Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1914)

Artikel: Ueber Reihenentwicklungen nach Quadraten und Produkten von Bessel'schen Funktionen

Autor: Jordi, Eduard

Kapitel: II. Abschnitt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319248

II. Abschnitt.

§ 1. Zweite Methode von Carl Neumann.

In derselben Abhandlung gibt Carl Neumann[16]) eine Methode zur Entwicklung ungerader Funktionen in Reihen, die nach Produkten von Bessel'schen Funktionen fortschreiten. Er beweist daselbst eingangs den Satz:

„Ebenso wie die Entwicklung

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{0}^{\infty} \lambda \; \varepsilon_\lambda \left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 \Omega^\lambda(y) \tag{23.}$$

gültig ist für jedes beliebige, der Bedingung $|x| < |y|$ entsprechende Wertsystem von x und y; ebenso gilt gleiches auch von allen denjenigen Entwicklungen, die aus dieser hervorgehen durch (beliebig oft wiederholtes) Differenzieren nach x und y.

Daraus folgt, dass die in (15.) erhaltenen Entwicklungen ohne Beeinträchtigung ihres Gültigkeitsgebietes beliebig oft nach x differentiert werden können. Setzt man abkürzend

$$\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 = Q^\lambda; \quad \Omega^\lambda(x) = \Omega^\lambda$$

dann lässt sich die Entwicklung (23.) folgendermassen darstellen

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = Q^0\,\Omega^0 + 2\,Q^1\,\Omega^1 + 2\,Q^2\,\Omega^2 + 2\,Q^3\,\Omega^3 + \\ + 2\,Q^4\,\Omega^4 + + \dots \text{ inf.} \tag{24.}$$

Durch Differentiation nach x erhält man:

$$\frac{2}{(y^2 - x^2)^2} = \frac{\Omega^0}{x} \cdot \frac{d\,Q^0}{d\,x} + \frac{2\,\Omega^1}{x} \cdot \frac{d\,Q^1}{x} + \frac{2\,\Omega^2}{x} \cdot \frac{d\,Q^2}{d\,x} +$$

$$+\frac{2\ \Omega^3}{x}\cdot\frac{d\,Q^3}{d\,x}++\ldots\text{inf.} \tag{25.}$$

Nun ist

$$\left.\begin{aligned}
&Q^\lambda=[\overset{\lambda}{J}(x)]^2;\ \frac{d\,Q^\lambda}{d\,x}=\frac{x}{2\lambda}\{Q^{\lambda-1}-Q^{\lambda+1}\}\\
&\text{ferner}\\
&\frac{d\,Q^0}{d\,x}=x\left\{-Q^0+\frac{2}{1\cdot3}\cdot Q^2+\frac{2}{3\cdot5}\cdot Q^4+\frac{2}{5\cdot7}\cdot Q^6++\ldots\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}Q^1+\frac{2}{2\cdot4}\cdot Q^3+\frac{2}{4\cdot6}\cdot Q^5+\frac{2}{6\cdot8}\cdot Q^7++\ldots\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{26.}$$

Setzt man diese Werte in (27.) ein und ordnet, dann kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2}{(y^2-x^2)^2}=\ &\Omega^0\left\{-Q^0+\frac{2}{1\cdot3}Q^2+\frac{2}{3\cdot5}\cdot Q^4+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{2}{5\cdot7}\cdot Q^6++\ldots\right.\\
&+\Omega^0\left\{-\frac{1}{2}Q^1+\frac{2}{2\cdot4}\cdot Q^3+\frac{2}{4\cdot6}\cdot Q^5+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{2}{6\cdot8}\cdot Q^7++\ldots\right.\\
&+\Omega^1\frac{Q^0-Q^2}{1}+\Omega^3\frac{Q^2-Q^4}{3}+\Omega^5\frac{Q^4-Q^6}{5}+\ldots\\
&+\Omega^2\frac{Q^1-Q^2}{2}+\Omega^4\frac{Q^8-Q^5}{4}+\Omega^6\frac{Q^5-Q^7}{6}+\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{27.}$$

Andererseits erhält man durch Differentiation der Gleichung (24.) nach y:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2}{(y^2-x^2)^2}=&-\frac{Q^0}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^0}{d\,y}-2\cdot\frac{Q^1}{y}\frac{d\,\Omega^1}{d\,y}-2\frac{Q^2}{y}\frac{d\,\Omega^2}{d\,y}-\\
&-2\frac{Q^3}{y}\frac{d\,\Omega^3}{d\,y}--\ldots\text{inf.}
\end{aligned}\right. \tag{28.}$$

In den Formeln (27.) und (28.) hat man zwei Entwicklungen für denselben Ausdruck $\frac{2}{(y^2-x^2)^2}$. Beide schreiten fort nach

Q-Funktionen. Nach dem Descartes'schen Prinzip müssen die Koeffizienten von Q-Funktionen desselben Parameters einzeln einander gleich sein. Daraus folgt sofort:

$$-\frac{1}{y}\frac{d\,\Omega^0}{d\,y} = \Omega^1 - \Omega^0$$

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^1}{d\,y} = \frac{\Omega^2}{2} - \frac{\Omega^1}{1}$$

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^2}{d\,y} = \frac{\Omega^3}{3} - \frac{\Omega^1}{1} + \frac{2}{1\cdot 3}\,\Omega^0$$

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^3}{d\,y} = \frac{\Omega^4}{4} - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{2}{2\cdot 4}\cdot\Omega^0$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$-\frac{2}{y}\cdot\frac{d\,\Omega^n}{d\,y} = \frac{\Omega^{n+1}}{n+1} - \frac{\Omega^{n-1}}{n-1} + \frac{2}{(n+1)(n-1)}\cdot\Omega^0$$

Diese Formeln können mit Ausnahme der beiden ersten zusammengefasst werden in eine einzige. Vertauscht man den Parameter n mit λ, dann hat man die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{2}{y}\frac{d\,\Omega^0(x)}{d\,y} = 2\,\Omega^1(y) - 2\,\Omega^0(x)\\
&-\frac{2}{y}\frac{d\,\Omega^1(y)}{d\,y} = \frac{\Omega^2(y)}{2} - \frac{\Omega^1(y)}{1}\\
&-\frac{2}{y}\frac{d\,\Omega^\lambda(y)}{d\,y} = \frac{\Omega^{\lambda+1}(y)}{\lambda+1} - \frac{\Omega^{\lambda-1}(y)}{\lambda-1} + \frac{2\,\Omega^0(y)}{(\lambda+1)(\lambda-1)}
\end{aligned}\right\}\text{(29.)}$$

Diese Ableitungen sind nicht unmittelbar von Belang für die Herleitung der gesuchten Entwicklungsmethode. Doch geben sie eine wichtige Eigenschaft der im ersten Abschnitt eingeführten Ω-Funktionen, die in ihrer Art ähnlich ist den Differentialeigenschaften der $\overset{n}{O}$-Funktion in der Theorie der Bessel'schen Funktionen. Man hat in (6a.) die $\overset{n}{O}$-Funktion definiert durch:

$$\overset{n}{O}(y) = \sum_{0}^{<\frac{n+1}{2}} \lambda \frac{n}{4} \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n+1-2\lambda}$$

Sie genügt der Differentialrelation:

$$\overset{n+1}{O}(y) - \overset{n-1}{O}(y) + 2\frac{d\overset{0}{O}(y)}{dy} = O.$$

Wie leicht einzusehen, kann man der Ω^λ-Funktion auch die Form geben:

$$\Omega^n(y) = \sum_{0}^{n} \lambda \frac{n}{4} \cdot \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!} \cdot \frac{(n+\lambda-1)!}{(n-\lambda)!} \left(\frac{2}{y}\right)^{2\lambda+2}$$

so dass man auch darin eine gewisse Analogie hat. Nach der Art ihrer Entstehung spielt die Ω^n-Funktion für die Neumann'schen Reihen zweiter Art genau dieselbe Rolle wie die $\overset{n}{O}$-Funktion für die Neumann'schen Reihen erster Art.

Mit Hülfe des Satzes (23.) lässt sich nun nachweisen, dass jede gerade Funktion f(x) in demselben Masse wie nach den $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ auch nach den $\frac{d^p}{dx^p}[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ entwickelt werden kann, wo p eine beliebig gegebene gerade Zahl sein kann, dass ferner Gleiches auch gilt von jeder ungeraden Funktion f(x), nur mit dem Unterschied, dass in diesem Fall unter p eine beliebig gegebene ungerade Zahl zu verstehen ist. Setzt man nun $p = 1$, dann hat man offenbar den kürzesten Weg, um aus den Resultaten für die Entwicklung gerader Funktionen Methoden zur Entwicklung ungerader Funktionen herzuleiten.

Um den Punkt $x = 0$ einer x-Ebene sei ein Kreis beschrieben mit dem Radius R. Ferner sei eine Funktion f(x) gegeben, welche eindeutig, stetig und ungerade ist innerhalb dieser Kreisfläche und definiert ist für alle $|x| < R$. Dann ist offenbar die Funktion

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

wo der Integrationsweg auf das Innere des Definitionsbereiches beschränkt gedacht ist, stetig, eindeutig und gerade, solange $|x| < R$ bleibt. Sie ist daher nach Satz (15.) entwickelbar in eine nach den $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ fortschreitende Reihe von der Form:

$$\varphi(x) = k_0 [\overset{0}{J}(x)]^2 + k_1 [\overset{1}{J}(x)]^2 + k_2 [\overset{2}{J}(x)]^2 + + k_3 [\overset{3}{J}(x)]^2 + + \ldots \text{ inf.} \tag{30.}$$

Diese Reihe ist gültig für jeden der Bedingung $|x| < R$ entsprechenden Wert von x. Zufolge des Satzes (23.) kann diese Reihe, unbeschadet ihres Gültigkeitsgebietes nach x differentiert werden. Man erhält somit die Reihe:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = 2k_0 \overset{0}{J} \frac{d}{dx} \overset{0}{J} + 2k_1 \overset{1}{J} \frac{d}{dx} \overset{1}{J} + 2k_2 \overset{2}{J} \frac{d}{dx} \overset{2}{J} + + 2k_3 \overset{3}{J} \frac{d}{dx} \overset{3}{J} + + \ldots \text{ inf.} \tag{31.}$$

wo abkürzend J statt J(x) gesetzt ist. Diese Entwicklung ist unter denselben Bedingungen gültig. Nun ist aber ohne weiteres ersichtlich, dass

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)$$

Ferner ist nach bekannten Differentialeigenschaften der Bessel'schen Funktionen:

$$\frac{d}{dx} \overset{0}{J}(x) = -\overset{1}{J}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \overset{\lambda}{J}(x) = \frac{1}{2} \left\{ \overset{\lambda-1}{J}(x) - \overset{\lambda+1}{J}(x) \right\}; \; \lambda = 1, 2, 3, \ldots \infty.$$

Führt man diese Relationen in (31.) ein, dann kommt:

$$f(x) = -2k_0 \overset{0}{J} \overset{1}{J} + k_1 \overset{1}{J} (\overset{0}{J} - \overset{2}{J}) + k_2 \overset{2}{J} (\overset{1}{J} - \overset{3}{J}) + + k_3 \overset{3}{J} (\overset{2}{J} - \overset{4}{J}) + + \ldots \text{ inf.} \tag{32.}$$

oder was dasselbe ist

$$f(x) = (k_1 - 2\,k_0)\,\overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) + (k_2 - k_1)\,\overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x) + $$
$$+ (k_3 - k_2)\,\overset{2}{J}(x)\,\overset{3}{J}(x) + (k_4 - k_3)\,\overset{3}{J}(x)\,\overset{4}{J}(x) + + \,.\,.\ \text{inf.} \tag{33.}$$

Dieses Resultat notieren wir in folgendem Satz:

„Ist f(x) eine beliebige, gegebene Funktion, welche eindeutig, stetig und ungerade ist, solange $|x| < R$ bleibt, dann ist sie immer darstellbar durch eine nach den Produkten

$$\overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x),\ \overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x),\ \overset{2}{J}(x)\,\overset{3}{J}(x),\ \overset{3}{J}(x)\,\overset{4}{J}(x)\ldots \tag{34.}$$

fortschreitende Entwicklung, die gültig ist für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x".

