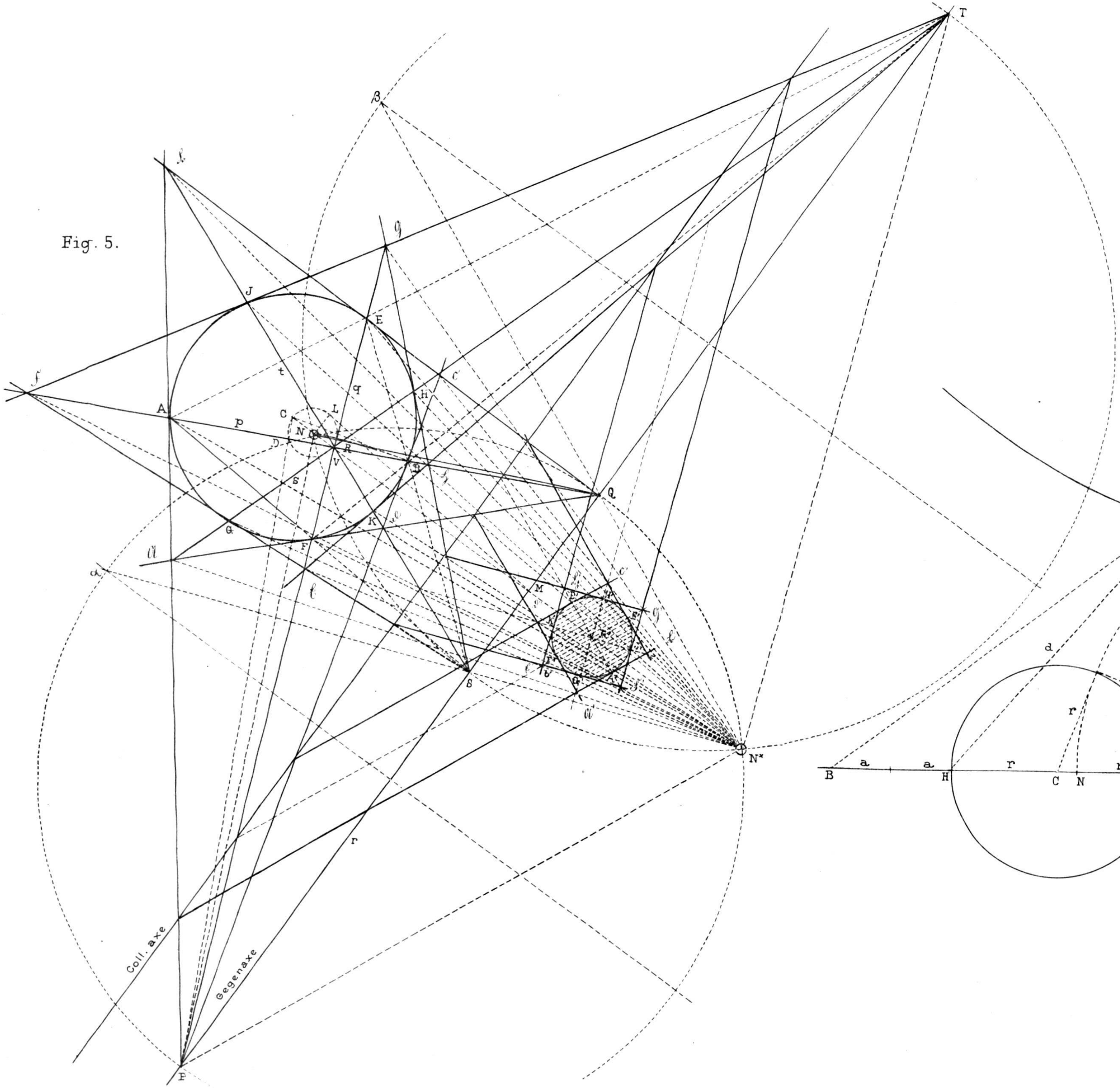


Fig 6.