Man bezeichnet abkürzend

$$\frac{d}{dx}\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2 = \overset{\lambda}{J}(x)\left\{\overset{\lambda-1}{J}(x) - \overset{\lambda+1}{J}(x)\right\} = \overset{\lambda}{\Pi}(x);\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots.\infty. \tag{35.}$$

Deferentiert man nun die in den Gleichungen (1.) gegebenen Entwicklungen für die geraden Potenzen von x, dann erhält man unter Benützung des obigen Symboles:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) + \sum_{1}^{\infty}\lambda\ \overset{\lambda}{\Pi}(x)\\
\frac{2}{2}\cdot x &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\lambda\ (2\,\lambda)^2\cdot\overset{\lambda}{\Pi}(x)\\
\frac{4}{2}\cdot x^3 &= \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\sum_{2}^{\infty}\lambda\ (2\,\lambda)^2\left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right]\cdot\overset{\lambda}{\Pi}(x)\\
\frac{6}{2}\cdot x^5 &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\sum_{3}^{\infty}\lambda\ (2\,\lambda)^2\left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\,\lambda)^2 - 4^2\right]\cdot\overset{\lambda}{\Pi}(x)\\
\frac{8}{2}\cdot x^7 &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\sum_{4}^{\infty}\lambda\ (2\,\lambda)^2\left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\,\lambda)^2 - \right.\\
&\qquad\left. - 4^2\right]\left[(2\,\lambda)^2 - 6^2\right]\overset{\lambda}{\Pi}(x)
\end{aligned}\right\} \tag{36.}$$

Für den Fall $|x| < |y|$, wo x und y komplexe Variable sind, gilt identisch:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = \frac{x}{y^2} + \frac{x^3}{y^4} + \frac{x^5}{y^6} + \frac{x^7}{y^8} + \frac{x^9}{y^{10}} + + \ldots \text{ inf.}$$

Auf der rechten Seite setzt man für die Potenzen von x die Entwicklungen aus (36.) ein. Man erhält dann:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\,y^2} \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda \; (2\,\lambda)^2 \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) +$$

$$+ \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4\,y^4} \cdot 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}\lambda \; (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6\,y^6} \cdot 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}\lambda \; (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 4^2 \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)\right.$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{1}{8\,y^8} \cdot 2 \cdot \sum_{4}^{\infty}\lambda \; (2\,\lambda)^2 \left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - \right.$$

$$\left. - 4^2\right] \left[(2\,\lambda)^2 - 6^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$+ - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$+ \text{ in inf.}$$

Ordnet man nach den $\overset{\lambda}{\Pi}(x)$, dann erhält man eine Entwicklung von der Form:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda \; \overset{\lambda}{P}(y)\, \overset{\lambda}{\Pi}(x) \tag{37.}$$

Die neu eingeführte Funktion $\overset{\lambda}{P}(y)$ ist dabei definiert durch die von Carl Neumann gegebene Formel:

$$\overset{\lambda}{P}(x) = \frac{1}{2}\frac{(2\,\lambda)^2}{2\,y^2} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}\,\frac{(2\,\lambda)^2\left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right]}{4\,y^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2\,\lambda)^2\left[(2\,\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\,\lambda)^2 - 4^2\right]}{6\,y^6} + + \ldots \text{ fin.}$$

Zur bequemeren Verwendung bei den Anwendungen haben wir die $\overset{\lambda}{P}(y)$ Funktion wieder durch eine endliche Summe dargestellt. Der allgemeine Summand lautet:

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{(2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2-2^2\right]\left[(2\lambda)^2-4^2\right]\ldots\ldots\left[(2\lambda)^2-(2\nu-2)^2\right]}{2\nu\cdot y^{2\nu}}$$

$$=\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\;\frac{2^{2\nu-1}(\lambda-\nu+1)(\lambda-\nu+2)\ldots\ldots(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda\cdot\;\cdot\lambda\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+\nu-2)(\lambda+\nu-1)}{\nu\cdot y^{2\nu}}$$

$$=\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\;2^{2\nu-1}\cdot\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu}}$$

Die Laufzahl ν nimmt alle Werte von 1 bis λ; daher lautet nun die Summenformel:

$$\overset{\lambda}{P}(y)=\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\;2^{2\nu-1}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu}} \qquad (38.)$$

Dies kann auch geschrieben werden:

$$\overset{n}{P}(y)=\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\;\frac{n}{4}\cdot\frac{(\lambda-1)!\,(\lambda-1)!}{(2\lambda-1)!}\cdot\frac{(n+\lambda-1)!}{(n-\lambda)!}\cdot\left(\frac{2}{y}\right)^{2\lambda} \qquad (38a.)$$

In dieser letztern Schreibweise tritt die Analogie mit der Ω^n-Funktion am besten hervor.

Mit Rücksicht auf die Definitionsformel (35.) der Π-Funktion kann die Entwicklung (37.) als eine nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe betrachtet werden.

In der Gleichung (3.) hat man für eine gerade Funktion die Integraldarstellung gefunden:

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\cdot\int_r f(y)\cdot\frac{y\cdot dy}{y^2-x^2} \qquad |y|<R;\;|x|<r<R.$$

die Integration erstreckt längs einer um den Punkt $y=0$ beschriebenen, den Punkt $y=x$ umschliessenden Kreisperipherie. Setzt man $f(y)$ als eine ungerade, für alle Werte $|y|<R$ definierte, endliche und stetige Funktion voraus, dann erhält man analog

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_r f(y) \cdot \frac{x \cdot dy}{y^2 - x^2} \tag{39.}$$

die Integration wieder erstreckt über eine, den Punkt $y = x$ umschliessende Kreisperipherie aus dem Nullpunkt. Nun ist nach (37.):

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = \sum_1^\infty \lambda \; 2 \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \qquad |x| < |y|$$

daher auch:

$$f(x) = \sum_1^\infty \lambda \; k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_r f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy \tag{40.}$$

Wir notieren diese Resultate in folgendem Satz:

Jede beliebige Funktion $f(x)$, die eindeutig, stetig und ungerade ist für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x, lässt sich in eine von der Form:

$$f(x) = \sum_1^\infty \lambda \; k \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_r f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy \tag{40.}$$

entwickeln, die zufolge der Definitionsformel (35.) der Π-Funktion betrachtet werden kann als eine Entwicklung, die nach Produkten von J-Funktionen fortschreitet. Die Reihe ist gültig für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x, wenn R eine reelle, endliche Konstante ist.

Ist die beliebige Funktion $f(x)$ nicht definiert für das Gebiet einer vollständigen Kreisfläche, sondern nur für ein Ringgebiet (Laurent'scher Kranz) d. h. für alle Werte von x, die der Bedingung $R_1 < |x| < R$, wo $R_1 < R$, genügen, dann findet man analog dem entsprechenden Fall für die geraden Funktionen eine Reihe, die nach Π- und P-Funktionen fortschreitet von der Form:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \overset{\lambda}{\Pi}(x) \cdot \int_{(R)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \overset{\lambda}{P}(x) \cdot \int_{(R_1)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(y) \cdot dy$$

oder kürzer:

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, k \cdot \overset{\lambda}{\pi}(x) + \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, \mu_\lambda \cdot \overset{\lambda}{P}(x) \\ & \text{wo } k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy \\ & \mu_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int_{(R_1)} f(y) \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(y) \cdot dy \end{aligned}\right\} \quad (41.)$$

Der obige Fall (40.) tritt als Spezialfall dieser letzteren Entwicklung auf, wenn die Entwicklungskoeffizienten μ_λ verschwinden, was für jede Funktion f (x) der Fall ist, die innerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Radius R beschriebenen Kreisgebietes, also für $|x| < r < R$ eindeutig und stetig ist. Mit andern Worten:

Ist der Nullpunkt zugänglich, so kann die Entwicklung von f (x) nur Potenzen mit positivem Exponenten enthalten, und da $\overset{\lambda}{J}(x)$ auch nur solche enthält, muss in diesem Fall das Kreisintegral

$$\int_{R} \overset{\lambda}{\Pi}(y)\, f(y) \cdot dy$$

notwendig verschwinden, also auch $\mu_\lambda = 0$ sein. Der Entwicklungskoeffizient k_λ dagegen kann dann nicht gleich Null sein, weil $\overset{\lambda}{P}(y)$ eine Reihe ist, die nach wachsenden negativen Potenzen fortschreitet, die also das Integral nicht verschwinden lassen, wenn sie sich teilweise mit dem positiven Potenzen von f (y) zum Integranden $\frac{dy}{y}$ ergänzen.

Lässt sich die gegebene, ungerade Funktion f(x) nur in eine nach wachsenden negativen Potenzen des Argumentes fortschreitende Potenzreihe entwickeln, dann verschwindet umgekehrt das Integral

$$\int_{(R)} \overset{\lambda}{P}(y) f(y) \cdot dy$$

damit wird auch k_λ zu Null, und man erhält eine Entwicklung die nur nach $\overset{\lambda}{P}(x)$-Funktionen fortschreitet.

Weist endlich die Potenzreihenentwicklung der gegebenen ungeraden Funktion f(x) sowohl positive und negative Potenzen auf, dann verschwinden die k_λ und μ_λ nur teilweise, und man erhält eine nach Π- und P-Funktionen fortschreitende Entwicklung.

Die für die gegebene, ungerade Funktion f(x) möglichen drei Fälle können natürlich auch bei einer geraden Funktion $\varphi(x)$ eintreten. Es gelten dann hinsichtlich der gesuchten Entwicklung die den obigen entsprechenden Bedingungen, nämlich:

Enthält die Potenzreihenentwicklung der gegebenen geraden Funktion $\varphi(x)$ nur positive Potenzen, dann schreitet die gesuchte Neumann'sche Reihe zweiter Art nur fort nach den Quadraten der J-Funktion, d. h. in der Formel (16a.) verschwinden alle Koeffizienten μ_λ.

Enthält die Potenzreihenentwicklung der gegebenen geraden Funktion $\varphi(x)$ nur negative Potenzen, dann schreitet die gesuchte Entwicklung nur fort nach Ω^λ-Funktionen, d. h. alle k_λ verschwinden.

Enthält endlich die Potenzreihenentwicklung der gegebenen geraden Funktion $\varphi(x)$ sowohl negative als auch positive Potenzen, ist sie also definiert für einen Laurent'schen Kranz, dann verschwinden weder alle μ_λ noch alle k_λ; die gesuchte Entwicklung schreitet daher fort nach den $\left[\overset{\lambda}{J}(x)\right]^2$ und $\Omega^\lambda(x)$.

Um auch für diese zweite Neumann'sche Methode eine kurze Charakteristik zu geben, heben wir hervor, dass sie die erste Methode dahin ergänzt, dass unter Anwendung beider Methoden gerade und ungerade Funktionen in Neumann'sche Reihen II. Art entwickelt werden können. Aber selbst unter gleichzeitiger Anwendung beider Methoden ist es nicht möglich, Funktionen, deren Potenzreihen nach geraden und ungeraden Potenzen des Arguments fortschreiten, in Neumann'sche Reihen zweiter Art zu entwickeln. In dieser Hinsicht ist die Möglichkeit der Entwicklung nach Reihen erster Art viel allgemeiner, indem von der zu entwickelnden Funktion nur verlangt wird, dass sie durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann.

Im übrigen ist diese zweite Neumann'sche Methode anwendbar auf alle ungeraden Funktionen, die in eine konvergente Potenzreihe enwickelt werden können. Denn dadurch werden die zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten k_λ und μ_λ entstehenden Integralausdrücke leicht integrierbar. In Anwendung des Verfahrens geben wir nachstehend die Entwicklungen einiger ungerader Funktionen.

---

§ 2. Aufstellung der Reihen für die ungeraden Potenzen von x.

Es sei vorerst aufmerksam gemacht auf die durch Differentiation der Entwicklung für 1, d. h. von

$$1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

erhaltene Identität

$$0 = -\overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$0 = -\overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) + \overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) - \overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x) + \overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x) - + - + \ldots \text{ inf.}$$

1. Aufstellung der Reihe für x.

$$f(x) = x;\; f(y) = y$$

$$x = \sum_{\lambda=1}^{\infty} k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x);\quad k_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{2i\pi} \cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy.$$

Man erhält im einzelnen:

$$k_1 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \overset{1}{P}(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \frac{dy}{y} = 2.$$

$$k_2 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int^{2} P(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \left\{ \frac{4}{y^2} + \frac{8}{y^4} \right\} y \cdot dy = 8.$$

$$k_3 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int^{3} P(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \left\{ \frac{9}{y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{48}{y^4} + \frac{192}{y^6} \right\} \cdot y \cdot dy = 18.$$

$$k_4 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int^{4} P(y) \cdot y \cdot dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \left\{ \frac{16}{y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{160}{y^4} + \ldots \right\} y \cdot dy = 32.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

im allgemeinen:

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \sum_{1}^{\lambda} {}_\nu \, 2^{2\nu-1} \frac{\nu! \, \nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!} \frac{1}{y^{2\nu}} \cdot y \cdot dy.$$

Die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{-2\nu+1}$. Um für dieses Cauchy'sche Integral überhaupt einen von Null verschiedenen Wert zu erhalten, muss die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ sein und diese erhält man durch die Setzung $-2\nu + 1 = -1$; $\nu = 1$. Dann wird im Integranden der Koeffizient von $\frac{1}{y} \left[\frac{1}{y}\right] = \lambda^2$ und daher:

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \lambda^2 \cdot \int \frac{dy}{y} = 2\lambda^2.$$

Dadurch wird nun die Entwicklung für x zu:

$$x = 2 \overset{1}{\Pi}(x) + 8 \overset{2}{\Pi}(x) + 18 \overset{3}{\Pi}(x) + 32 \overset{4}{\Pi}(x) + 50 \overset{5}{\Pi}(x) + + \ldots \text{ inf.}$$

$$x = \sum_{1}^{\infty} {}_\lambda \, 2\lambda^2 \overset{\lambda}{\Pi}(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1}^{\infty} {}_\lambda \, (2\lambda)^2 \overset{\lambda}{\Pi}(x) \qquad (42.)$$

In dieser Darstellung hat man jedoch nur eine mittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe. Um eine auch unmittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe zu erhalten, bildet man nach (33.) die Koeffizienten

$$a_1 = (k_1 - 2\,k_0) = 2; \quad a_2 = (k_2 - k_1) = 6; \quad a_3 = (k_3 - k_2) = 10$$
$$a_4 = (k_4 - k_3) = 14$$

allgemein

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1}) = 2\left\{\lambda^2 - (\lambda - 1)^2\right\} = 2\,(2\,\lambda - 1)$$

Die unmittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe erhält demnach die Form:

$$\underline{x = 2 \cdot \overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) + 6 \cdot \overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x) + 10\,\overset{2}{J}(x)\,\overset{3}{J}(x) +}$$
$$\underline{+ 14\,\overset{3}{J}(x)\,\overset{4}{J}(x) + 18\,\overset{4}{J}(x) \cdot \overset{5}{J}(x) + + \text{inf.}}$$

$$\underline{= 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, (2\,\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)} \quad \text{gültig für } |x| < R.$$

Wir leiten noch die Formel für die allgemeine ungerade Potenz ab. Es sei

$$f(x) = x^{2n-1}; \; f(y) = y^{2n-1}$$

Wir definieren die ungerade Potenz aus dem Grund mit x^{2n-1} und nicht wie sonst üblich mit x^{2n+1}, um unter dem Integralzeichen des zur Bestimmung von k_λ auszuwertenden Integrals überhaupt die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ zu erhalten. Jede andere Potenz gibt zu jenem Cauchy'schen Integral keinen Beitrag. Man hat also:

$$x^{2n-1} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot d\,y$$

Setzt man für $\overset{\lambda}{P}(y)$ die Summenformel, so kommt:

$$k_\lambda = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{2\nu-1} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\,\nu)!}\,\frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda + \nu - 1)!}{(\lambda - \nu)!} \cdot \int y^{2n-1}\,\frac{1}{y^{2\nu}} \cdot d\,y$$

Die Potenz $\frac{1}{y} = y^{-1}$ erhält man durch die Setzung $2n - 1 - 2\nu = -1$; $n = \nu$.

Dann wird im Integranden der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ zu:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = 2^{2n-1} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{(\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!}$$

woraus sich sofort k_λ bestimmt zu:

$$k_\lambda = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[\ldots\ldots\right]\left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right]$$

---

und daher erhält man für x^{2n-1}:

$$x^{2n-1} = \frac{1}{n} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \sum_{n}^{\infty}{}_{\lambda} \, (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[\ldots\right]\left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \qquad (43.)$$

Man bildet wie früher:

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1}) = 2^{2n+1} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!}$$

und daher

$$x^{2n-1} = 2^{2n} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \sum_{n}^{\infty}{}_{\lambda} \, (2\lambda - 1) \cdot \frac{(\lambda + n - 1)!}{(\lambda - n)!} \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \qquad (44.)$$

Um die Konvergenz der in (42.) bis (44.) hergeleiteten Formeln nachzuweisen, zeigt man, wie im ersten Abschnitt, dass die Bedingungen

$$\frac{|n_{\lambda+1}|}{|n_\lambda|} < 1$$

von einem beliebigen, endlichen λ an erfüllt sind, so wie ferner

$$\lim_{\lambda = \infty} \frac{|n_{\lambda+1}|}{|n_\lambda|} = 0.$$

Den für ein und dieselbe Potenz konstanten Faktor

$$2^{2n} \cdot \frac{n!\, n!}{(2n)!}$$

lässt man dabei ausser acht. Nach der Formel von J. J. Schönholzer wird, wenn man in

$$\overset{a}{J}(x) \cdot \overset{b}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \, (-1)^{\mu} \cdot \frac{\Gamma(a+b+2\mu+1)}{\mu!\, \Gamma(a+\mu+1) \cdot \Gamma(b+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\mu}}{\Gamma(a+b+\mu+1)}$$

für a setzt $\lambda - 1$, für b setzt λ

$$\overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \, (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(2\lambda+2\mu)}{\mu!\, \Gamma(\lambda+\mu) \cdot \Gamma(\lambda+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu-1}}{\Gamma(2\lambda+\mu)}$$

oder statt der Gammafunktionen die Fakultäten gesetzt, indem man festsetzt, das μ nur alle ganzen, positiven Zahlen durchlaufen soll, was für λ a priori Bedingung ist,

$$\overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \, (-1)^{\mu} \cdot \frac{(2\lambda+2\mu-1)!}{\mu!\,(\lambda+\mu-1)!\,(\lambda+\mu)!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+2\mu-1}}{(2\lambda+\mu-1)!}$$

Genau in derselben Weise wie für $[\overset{\lambda}{J}(x)]^2$ kann man hier schliessen, dass der absolute Betrag des ersten Summanden grösser ist als der absolute Betrag der Summe aller einzelnen Summanden. Es ist daher das allgemeine Glied $n_{\lambda+1}$ der allgemeinen ungeraden Potenz:

$$|n_{\lambda+1}| < (2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n+1)} \cdot \frac{\left|\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}\right|}{\lambda!\,(\lambda+1)!}$$

ebenso

$$|n_{\lambda}| < (2\lambda-1) \cdot \frac{(\lambda+n-1)!}{(\lambda-n)!} \cdot \frac{\left|\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}\right|}{(\lambda-1)!\,\lambda!}$$

Daher

$$\frac{|n_{\lambda+1}|}{|n_\lambda|} < \frac{(2\lambda+1)}{(2\lambda-1)} \cdot \frac{(\lambda+n)}{(\lambda-n+1)} \cdot \frac{x^2}{4\cdot\lambda\cdot(\lambda+1)}$$

Für im Vergleich zu n einigermassen grosse λ konvergieren der erste und der zweite Bruch rechts jeder für sich gegen 1. Unter der a priori gemachten Voraussetzung, dass $|x| < R$, wo R eine reelle, endliche Konstante ist, kann leicht ein λ gefunden werden, für welches der Quotient rechts kleiner als 1 ist. Daraus ist auch ersichtlich, dass für lim $(\lambda = \infty)$ der Quotient zu Null wird. Die durch die Formeln (42.) bis (44.) dargestellten Neumann'schen Reihen zweiter Art für die ungeraden Potenzen von x sind also unbedingt konvergent für alle endlichen Werte des Argumentes x.

---

§ 3. Vergleich zwischen den für die geraden und ungeraden Potenzen von x geltenden Neumann'schen Reihen erster und zweiter Art.

Die Reihen erster Art für die geraden Potenzen, die wir der oben zitierten Schrift von W. Köstler entnehmen, sind die folgenden:

$$1 = \overset{0}{J}(x) + 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^2 = 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda)^2 \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^4 = 2 \cdot \sum_{\lambda=2}^{\infty} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$x^6 = 2 \cdot \sum_{\lambda=3}^{\infty} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \overset{2\lambda}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n} = 2 \cdot \sum_{\lambda=n}^{\infty} (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2][(2\lambda)^2 - 4^2][\ldots\ldots][(2\lambda)^2 - (2n-2)^2] \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

Die Reihen zweiter Art für die geraden Potenzen sind:

$$1 = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda)^2 \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^4 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot \sum_{\lambda=2}^{\infty} (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2] \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

$$x^6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2 \cdot \sum_{\lambda=3}^{\infty} (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2][(2\lambda)^2 - 4^2] \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n} = \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot 2 \cdot \sum_{\lambda=n}^{\infty} (2\lambda)^2 [(2\lambda)^2 - 2^2][(2\lambda)^2 - 4^2][\ldots\ldots][(2\lambda)^2 - (2n-2)^2] [\overset{\lambda}{J}(x)]^2$$

Man erkennt sofort die grosse Analogie zwischen den beiden Entwicklungen. Die Entwicklungskoeffizienten der Reihen zweiter Art sind proportional den entsprechenden der ersten Art. Der Proportionalitätsfaktor ist jeweilen $\frac{n!\, n!}{(2n)!}$. Bei den Reihen erster Art kommen nur Bessel'sche Funktionen mit geraden Parametern vor, während bei denjenigen zweiter Art gerade und ungerade Parameter auftreten.