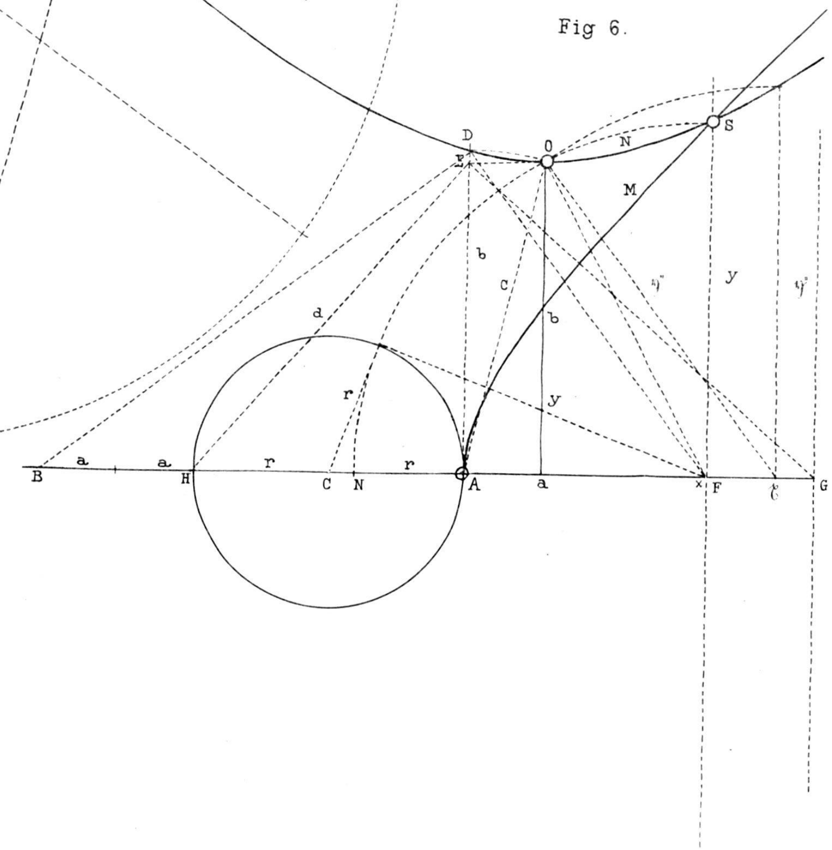
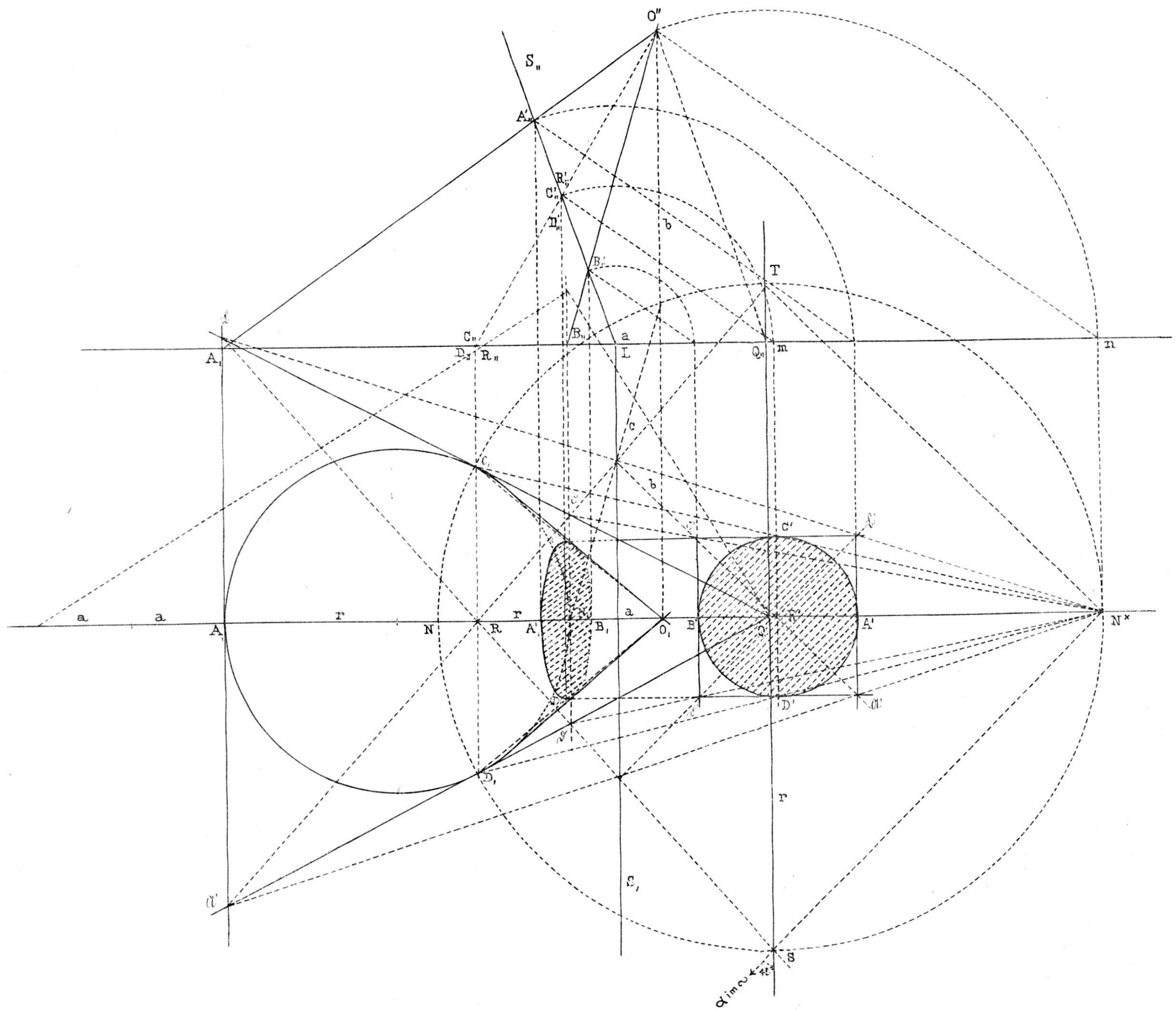


Fig. 7.



sten Verhältnisse gleichen Nenner $C_{,}D_{,}$ haben, so müssen, da die Verhältnisse einander gleich sind, auch die Zähler einander gleich sein, d. h. $C_{,}'D_{,}' = C'D'$. Der um $S_{,}$ herumgeklappte Kegelschnitt der Ebene S fällt also völlig auf den durch zentrische Kollineation aus dem Vierseit abgeleiteten Kreis. Alle zu S parallelen Schnittebenen schneiden selbstverständlich den Kegel auch in Kreisen.

Man kann sich auch das räumliche zentrisch kollineare System in Richtung parallel zur Sehne $O_{,,}n$ auf die Leitlinienebene projiziert denken und erhält in dieser das gezeichnete ebene zentrisch kollineare System.