Die Reihen erster Art für die ungeraden Potenzen sind:

$$x = 2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda + 1) \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda \; (2\lambda+1)\left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right] \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}\lambda \; (2\lambda+1)\left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right]\left[(2\lambda+1)^2 - 3^2\right] \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^7 = 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}\lambda \; (2\lambda+1) \cdot \left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right]\left[(2\lambda+1)^2 - 3^2\right]\left[(2\lambda+1)^2 - \right.$$
$$\left. - 5^2\right] \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n+1} = 2 \cdot \sum_{n}^{\infty}\lambda \; (2\lambda+1)\left[(2\lambda+1)^2 - 1^2\right]\left[\ldots\ldots\right]\left[(2\lambda+1)^2 - \right.$$
$$\left. - (2n-1)^2\right] \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

Die Reihen zweiter Art sind in der ersten Schreibweise:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{\infty}\lambda \; (2\lambda)^2 \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$x^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot \sum_{2}^{\infty}\lambda \; (2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$x^5 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2 \cdot \sum_{3}^{\infty}\lambda \; (2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

$$x^7 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 2 \cdot \sum_{4}^{\infty}\lambda \; (2\lambda)^2 \cdot \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - 4^2\right]\left[(2\lambda)^2 - \right.$$
$$\left. - 6^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n-1} = \frac{1}{2n} \, \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot 2 \cdot \sum_{n}^{\infty}\lambda \; (2\lambda)^2\left[(2\lambda)^2 - 2^2\right]\left[(2\lambda)^2 - \right.$$
$$\left. - 4^2\right]\left[\ldots\ldots\ldots\right]\left[(2\lambda)^2 - (2n-2)^2\right] \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x).$$

Durch Vergleich mit den Reihen zweiter Art für die geraden Potenzen erkennt man sofort, dass die Reihen für die ungeraden Potenzen kurzweg durch Differentiation der geraden Potenzen erhalten werden können, wenn man das Symbol $\overset{\lambda}{\Pi}(x)$ einführt. Man erhält zwar dabei nur eine mittelbar nach Produkten fortschreitende Reihe. Will man die unmittelbar nach Produkten $\overset{\lambda-1}{J}\ \overset{\lambda}{J}$ fortschreitenden Reihen haben, so hat man die Koeffizienten a_λ zu bilden aus $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$. Die Reihen werden dann:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda^2} \cdot (2\lambda)^2 \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$x^3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda \cdot (\lambda + 1)} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$x^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \sum_{3}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda \cdot (\lambda + 2)} \cdot (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)$$

$$x^7 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \sum_{4}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda \cdot (\lambda + 3)} \cdot (2\lambda)^2 \cdot \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 6^2\right] \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n-1} = \frac{n!\, n!}{(2n)!} \sum_{n}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda - 1)}{\lambda (\lambda + n - 1)} (2\lambda)^2 \left[(2\lambda)^2 - 2^2\right] \left[(2\lambda)^2 - 4^2\right] [\ldots\ldots] \left[(2\lambda)^2 - (2n - 2)^2\right] \overset{\lambda-1}{J}(x)\, \overset{\lambda}{J}(x).$$

Wie leicht zu kontrollieren ist, lassen sich die Reihen erster Art für die ungeraden Potenzen auch folgendermassen schreiben:

$$x = 2 \cdot \sum_{0}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = 2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\ (2\lambda+1) \cdot 2^2 \cdot \lambda \cdot (\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = 2 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda\ (2\lambda+1) \cdot 2^2 \lambda(\lambda+1) \cdot 2^2 (\lambda-1) \cdot (\lambda+2) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^7 = 2 \cdot \sum_{3}^{\infty} \lambda\ (2\lambda+1) \cdot 2^2 \lambda (\lambda+1)\, 2^2 (\lambda-1)(\lambda+2)\, 2^2 (\lambda - {}$$
$$- 2)(\lambda+3) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n+1} = 2 \cdot \sum_{n}^{\infty} \lambda\ (2\lambda+1) \cdot 2^2 \lambda (\lambda+1)\, 2^2 (\lambda-1)(\lambda + {}$$
$$+ 2) \ldots\ldots 2^2 (\lambda - n + 1)(\lambda + n) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

Für die entsprechenden Potenzen nach Reihen zweiter Art steht uns unbenommen, unter Berücksichtigung der dadurch bedingten Veränderung der untern Grenze statt der Laufzahl λ die Laufzahl $\lambda+1$ zu setzen. Man erhält dann:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sum_{0}^{\infty} \frac{(2\lambda+1)}{(\lambda+1)^2} \cdot 2^2 \cdot (\lambda+1)^2 \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sum_{0}^{\infty} \lambda\ (2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\ \frac{(2\lambda+1)}{(\lambda+1) \cdot (\lambda+2)} \cdot 2^2 (\lambda+1)^2\, 2^2 [(\lambda+1)^2 - {}$$
$$- 1^2] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\ \frac{(2\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \cdot 2^2 \cdot (\lambda+1)^2 \cdot 2^2 \cdot \lambda \cdot (\lambda+2) \cdot$$
$$\cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2^2 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \cdot 2^2 \cdot (\lambda + 1) \cdot \lambda \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1)(\lambda + 3)} \cdot 2^2 (\lambda + 1)^2 \cdot 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - \right.$$

$$\left. - 1^2\right] 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - 2^2\right] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + 3)} \cdot 2^2 (\lambda + 1)^2 \cdot 2^2 \lambda \cdot (\lambda + 2) \cdot$$

$$\cdot 2^2 (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2^2 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \cdot 2^2 \lambda (\lambda + 1) \cdot 2^2 (\lambda - 1)(\lambda + 2) \cdot$$

$$\cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^{2n-1} = \frac{n!\, n!}{(2n)!} \sum_{n-1}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + n)} \; 2^2 (\lambda + 1)^2 \, 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - \right.$$

$$\left. - 1^2\right] \ldots\ldots 2^2 \left[(\lambda + 1)^2 - (n - 1)^2\right] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot \sum_{n-1}^{\infty} \lambda \; \frac{(2\lambda + 1)}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + n)} \cdot 2^2 (\lambda + 1)^2 \cdot 2^2 \lambda \cdot (\lambda +$$

$$+ 2) \ldots\ldots 2^2 (\lambda - n + 2)(\lambda + n) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$= \frac{n!\, n!}{(2n)!} \cdot 2^2 \sum_{n-1}^{\infty} \lambda \; (2\lambda + 1) \cdot 2^2 \lambda (\lambda + 1) \, 2^2 (\lambda - 1)(\lambda +$$

$$+ 2) \ldots\ldots 2^2 [\lambda + n - 1^1] \cdot [\lambda - (n - 1) + 1] \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

Denkt man sich auch hier die allgemeine ungerade Potenz durch x^{2n+1} definiert wie oben, setzt man also n statt (n — 1), dann wird die letzte Reihe:

$$x^{2n+1} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot 2^2 \sum_{n}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1)\,2^2\,\lambda\,(\lambda+1)\,2^2\,(\lambda - 1)(\lambda+2)\ldots\ldots 2^2\,(\lambda - n + 1)(\lambda + n)\,\overset{\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda+1}{J}(x)$$

Vergleicht man jetzt die Entwicklungen nach Reihen erster und zweiter Art, so erkennt man die Proportionalität der Entwicklungskoeffizienten, wobei der Proportionalitätsfaktor

$$2 \cdot \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}$$

ist. Damit ist die Behauptung, die Carl Neumann in der genannten Abhandlung ausgesprochen hat, dass nämlich die Entwicklungskoeffizienten der Reihen bis auf den Proportionalitätsfaktor mit einander übereinstimmen, auch für die ungeraden Potenzen nachgewiesen. Bedeutend einfacher ist die dritte Schreibweise für die Reihen der ungeraden Potenzen:

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sum_{0}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2^4 \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+1)!}{(\lambda-1)!}\,\overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

$$x^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2^6 \cdot \sum_{2}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+2)!}{(\lambda-2)} \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$x^{2n+1} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot 2^{2n+2} \cdot \sum_{n}^{\infty} \lambda\,(2\lambda+1) \cdot \frac{(\lambda+n)!}{(\lambda-n)!}\,\overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x)$$

§ 4. Herleitung der Reihen für die ungeraden trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen.

1. Die Reihe für sin (x).

$$f(x) = \sin(x); \quad f(y) = \sin(y)$$

$$\sin(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\; k_\lambda \overset{\lambda}{\Pi}(x); \qquad \text{wo } k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot$$

$$\cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy.$$

Die zur Bestimmung von k_λ dienenden Integrale lassen sich wieder am bequemsten auswerten, wenn man für sin (y) seine Potenzreihenentwicklung einsetzt. Es ist allgemein:

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - + \ldots \text{inf.} =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\; (-1)^{\mu-1} \frac{y^{2\mu-1}}{(2\mu-1!)}$$

wo man wieder, abweichend vom üblichen Gebrauch, die Summenformel wie angegeben schreibt, und nicht

$$\sin y = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\; (-1)^{\mu} \cdot \frac{y^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$$

um im Integranden überhaupt die Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ zu erhalten. Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten ergibt nun im einzelnen:

$$k_1 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \sin(y) \cdot \overset{1}{P}(y) \cdot dy$$

$$= \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \left\{ y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \ldots \right\} \left\{ \frac{1}{y^2} \right\} dy = 2$$

$$k_2 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \sin(y) \cdot \overset{2}{P}(y) \cdot dy$$

$$=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int\cdot\left\{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+-\ldots\right\}\left\{\frac{4}{y^2}+\frac{8}{y^4}\right\}\cdot dy=\frac{16}{1\cdot 3}$$

$$k_3=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int\cdot\sin(y)\cdot\overset{3}{P}(y)\cdot dy$$

$$=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int\left\{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\frac{y^9}{9!}-+\ldots\right\}\left\{\frac{9}{y^2}+\frac{48}{y^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{192}{y^6}\right\}\cdot dy=\frac{78}{1\cdot 3\cdot 5}$$

$$k_4=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int\sin(y)\cdot\overset{4}{P}(y)\cdot dy$$

$$=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int\left\{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\frac{y^9}{9!}-\frac{y^{11}}{11!}+-\ldots\right\}\left\{\frac{16}{y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{160}{y^4}+\frac{1536}{y^6}+\frac{9216}{y^8}\right\}\cdot dy=\frac{64}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

im allgemeinen:

$$k_\lambda=\frac{2}{2i\pi}\cdot\int\sum_1^\infty{}_\mu(-1)^{\mu-1}\frac{y^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}\cdot\sum_1^\lambda{}_\nu\, 2^{2\nu-1}$$

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\frac{1}{y^{2\nu}}\cdot dy.$$

Die in Betracht fallende Potenz $\frac{1}{y}$ erhält man, da die allgemeine Potenz im Integranden $y^{2\mu-1-2\nu}$ ist, durch die Setzung $2\mu-1-2\nu=-1$, also $\nu=\mu$. Dann wird der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ im Integranden:

$$\left[\frac{1}{y}\right]=(-1)^{\nu-1}\,2^{2\nu-1}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}\cdot\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu-1)!}$$

woraus dann:

$$k_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu-1)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Man erhält demgemäss eine erste Form der Entwicklung:

$$\sin(x) = 2 \cdot \overset{1}{\Pi}(x) + \frac{16}{1\cdot 3} \cdot \overset{2}{\Pi}(x) + \frac{78}{1\cdot 3\cdot 5} \cdot \overset{3}{\Pi}(x) +$$

$$+ \frac{64}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \cdot \overset{4}{\Pi}(x) + + \ldots \text{ inf.}$$

$$= \sum_1^\infty {}_\lambda \sum_1^\lambda {}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu-1)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \qquad (45.)$$

Um die unmittelbar nach Produkten von J-Funktionen fortschreitende Reihe zu erhalten, bildet man die Koeffizienten:

$$a_1 = (k_1 - 2k_0) = 2; \quad a_2 = (k_2 - k_1) = \frac{10}{3};$$

$$a_3 = (k_3 - k_2) = -\frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}; \quad a_4 = (k_4 - k_3) = -\frac{482}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \quad - - -$$

allgemein $\qquad a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$.

Nun ist

$$k_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu (-1)^{\nu-1} 2^{2\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!\,(2\nu-1)!}$$

$$k_{\lambda-1} = \sum_1^{\lambda-1} {}_\nu (-1)^{\nu-1} 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda-1}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!\,(2\nu-1)!}$$

dann wird

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1}) = \sum_1^{\lambda-1} {}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu-1)!} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}-\frac{(\lambda+\nu-2)!\,(\lambda-1)!}{(\lambda-\nu-1)!}\right\}+$$

$$+(-1)^{\lambda-1}\cdot 2^{2\lambda}\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda-1)!\,(2\lambda)!}\cdot\frac{\lambda\cdot(2\lambda-1)!}{\lambda}$$

Der Term in der Klammer kann reduziert werden zu:

$$\frac{\lambda(\lambda+\nu-1!)}{(\lambda-\nu)!}-\frac{(\lambda+\nu-2)!\,(\lambda-1)!}{(\lambda-\nu-1)!}=\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-2)!\,(\lambda+\nu-1)}{(\lambda-\nu-1)!\,(\lambda-\nu)}-$$

$$-\frac{(\lambda-1)\,(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}$$

$$=\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\cdot\left\{\frac{\lambda\cdot(\lambda+\nu-1)}{(\lambda-\nu)}-(\lambda-1)\right\}$$

$$=\nu\cdot(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Ferner ist

$$(-1)^{\lambda-1}\,2^{2\lambda}\,\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda-1)!\,(2\lambda)!}\cdot\frac{\lambda\,(2\lambda-1)!}{\lambda}=(-1)^{\lambda-1}\cdot 2^{2\lambda}\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!}$$

Nach diesen Reduktionen wird:

$$a_\lambda=(k_\lambda-k_{\lambda-1})=\sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\;(-1)^{\nu-1}\,2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\cdot$$

$$\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}+(-1)^{\lambda-1}\,2^{2\lambda}\,\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!}$$

Der letzte Term kann ebenfalls unter das Summenzeichen genommen werden, sodass man für den Entwicklungskoeffizienten a_λ der unmittelbar nach Produkten von Bessel'schen Funktionen fortschreitenden Reihe die einfache Formel hat:

$$a_\lambda=\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\;(-1)^{\nu-1}\cdot 2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}\,(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Die Reihe selber wird dann:

$$\sin(x) = 2\overset{0}{J}(x)\cdot\overset{1}{J}(x) + \frac{10}{1\cdot 3}\cdot\overset{1}{J}(x)\cdot\overset{2}{J}(x) - \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\overset{2}{J}(x)\cdot\overset{3}{J}(x) -$$

$$-\frac{482}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\cdot\overset{3}{J}(x)\overset{4}{J}(x) + + - - \ldots \text{ inf.}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda\,(2\lambda-1)\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\cdot\sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\nu-1}\cdot 2^{2\nu}\cdot \qquad (45\text{a.})$$

$$\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Um die Konvergenz der obigen Reihe nachzuweisen, bildet man entsprechend dem bisherigen Verfahren den Quotienten

$$\frac{|n_{\lambda-1}|}{|n_\lambda|}$$

und weist nach, dass er von einem beliebigen, endlichen λ kleiner wird als eins. Die zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten a_λ dienenden, endlichen Reihen haben bei wechselndem Vorzeichen Summenglieder, die wachsen bis zu einem bestimmten Wert der Laufzahl ν, um nachher wieder abzunehmen. Wir führen eine Untersuchung durch, die derjenigen bei der Cosinusreihe entspricht. Man hat wieder in zwei Fällen zu unterscheiden, 1) λ gerade, $\lambda = 2n$, 2) λ ungerade, $\lambda = 2n + 1$. Die Untersuchung des ersten Falles wird dann:

1. Fall: $\lambda = 2n$. Der allgemeine, absolut genommene Term der Reihe für a_λ:

$$a_\lambda = \sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\nu-1}\,2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

wird:

$$2^{2\nu}\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}\cdot(2\lambda-1)\,\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Man setze darin $\nu = \frac{\lambda}{2}$; dann kommt:

$$2^{\lambda} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)! \left(\frac{\lambda}{2}\right)!}{(\lambda - 1)!\ \lambda!} (2\lambda - 1) \cdot \frac{\left\{\lambda + \frac{\lambda}{2} - 2\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda}{2}\right\}!}$$

oder $\lambda = 2n$ gesetzt:

$$2^{2n} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n-1)!\,(2n)!} (4n-1) \frac{(3n-2)!}{n!} \tag{A.}$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied erhält man durch die Setzung:

$$\nu = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{\lambda + 2}{2}$$

dann wird der allgemeine Term absolut genommen:

$$2^{\lambda+2} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)! \left(\frac{\lambda+2}{2}\right)!}{(\lambda+1)!\,(\lambda+2)!} \cdot (2\lambda - 1) \cdot \frac{\left\{\lambda + \frac{\lambda+2}{2} - 2\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda+2}{2}\right\}!}$$

für $\lambda = 2n$ gesetzt:

$$2^{2n+2} \cdot \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)!} (4n-1) \cdot \frac{(3n-1)!}{(n-1)!} \tag{C.}$$

Das unmittelbar vorangehende Glied erhält man durch die Setzung:

$$\nu = \frac{\lambda}{2} - 1 = \frac{\lambda - 2}{2}$$

dann wird der allgemeine Term absolut genommen:

$$2^{\lambda-2} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)! \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)!}{(\lambda-3)!\,(\lambda-2)!} (2\lambda - 1) \cdot \frac{\left\{\lambda + \frac{\lambda-2}{2} - 2\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda-2}{2}\right\}!}$$

oder für $\lambda = 2n$ gesetzt:

$$2^{2n-2} \cdot \frac{(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-3)!\,(2n-2)!}\,(4n-1) \cdot \frac{(3n-3)!}{(n+1)!} \qquad \text{(B.)}$$

Bildet man den Quotienten aus (A) und (B), so wird dieser:

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4 \cdot (\lambda-2) \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda-1)}{\lambda \cdot (\lambda+2) \cdot (3\lambda-4)}$$

Der Quotient aus (C) und (A) wird:

$$\frac{(C)}{(A)} = \frac{(\lambda+2)\,(3\lambda-2)}{4\,(\lambda+1)^2}$$

Wie leicht zu kontrollieren ist, der Quotient $\frac{(C)}{(A)}$ für alle Werte von $\lambda = 2n$, $n = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$ kleiner als eins, d. h. für alle Werte λ ist $|A| > |C|$. In der Summenformel für a_λ ist demnach das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda}{2}$, grösser als alle folgenden Glieder. Der Quotient aus (B) und (A) ist für alle Werte von $\lambda = 2n$, die innerhalb $2 \lesseqgtr 2n \lesseqgtr 16$ liegen, kleiner als eins. Man erhält für $\lambda = 16$

$$\frac{(B)}{(A)} = \frac{4 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 15}{16 \cdot 18 \cdot 44} = \frac{175}{176} < 1; \text{ d. h. } |A| > |B|$$

d. h. In der Summenformel für a_λ ist das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda}{2}$, grösser als alle nachfolgenden Glieder für alle Werte von $\lambda = 2n$, und gleichzeitig grösser als alle vorangehenden Glieder für alle Werte von λ, die im Intervall $2 \lesseqgtr 2n \lesseqgtr 16$ liegen.

Man setzt nunmehr $\nu = \frac{\lambda-2}{2} - 1 = \frac{\lambda-4}{2}$; dann wird der allgemeine, absolut genommene Term:

$$2^{\lambda-4} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda-4}{2}\right)!\left(\frac{\lambda-4}{2}\right)!}{(\lambda-5)!\,(\lambda-4)!}\,(2\lambda-1) \cdot \frac{\left\{\lambda + \frac{\lambda-4}{2} - 2\right\}!}{\left\{\lambda - \frac{\lambda-4}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2\,n$

$$2^{2n-4}\,\frac{(n-2)!\,(n-2)!}{(2n-5)!\,(2n-4)!}\,(4n-1)\cdot\frac{(3n-4)!}{(n+2)!} \qquad (B_1)$$

Der Quotient aus B_1 und B wird dann:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{4\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda-3)^2}{3\cdot(\lambda+4)\cdot(\lambda-2)^2}$$

Der Quotient ist kleiner als eins für alle Werte von $\lambda = 2\,n$, die im Intervall $18 \gtreqless 2\,n \gtreqless 34$ liegen. Man erhält für $\lambda = 34$:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{4\cdot 30\cdot 31\cdot 31}{3\cdot 38\cdot 31\cdot 32} = \frac{9610}{9728} < 1;\ \text{d. h.}\ |B| > |B_1|$$

für $\lambda = 36$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{4\cdot 32\cdot 33\cdot 33}{3\cdot 40\cdot 34\cdot 34} = \frac{11616}{11560} > 1;\ \text{d. h.}\ |B_1| > |B|$$

Im Intervall $18 \gtreqless 2\,n \gtreqless 34$ ist demnach in der Reihe für a_λ das Glied, für welches die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda-4}{2}$, absolut genommen das grösste.

Setzt man $\nu = \frac{\lambda-6}{2}$, dann wird der Quotient aus dem Glied (B_2) und dem nächstfolgendem (B_1):

$$\frac{(B_2)}{(B_1)} = \frac{4\cdot(\lambda-6)\,(\lambda-5)^2}{(\lambda+6)\cdot(\lambda-4)\,(3\,\lambda-8)}$$

Für alle Werte von $\lambda = 2\,n$ im Intervall $36 \gtreqless 2\,n \gtreqless 60$ ist das Glied das grösste, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda-6}{2}$. Eine weitergehende, diesbezügliche Untersuchung bietet nichts wesentlich Neues. Es genügt, die Abhängigkeit der Laufzahl ν des grössten Gliedes von der Grösse der Laufzahl λ nachgewiesen zu haben.

Man betrachtet nunmehr den zweiten Fall, wo λ ungerade ist.

2. λ ungerade, $\lambda = 2\,n + 1$.

Der allgemeine absolut genommene Term aus der Reihe für a_λ:

$$2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

wird, wenn man darin ν ersetzt durch $\nu = \frac{\lambda+1}{2}$ zu:

$$2^{\lambda+1} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)!\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)!}{\lambda!\,(\lambda+1)!} \cdot (2\lambda-1)\frac{\left\{\lambda+\frac{\lambda-1}{2}-2\right\}!}{\left\{\lambda-\frac{\lambda+1}{2}\right\}!}$$

Setze $\lambda = 2n+1$:

$$2^{2n+2} \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)!} \cdot 4n \cdot \frac{(3n)!}{n!} \tag{A^1}$$

Das unmittelbar vorangehende Glied erhält man durch die Setzung

$$\nu = \frac{\lambda+1}{2} - 1 = \frac{\lambda-1}{2}$$

dann wird der allgemeine Term:

$$2^{2n} \frac{n!\,n!}{(2n-1)!\,(2n)!} 4n \frac{(3n-1)!}{(n+1)!} \tag{B^1}$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied erhält man durch die Setzung

$$\nu = \frac{\lambda+1}{2} + 1 = \frac{\lambda+3}{2}$$

dann wird der allgemeine Term:

$$2^{2n+4} \frac{(n+2)!\,(n+2)!}{(2n+3)!\,(2n+4)!} 4n \frac{(3n-1)!}{(n-1)!} \tag{C^1}$$

Der Quotient aus (A^1) und (C^1) wird:

$$\frac{C^1}{A^1} = \frac{\lambda \cdot (\lambda+4)\,(3\lambda+4)}{4 \cdot (\lambda+2) \cdot (\lambda+3)^2}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist dieser Quotient für alle Werte von $\lambda = 2n$ kleiner als eins; d. h. $|A^1| > |C^1|$.

Der Quotient aus (B^1) und (A^1) wird:

$$\frac{B^1}{A^1} = \frac{4(\lambda+1)^2}{3\cdot(\lambda+2)^2}$$

Dieser Quotient ist kleiner als eins für die Werte $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ und $\lambda = 5$, d. h. für diese Werte ist $|A^1| > |B^1|$. Zusammenfassend kann man sagen:

Für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots \infty$, ist in der Reihe zur Bestimmung der Koeffizienten a_λ das Glied, in welchem die Laufzahl ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda+1}{2}$, grösser als alle nachfolgenden Glieder. Im Intervall $1 \lesseqgtr 2n + 1 \lesseqgtr 5$ ist dieses Glied gleichzeitig grösser als alle vorangehenden.

Der Quotient aus dem Gliede B'_1, in welchem ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda-3}{2}$, und dem Glied B^1, in welchem ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda-1}{2}$, wird nun:

$$\frac{B'_1}{B^1} = \frac{4\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1)^2}{\lambda\cdot(\lambda+4)\cdot(3\lambda-2)}$$

Dieser Quotient ist kleiner als eins bis und mit $\lambda = 23$; d. h. das Glied B^1, in welchem ν ersetzt ist durch $\nu = \frac{\lambda-1}{2}$, ist für alle Werte von $\lambda = 2n + 1$ im Intervall $7 \lesseqgtr 2n + 1 \lesseqgtr 23$, grösser als alle vorangehenden und alle nachfolgenden Glieder. Entsprechend gestalten sich die weiteren Untersuchungen, die nichts wesentlich Neues bringen. Wenn wir nun die Konvergenz der Reihe (45a.) für sin(x) nachweisen wollen, so gehen wir gleich vor wie beim Konvergenzbeweis der Reihe für cos(x). Wir denken uns in der Summenformel für a_λ wiederum ν ersetzt durch $\nu = \frac{\lambda - 1000}{2}$, womit man jedenfalls ziemlich grosse gerade Werte von λ erreicht und entsprechend mit $\nu = \frac{\lambda - 1001}{2}$ wird man grosse ungerade Werte von λ erreichen; setzt man überall für $\lambda = 2n$ resp. $\lambda = 2n + 1$, dann wird im ersten Fall $\nu = (n - 500)$, im zweiten Fall $\nu = (n - 500)$.

Dann wird der allgemeine Term $a_\lambda = a_{2n}$ absolut genommen:

$$2^{2n-1000} \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-999)!\,(2n-1000)!} \cdot (4n-1) \cdot \frac{(3n-502)!}{(n+500)!}$$

Nimmt man den grössten Term des Produktes $\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)$, also

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\lambda!\,(\lambda+1)!}$$

dazu, dann ist

$$\left| a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x) \right| < \left| 2^{2n-1000} \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1001)\,(2n-1000)!} (4n-1) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(3n-502)!}{(n+500)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!} \right|$$

Analog für ungerades $\lambda = 2n + 1$.

$$\left| a_{\lambda+1} \overset{\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda+1}{J}(x) \right| < \left| 2^{2n-1000} \frac{(n-500)!\,(n-500)!}{(2n-1001)!\,(2n-1000)!} \cdot 4n \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(3n-501)!}{(n+501)!} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2}}{(2n+1)!\,(2n+2)!} \right|$$

Der Quotient wird dann:

$$\frac{\left| a_{\lambda+1} \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \right|}{\left| a_\lambda \overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x) \right|} < \frac{n \cdot (3n-501) \cdot x}{(n+501)\,(2n+1)\,(n+1)\,(4n-1)}$$

$$< \frac{(\lambda-1)\,(3\lambda-1005) \cdot x}{\lambda\,(\lambda+1)\,(2\lambda-1) \cdot (\lambda+1001)}$$

Für $\lambda = 400$ erhält man angenähert den Wert der Quotienten zu: $1 : 2{,}5 \cdot 10^6$.

Die Reihe

$$\sin x = \sum_{1}^{\infty}\lambda \; a_\lambda \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x)$$

wo

$$a_\lambda = \sum_{1}^{\lambda}\nu \;\; (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!} \cdot (2\lambda-1) \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

ist demnach absolut konvergent für alle endlichen Werte von x.

---

2. Aufstellung der Reihe für tg (x).

$$f(x) = \operatorname{tg}(x); \;\; f(y) = \operatorname{tg}(y)$$

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}\lambda \; k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x), \quad \text{wo } k_\lambda = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \operatorname{tg}(y)\, \overset{\lambda}{P}(y) \cdot d\,y$$

Auf relativ einfache Art erhält man die einzelnen Entwicklungskoeffizienten k_λ, wenn man ausgeht von der Darstellung von tg (y) durch die Potenzreihe. Es gilt:

$$\operatorname{tg}(y) = y + \frac{1}{3} y^2 + \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot y^5 + \frac{17}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} y^7 + \frac{62}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9} \cdot y^9 + $$
$$+ \frac{1382}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \cdot y^{11} + + \ldots \text{inf.}$$

gültig für $$-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$$

Die einzelnen Koeffizienten k_λ bestimmen sich nun:

$$k_1 = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \operatorname{tg}(y)\, \overset{1}{P}(y) \cdot d\,y = \frac{2}{2\,i\,\pi} \int \left\{ y + \frac{1}{3} \cdot y^3 + \ldots \right\} \cdot \frac{1}{y^2}\, dy = 2$$

$$k_2 = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \cdot \operatorname{tg}(y) \cdot \overset{2}{P}(y)\, d\,y = \frac{2}{2\,i\,\pi} \cdot \int \left\{ y + \frac{1}{3} y^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot y^5 + \ldots \right\} \left\{ \frac{4}{y^2} + \frac{8}{y^4} \right\} \cdot d\,y = \frac{40}{1 \cdot 3}$$

$$k_3 = \frac{2}{2i\pi} \int \operatorname{tg}(y) \cdot \overset{3}{P}(y)\, dy = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \cdot \left\{ y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot y^5 + \right.$$

$$\left. + \frac{17}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdot y^7 + \ldots \right\} \left\{ \frac{9}{y^2} + \frac{48}{y^4} + \frac{192}{y^6} \right\} \cdot dy = \frac{1518}{1 \cdot 3 \cdot 5}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Daraus bildet man die Reihe:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}(x) = 2 \overset{1}{\Pi}(x) + \frac{40}{1 \cdot 3} \cdot \overset{2}{\Pi}(x) + \frac{1518}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \overset{3}{\Pi}(x) + \\ &+ \frac{162016}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \overset{4}{\Pi}(x) + \frac{45867250}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \overset{5}{\Pi}(x) + + \ldots \text{inf.} \\ &\text{oder} \\ &\operatorname{tg}(x) = 2 \cdot \overset{0}{J}(x) \overset{1}{J}(x) + \frac{34}{1 \cdot 3} \overset{1}{J}(x) \overset{2}{J}(x) + \frac{1318}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \overset{2}{J}(x) \overset{3}{J}(x) + \\ &+ \frac{152390}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \overset{3}{J}(x) \cdot \overset{4}{J}(x) + \frac{44409106}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \overset{4}{J}(x) \overset{5}{J}(x) + + \ldots \text{inf.} \end{aligned}\right\} \quad (46.)$$

Um jedoch eine allgemeine Darstellung zu erhalten, geht man aus von der Entwicklung für tg(y) vermittelst Bernoulli'scher Zahlen. Man hat nämlich:

$$\operatorname{tg}(y) = \sum_{1}^{\infty} {}_r\, 2^{2r}(2^{2r} - 1) \cdot B_r \cdot \frac{y^{2r-1}}{(2r)!}$$

$$\text{gültig für } -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$

Dabei bedeutet B_r die r.$^{\text{te}}$ Bernoulli'sche Zahl, die sich bestimmt aus:

$$B_r = (-1)^{r-1}(2r)!\, C_{2r}$$

und für die Bestimmung der Konstanten C_r gilt die Rekursionsformel:

$$\sum_{1}^{r} {}_n \frac{C_r - n}{n!} = 0, \text{ mit Ausnahme von } C_0 = 1.$$

Im besonderen sind die Werte der ersten fünf von J. Bernoulli berechneten B-Zahlen die folgenden:

$$B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad B_5 = \frac{5}{66}$$

Um den allgemeinen Koeffizienten k_λ zu bestimmen, geht man aus von:

$$k_\lambda = \frac{2}{2\,i\pi} \cdot \int \sum_1^\lambda {}_\nu\; 2^{2\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu}} \cdot$$

$$\sum_1^\infty {}_r\; 2^{2r}(2^{2r}-1) B_r \cdot \frac{y^{2r-1}}{(2r)!} dy$$

Die allgemeine Potenz im Integranden ist $y^{2r-1-2\nu}$; um die einzig in Betracht kommende Potenz $\frac{1}{y} = y^{-1}$ zu erhalten, setzt man $2r - 1 - 2\nu = 1$, $r = \nu$. Dann wird der Koeffizient von y^{-1} im Integranden zu:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = \sum_1^\lambda {}_\nu\; 2^{2\nu-1} \cdot 2^{2\nu}(2^{2\nu}-1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

woraus dann

$$\left.\begin{aligned} k_\lambda &= \sum_1^\lambda {}_\nu\; 2^{4\nu} \cdot (2^{2\nu}-1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \\ &\text{und daher} \\ \operatorname{tg}(x) &= \sum_1^\infty {}_\lambda\; k_\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

wo k_λ durch die obige Formel bestimmt ist.

Man bildet ferner:

$$a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$$

$$k_\lambda = \sum_1^\lambda {}_\nu\; 2^{4\nu} \cdot (2^{2\nu}-1) \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu$$

$$k_{\lambda-1} = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu!)}\cdot\frac{\lambda-1}{\nu}\cdot\frac{\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\cdot B_{\nu}$$

$$a_{\lambda} = (k_{\lambda} - k_{\lambda-1})$$

$$= \sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\cdot\frac{1}{\nu}\cdot B_{\nu}\left\{\frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} - \frac{(\lambda-1)(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\right\}$$

$$+ 2^{4\lambda}(2^{2\lambda}-1)\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!\,(2\lambda)!}\cdot(2\lambda-1)!\,B_{\lambda}$$

$$\left\{\frac{\lambda(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} - \frac{(\lambda-1)(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)!}\right\} = \nu\cdot(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$a_{\lambda} = \sum_{1}^{\lambda-1}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_{\nu}$$

$$+ 2^{4\lambda}\cdot(2^{2\lambda}-1)\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!\,(2\lambda)!}(2\lambda-1)!\,B_{\lambda}$$

Der letzte Term kann ebenfalls unter das Summenzeichen gesetzt werden. Daher wird nun:

$$\underline{a_{\lambda} = \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}(2\lambda-1)\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_{\nu}}$$

Die gesuchte Entwicklung nimmt schliesslich die Form an:

$$\underline{\mathrm{tg}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\;(2\lambda-1)\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)\cdot\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\; 2^{4\nu}(2^{2\nu}-1)\cdot}$$

$$\underline{\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\;\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_{\nu}} \qquad (47\text{a.})$$

In der Formel (47 a.) ist die sogenannte innere Summe der folgende Ausdruck:

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{4\nu}\cdot(2^{2\nu}-1)\cdot\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\,\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_\nu$$

Es sind λ-Summanden, die alle positiv. Im Gegensatz zu den innern Summen bei der Reihe für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist hier der letzte Summand, d. h. wenn $\lambda=\nu$ gesetzt wird, der grösste, was bei den letzteren nicht zutrifft. Gibt man ν den Wert λ, so ist dieser letzte Summand der grösste und dann ist offenbar:

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{4\nu}\cdot(2^{2\nu}-1)\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!}\,\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot B_\nu<\lambda\cdot$$
$$\cdot\left\{2^{4\lambda}\,(2^{2\lambda}-1)\cdot\frac{\lambda!\,\lambda!\,(2\lambda-2)!}{(2\lambda)!\,(2\lambda)!}\,B_\lambda\right\}$$

Nimmt man den grössten Term des Produktes $\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)$ dazu, also:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}}{\lambda!\,(\lambda-1)!}$$

dann wird:

$$\left|a_\lambda\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\right|<\lambda\cdot 2^{4\lambda}\,(2^{2\lambda}-1)\,\frac{\lambda\cdot(2\lambda-2)!}{(2\lambda)!\,(2\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}\cdot B_\lambda$$

Das unmittelbar nachfolgende Glied in der Reihe (47 a.) wird analog:

$$\left|a_{\lambda+1}\,\overset{\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda+1}{J}(x)\right|<2^{4\lambda+2}\cdot(2^{2\lambda+2}-1)\cdot$$
$$\cdot\frac{(\lambda+1)^2\cdot(2\lambda)!}{(2\lambda+2)!\,(2\lambda+2)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}B_{\lambda+1}$$

Der Quotient:

$$\frac{\left|a_{\lambda+1}\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\cdot\overset{\lambda+1}{J}(x)\right|}{\left|a_\lambda\,\overset{\lambda-1}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(x)\right|}<\frac{2\cdot(2^{2\lambda+2}-1)\,(\lambda+1)^2\cdot(2\lambda-1)}{(2^{2\lambda}-1)\,(2\lambda+1)^2\,\lambda^3}\cdot$$
$$\cdot\frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda}\cdot x^2$$

Der Quotient

$$\frac{2 \cdot (2^{2\lambda+2} - 1)}{(2^{2\lambda} - 1)}$$

kann ohne grossen Fehler gleich 8 gesetzt werden, der dadurch bedingte Fehler nimmt mit wechselndem λ ab. Macht man für x ausserdem zur Bedingung, dass $-1 \gtreqless x \gtreqless +1$, dann ist der Quotient

$$\frac{8 \cdot (\lambda + 1)^2 \cdot (2\lambda - 1)}{(2\lambda + 1)^2 \lambda^3} \cdot \frac{B_{\lambda+1}}{B_\lambda} \cdot x^2$$

für alle Werte von λ kleiner als eins womit die Konvergenz der Reihe (47a.) für tg (x) nachgewiesen ist.

---

3. Aufstellung der Reihe für cotg (x).

Diese Funktion ist im Nullpunkt unstetig. Sie ist definiert für das Gebiet eines Kreisringes, und daher hat man die allgemeine Formel (41.) anzuwenden, also

$$\operatorname{cotg}(x) = \sum_1^{\infty} \lambda \; k_\lambda \overset{\lambda}{\Pi}(x) + \sum_1 \lambda \; \mu_\lambda \cdot \overset{\lambda}{P}(x)$$

worin

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy$$

$$\mu_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int f(y) \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(y) \cdot dy$$

Die Unstetigkeit der Funktion im Nullpunkt erkennt man übrigens aus der Potenzreihenentwicklung, indem

$$\operatorname{cotg}(y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{3} y - \frac{1}{3^2 \cdot 5} \cdot y^3 - \frac{2}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot y^5 -$$

$$- \frac{1}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \cdot y^7 - - \ldots\ldots \quad \text{inf.}$$

oder

$$= \frac{1}{y} - \sum_1^{\infty} r \; 2^{2r} \cdot B_r \cdot \frac{y^{2r-1}}{(2r)!}, \quad \text{gültig für } -\pi < x < +\pi$$

Setzt man, wie aus der Bestimmungsformel für die Bernoulli'schen Zahlen B_r für $r = o$ direkt hervorgeht, $B_0 = -1$, so kann man die Potenzreihe auch schreiben:

$$\operatorname{cotg}(y) = -\sum_{0}^{\infty}{}_{r}\, 2^{2r} \cdot B_r \frac{y^{2r-1}}{(2r)!} = -\sum_{1}^{\infty}{}_{r}\, 2^{2r-2} \cdot B_{r-1} \frac{y^{2r-3}}{(2r-2)!}$$

Zur Bestimmung des allgemeinen Koeffizienten k_λ hat man demnach:

$$k_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \operatorname{cotg}(y) \cdot \overset{\lambda}{P}(y) \cdot dy$$

$$= \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{2\nu-1} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \frac{1}{y^{2\nu}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{1}^{\infty}{}_{r}\, 2^{2r-2} B_{r-1} \frac{y^{2r-3}}{(2r-2)!} \right\} \cdot dy$$

Die einzig in Betracht fallende Potenz $y^{-1} = \frac{1}{y}$ erhält man, weil die allgemeine Potenz im Integranden $y^{2r-3-2\nu}$ ist, durch die Setzung $2r - 3 - 2\nu = -1$, $r = \nu + 1$. Dann wird im Integranden der Koeffizient von $\frac{1}{y}$ zu:

$$\left[\frac{1}{y}\right] = -\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{2\nu}\, 2^{2\nu-1} \cdot B_\nu \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

woraus sofort

$$\underline{k_\lambda = -\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot B_\nu \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}}$$

Wie ersichtlich, ist diese Bestimmungsformel dieselbe, wie die oben bei der Entwicklung für tg (x) erhaltene, bis auf den hier fehlenden Faktor $(2^{2\nu} - 1)$.

Die Potenzreihenentwicklung für cotg(y) enthält nur ein einziges Glied, das erste, das eine negative Potenz aufweist. Man kann daher Umgang nehmen von der Bestimmung des all gemeinen Koeffizienten μ_λ und sich beschränken auf die Ausmittelung dieses einen Koeffizienten. Die Funktion $\overset{\lambda}{\Pi}(y)$ ist nach (35.) definiert durch die Formel:

$$\overset{\lambda}{\Pi}(y) = \overset{\lambda}{J}(y) \left\{ \overset{\lambda-1}{J}(y) - \overset{\lambda+1}{J}(y) \right\} = \overset{\lambda-1}{J}(y) \cdot \overset{\lambda}{J}(y) - \overset{\lambda}{J}(y) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(y)$$

Die Funktion f(y) ist hier $\frac{1}{y}$. Demnach wird nun:

$$\mu_\lambda = \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \frac{1}{y} \left\{ \overset{\lambda-1}{J}(y) \cdot \overset{\lambda}{J}(y) - \overset{\lambda}{J}(y) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(y) \right\} \cdot dy$$

$$= \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \frac{1}{y} \cdot \overset{\lambda-1}{J}(y) \cdot \overset{\lambda}{J}(y) \cdot dy - \frac{2}{2i\pi} \cdot \int \frac{1}{y} \cdot \overset{\lambda}{J}(y) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(y) \cdot dy$$

Nach der schon öfters zitierten Formel von J. J. Schönholzer

$$\overset{a}{J}(x)\overset{b}{J}(x) = \sum_0^\infty{}_\mu \; (-1)^\mu \frac{\Gamma(a+b+2\mu+1)}{\Gamma(a+\mu+1) \cdot \Gamma(b+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{a+b+2\mu}}{\mu!\,\Gamma(a+b+\mu+1)}$$

wird nunmehr:

$$\overset{\lambda-1}{J}(y)\overset{\lambda}{J}(y) = \sum_0^\infty{}_\mu \; (-1)^\mu \frac{\Gamma(2\lambda+2\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu) \cdot \Gamma(\lambda+\mu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2\lambda+2\mu-1}}{\mu!\,\Gamma(2\lambda+\mu)}$$

$$\overset{\lambda}{J}(y) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(y) = \sum_0^\infty{}_\mu \; (-1)^\mu \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+2\mu+2)}{\Gamma(\lambda+\mu+1) \cdot \Gamma(\lambda+\mu+2)} \cdot \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2\lambda+2\mu+1}}{\mu!\,\Gamma(2\lambda+\mu+2)}$$

Diese Werte in die Bestimmungsformel für μ_λ eingesetzt, dann wird das erste Integral:

$$S_1 = \frac{2}{2i\pi} \cdot \sum_0^\infty {}_\mu \, (-1)^\mu \cdot \frac{\Gamma(2\lambda + 2\mu)}{2^{2\lambda+2\mu-1} \cdot \Gamma(\lambda+\mu) \cdot \mu!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu+1) \cdot \Gamma(2\lambda+\mu)} \cdot \int y^{2\lambda+2\mu-2} \cdot dy$$

Die Laufzahlen λ und μ nehmen nur ganzzahlige, positive Werte an. Aus der Art des Exponenten ist daher zu ersehen, dass die Potenz y^{-1} nicht auftreten kann, weshalb dieses Cauchy'sche Integral den Wert Null hat. $S_1 = 0$. Für das zweite Integral erhält man:

$$S_2 = -\frac{2}{2i\pi} \cdot \sum_0^\infty {}_\mu \, (-1)^\mu \frac{\Gamma(2\lambda + 2\mu + 2)}{2^{2\lambda+2\mu+2} \cdot \Gamma(\lambda+\mu+1) \cdot \mu!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu+2) \cdot \Gamma(2\lambda+\mu+2)} \cdot \int y^{2\lambda+2\mu} \cdot dy.$$

Aus gleichen Gründen wie oben muss $S_2 = 0$ sein. Nach diesen Resultaten ist also $\mu_\lambda = 0$. Nun würde diese weder mit der entsprechenden Formel bei den Neumann'schen Reihen I. Art in Analogie stehen, wie dies bei allen übrigen, bisherigen Entwicklung der Fall war, noch ist anzunehmen, dass die Entwicklung für cotg (x) lauter negative Summanden enthalten kann, wodurch sie eine sehr beschränkte Gültigkeit hätte. Es steht nun gar nichts im Wege, die gesuchte Entwicklung erst mit dem zweiten Glied zu beginnen und das erste unverändert zu belassen. Die Richtigkeit dieses Vorgehens wird dadurch bestätigt, dass, wenn man das fragliche Glied $\frac{1}{y}$ nach einer später zu behandelnden Methode von Nielsen, in eine Neumann'sche Reihe II. Art entwickelt, man zu der Identität $\frac{1}{y} = \frac{1}{y}$ kommt. Die Entwicklung für cotg (x) lautet demnach:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cotg}(x) &= \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda}\, k_\lambda \,.\, \overset{\lambda}{\Pi}(x) = \frac{1}{x} - \\
&- \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \sum_{1}^{\lambda}{}^{\nu}\, 2^{4\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot B_\nu \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \cdot \overset{1}{\Pi}(x) - \frac{136}{3^2 \cdot 5} \cdot \overset{2}{\Pi}(x) - \frac{2818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \overset{3}{\Pi}(x) - \\
&\qquad - \frac{44384}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \cdot \overset{5}{\Pi}(x) - - \,..\; \text{inf.}
\end{aligned}\right\} (48.)$$

Man bildet ferner $a_\lambda = k_\lambda - k_{\lambda-1}$.

$$k_\lambda = - \sum_{1}^{\lambda}{}^{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu$$

$$= - \sum_{1}^{\lambda-1}{}^{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu - 2^{4\lambda} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!} \cdot \frac{(2\lambda-1)!}{(2\lambda)!} \cdot B_\lambda$$

$$k_{\lambda-1} = - \sum_{1}^{\lambda-1}{}^{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{\lambda-1}{\nu}\, \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu+1)} \cdot B_\nu$$

$$a_\lambda = k_\lambda - k_{\lambda-1} = - \sum_{1}^{\lambda-1}{}^{\nu} \cdot 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{B_\nu}{\nu} \left\{ \frac{\lambda\,(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\lambda-1)\cdot(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu-1)} \right\} \cdot - 2^{4\lambda}\, \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\nu)!} \cdot \frac{(2\lambda-1)!}{(2\lambda)!} \cdot B_\lambda$$

$$= - \sum_{1}^{\lambda-1}{}^{\nu} \cdot 2^{4\nu} \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} (2\lambda-1)\, \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu - 2^{4\lambda} \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!} \cdot \frac{(2\lambda-1)!}{(2\lambda)!} \cdot B_\lambda$$

$$= -\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \cdot 2^{4\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} (2\lambda-1) \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu$$

Die endgültige Entwicklung wird dann:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}(x) &= \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu}\, 2^{4\nu} \cdot \\ &\qquad \cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_\nu \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \cdot \overset{0}{J}(x)\,\overset{1}{J}(x) - \frac{106}{3^2} \overset{1}{J}(x)\,\overset{2}{J}(x) - \frac{1866}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \\ &\qquad \cdot \overset{2}{J}(x)\,\overset{3}{J}(x) - \frac{30294}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \cdot \overset{3}{J}(x)\,\overset{4}{J}(x) - - \ldots \text{inf.} \end{aligned}\right\} \quad (48a.)$$

Für die Untersuchung der Konvergenz kann man sich aus den Hinweis beschränken, dass die inneren Summen für a_λ in der Entwicklung für tg (x) und cotg (x) übereinstimmen bis auf den Faktor $(2^{2\nu} - 1)$, der bei der letztern fehlt. Daraus darf man schliessen, dass die Reihe für cotg (x) ebenso konvergent ist wie die Reihe für tg (x) für alle Werte von $-1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1$.

Nach dem bisherigen Verfahren leiten sich auch die folgenden ungeraden Funktionen ab:

Mit arc sin (x) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \arcsin(x) &= \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, 2\lambda \cdot \overset{\lambda}{\Pi}(x) \cdot \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(2\nu-1)^2 (\lambda-\nu)!} \\ &= 2 \cdot \overset{1}{\Pi}(x) + \frac{32}{1 \cdot 3} \cdot \overset{2}{\Pi}(x) + \frac{942}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \overset{3}{\Pi}(x) + \\ &\qquad + \frac{117872}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \overset{4}{\Pi}(x) + + \ldots \text{inf.} \end{aligned}\right\} \quad (49.)$$

Man bildet wie früher $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$; dann wird:

$$\left.\begin{aligned} \arcsin(x) = \sum_1^\infty{}_\lambda\, 2(2\lambda-1)\cdot \overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot \overset{\lambda}{J}(x)\cdot \\ \cdot \sum_1^\lambda{}_\nu \frac{\nu}{(2\nu-1)^2}\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \end{aligned}\right\} \quad (49a.)$$

Es ist evident, dass in der innern Summe

$$\sum_1^\lambda{}_\nu \frac{\nu}{(2\nu-1)^2}\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

der letzte Term der grösste ist, d. h. wenn $\nu = \lambda$ gesetzt wird Dann ist:

$$\sum_1^\lambda{}_\nu \frac{\nu}{(2\nu-1)^2}\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} < \frac{\lambda^2}{(2\lambda-1)^2}\cdot(2\lambda-2)!$$

Daher auch

$$\left| a_\lambda\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\right| < \frac{2\lambda^2}{(2\lambda-1)}\cdot(2\lambda-2)!\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-1}}{(\lambda-1)!\ \lambda!}$$

Ebenso

$$\left| a_{\lambda+1}\overset{\lambda}{J}(x)\overset{\lambda+1}{J}(x)\right| < \frac{(\lambda+1)^2}{(2\lambda+1)}\cdot(2\lambda)!\ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\lambda!\ (\lambda+1)!}$$

Der Quotient:

$$\frac{\left| a_{\lambda+1}\overset{\lambda}{J}(x)\overset{\lambda+1}{J}(x)\right|}{\left| a_\lambda\overset{\lambda-1}{J}(x)\overset{\lambda}{J}(x)\right|} < \frac{(\lambda+1)\cdot(2\lambda-1)^2\, x^2}{(2\lambda+1)\cdot\lambda^2\cdot 2}$$

Dieser Quotient ist unter der Bedingung, dass $-1 < x < +1$ sei, für alle Werte von λ kleiner als eins, womit die Konvergenz der Reihe (49a.) nachgewiesen ist.

Mit arc tg (x) erhält man:

$$\underline{\underline{\text{arc tg}\,(x) = \sum_{1}^{\infty}\lambda \sum_{1}^{\lambda}\nu\ (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)\,(2\nu)!}\cdot}} \tag{50.}$$

$$\underline{\underline{\cdot\,\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}\cdot\overset{\lambda}{\Pi}(x)}}$$

Man bildet: $a_\lambda = (k_\lambda - k_{\lambda-1})$; dann wird:

$$\underline{\underline{\text{arc tg}\,(x) = \sum_{1}^{\infty}\lambda\ (2\lambda-1)\cdot\overset{\lambda-1}{J}(x)\cdot\overset{\lambda}{J}(x)\cdot\sum_{1}^{\lambda}\nu\ (-1)^{\nu-1}\cdot}}$$

$$\underline{\underline{\cdot\,2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)\cdot(2\nu)!}\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}}}$$

Die Reihe ist absolut konvergent für $-1 \lesseqgtr x \lesseqgtr 1$.

Setzt man im besondern für $x = 1$, dann wird

$$\text{arc tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

daher

$$\underline{\underline{\pi = 4\cdot\sum_{1}^{\infty}\lambda\ (2\lambda-1)\cdot\overset{\lambda-1}{J}(1)\cdot\overset{\lambda}{J}(1)\cdot}} \tag{51.}$$

$$\underline{\underline{\cdot\sum_{1}^{\lambda}\nu\ (-1)^{\nu-1}\,2^{2\nu}\,\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)\cdot(2\nu)!}\cdot\frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}}}$$

§ 5. Vergleich der Entwicklungen für die trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen nach Reihen I. und II. Art.

Die Reihen I. Art lauten nach der Schrift von Köstler:

$$\cos(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \cdot \varepsilon_{2\lambda} \cdot \overset{2\lambda}{J}(x) = \overset{0}{J}(x) + 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} \cdot \overset{2\lambda}{J}(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda}\, \varepsilon_{2\lambda+1}\, \overset{2\lambda+1}{J}(x) = 2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x)$$

$$\operatorname{tg}(x) = 4 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} 4^{2\nu}\left(4^{\nu+1}-1\right) \frac{(\lambda+\nu)!}{(2\nu+1)\cdot(\nu+1)\cdot(2\nu)!} \cdot \frac{B_{\nu+1}}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - 4 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} \frac{4^{2\nu}}{(\nu+1)\cdot(2\nu+1)\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} B_{\nu+1}$$

$$\operatorname{arc\,sin}(x) = 2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} \frac{(2\nu)!}{(2\nu+1)\cdot \nu!\, \nu!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = 2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^{\nu} \cdot 2^{2\nu} \frac{(\lambda+\nu)!}{(2\nu+1)\cdot(\lambda-\nu)!}$$

$$\pi = 8 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda+1) \cdot \overset{2\lambda+1}{J}(1) \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^{\nu}\, 2^{2\nu} \frac{(\lambda+\nu)!}{(2\nu+1)\,(\lambda-\nu)!}$$

Die Reihen II. Art lauten, wie sie oben hergeleitet wurden:

$$\cos(x) = [\overset{0}{J}(x)]^2 + 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda \cdot [\overset{\lambda}{J}(x)]^2 \sum_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\nu} \cdot 2^{2\nu} \cdot$$

$$\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-1)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\nu-1} \cdot$$

$$\cdot\, 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\mathrm{tg}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu}(4^{\nu}-1) \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu}$$

$$\mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} 4^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu}$$

$$\mathrm{arc}\sin(x) = 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\nu \cdot (\lambda+\nu-2)!}{(2\nu-1)^2 \cdot (\lambda-\nu)!}$$

$$\mathrm{arc\,tg}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda-1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(x) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\nu-1}\, 2^{2\nu} \cdot$$

$$\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1) \cdot (2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\pi = 4 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (2\lambda - 1) \cdot \overset{\lambda-1}{J}(1) \cdot \overset{\lambda}{J}(1) \cdot \sum_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\nu-1} \cdot 2^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu-1)\cdot(2\nu)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu-2)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Als auffallendste Verschiedenheit in den Entwicklungskoeffizienten der Reihen erster und zweiter Art erkennt man sofort den Faktor $\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}$. Er spielt bei diesen Reihen dieselbe Rolle wie der Faktor $\frac{n!\,n!}{(2n)!}$ bei den Entwicklungen für die geraden und ungeraden Potenzen, der dort geradezu als Proportionalitätsfaktor zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Reihen erster und zweiter Art bezeichnet worden ist. Wegen dieses Faktors $\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}$ kann die innere Summe bei den Entwicklungen für sin (x) und cos (x) nicht vereinfacht werden, wie dies bei den Reihen erster Art von Köstler in so eleganter Weise getan worden ist.

Bedeutend mehr Analogie als diese zwei ersten Entwicklungen zeigen alle folgenden. Setzt man in den Reihen zweiter Art statt der Laufzahl λ die neue $\lambda + 1$, was ohne weiteres gestattet ist, wenn die dadurch bedingte Veränderung der untern Grenze berücksichtigt wird; definiert man ferner die ungeraden Funktionen in der üblichen Art, d. h. durch den Exponenten $2\nu + 1$ statt $2\nu - 1$, setzt man also in der innern Summe die Laufzahl $\nu + 1$ statt ν, dann werden die Reihen, abgesehen von den beiden ersten:

$$\operatorname{tg}(x) = 4 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda + 1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} 4^{2\nu} (4^{\nu+1} - 1) \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot \frac{1}{(2\nu+1)^2} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu+1}$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} - 4 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda + 1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} 4^{2\nu} \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!\,(2\nu)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2\nu+1)^2} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!} \cdot B_{\nu+1}$$

$$\operatorname{arc\,sin}(x) = 2 \cdot \sum_0^\infty {}_\lambda\, (2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_0^\lambda {}_\nu\, \frac{\nu+1}{(2\nu+1)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!} \cdot \frac{(2\nu)!}{\nu!\,\nu!}\,\frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = 2 \cdot \sum_0^\infty {}_\lambda\, (2\lambda+1) \cdot \overset{\lambda}{J}(x) \cdot \overset{\lambda+1}{J}(x) \cdot \sum_0^\lambda {}_\nu\, (-1)^\nu \cdot$$

$$\cdot\, 2^{2\nu}\, \frac{(\nu+1)!\,(\nu+1)!}{(2\nu+1)\cdot(2\nu+2)!} \cdot \frac{(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu)!}$$

Abgesehen vom Faktor $\frac{\nu!\,\nu!}{(2\nu)!}$ stimmen die innern Summen für tg (x) und cotg (x) nach Reihen erster und zweiter Art überein, nur dass bei den letztern $\frac{1}{(2\nu+1)}$ statt $\frac{1}{\nu+1}$ steht. Für die arc sin (x) Entwicklung hat man Analogie bis auf den Quotienten $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$ bei den letzteren, für arc tg (x) bis auf $\frac{\nu+1}{2(2\nu+1)}$. Sieht man jedoch $\frac{(\nu+1)!\,(\nu+1)!}{(2\nu+2)!}$ als Proportionalitätsfaktor an, dann hat man bei tg (x) und cotg (x) völlige Uebereinstimmung bis auf den Faktor 2, bei arc sin (x) bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ und bei arc tg (x) völlige Uebereinstimmung.

Im grossen Ganzen kann man die Behauptung, die Carl Neumann hinsichtlich der Reihenentwicklungen erster und zweiter Art für die geraden Potenzen aufgestellt und bewiesen hat, dass nämlich die Entwicklungskoeffizienten der Reihen erster und zweiter Art proportional seien, auch auf die andern entwickelten Funktionen ausdehnen. Für die ungeraden Potenzen ist dies früher schon nachgewiesen worden. Auch für die trigonometrischen und zyklonometrischen Funktionen hat man in der Regel mit Ausnahme der Reihen für sin (x) und cos (x) bestätigt gefunden.