

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1912)

**Artikel:** Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel  
**Autor:** Schenker, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319226>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

O. Schenker.

## Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel.

---

### I. Geschichtliches.

In den Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1909 habe ich einen kleinen Aufsatz veröffentlicht, betitelt: «Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel». Seither habe ich in dem Buche von W. Fuhrmann: «Synthetische Beweise planimetrischer Sätze» herumgeblättert (das Werk ist mir von Herrn Prof. Sidler † empfohlen worden) und durch Vergleichung gefunden, dass die von mir behandelte Parabel mit der Kiepert'schen identisch ist. In dem Fuhrmann'schen Werke wird die Kiepert'sche Parabel auf folgende Weise erzeugt: man errichtet über den Seiten eines Dreiecks ähnliche gleichschenklige Dreiecke, so bestimmen die Scheitel derselben ein neues Dreieck, dessen Kollineationsachse mit dem Grunddreieck Tangente an die Kiepert'sche Parabel ist.

Geheimrat Prof. Kiepert an der technischen Hochschule in Hannover war so freundlich, mir aus der Geschichte seiner Parabel folgendes mitzuteilen.

Marienbad in Böhmen, Elbschloss, d. 19. 8. 09,

Sehr geehrter Herr Schenker,

Ihre gefl. Karte vom 16. d. M. ist mir nach Marienbad, wo ich augenblicklich zur Kur weile, nachgeschickt worden. Zur Beantwortung Ihrer Fragen teile ich Ihnen hiedurch mit, dass ich allerdings noch am Leben bin und als Professor an der technischen Hochschule in Hannover meine Lehrtätigkeit ausübe. Die Kiepert'sche Hyperbel und die Kiepert'sche Parabel sind nach mir genannt. Es handelt sich dabei um ein paar kleine Abhandlungen, die ich als Student im Jahre 1869 in den Nouvelles Annales de Math. von Gérano et Bourget veröffentlicht

hatte. Ich ging dabei von der Lösung der Aufgabe aus: «Über den Seiten eines Dreiecks  $ABC$  sind drei gleichseitige Dreiecke  $BCA_1$ ,  $CAB_1$ ,  $ABC_1$ , errichtet; man soll das Dreieck  $ABC$  konstruieren, wenn die Scheitel  $A_1, B_1, C_1$ , dieser gleichseitigen Dreiecke gegeben sind».

Ich hatte mich nachher um diese kleinen Aufsätze nicht mehr gekümmert, da ich ganz in das Fahrwasser von Weierstrass gekommen war und mich hauptsächlich mit der Transformation der elliptischen Funktionen und mit der komplexen Multiplikation dieser Funktionen beschäftigte. Erst vor wenigen Jahren erfuhr ich, dass sich in Belgien und in England eine ziemlich umfangreiche Literatur an die kleinen Aufsätze aus meiner Studentenzeit angeschlossen hatte, und dass man die oben genannten Kurven nach mir genannt hat. Ich kann Ihnen aber augenblicklich keine Angaben über diese Literatur machen, da ich die Sachen hier nicht zur Hand habe.

Herr Professor Neuberg in Lüttich (Liège) hat sich für diese Literatur besonders interessiert.

Mit freundlichem Grusse

Prof. Dr. L. Kiepert, Geheimer Regierungsrat.

Herr Prof. Neuberg, dem ich hierauf meine Arbeit übersandte, schrieb mir folgendes:

Hochgeehrter Herr Kollege,

Meinen besten Dank für Ihre interessante Mitteilung. Der Satz war mir unbekannt und scheint wirklich neu zu sein. Ich habe versucht, die Frage anders anzugreifen, und schicke Ihnen meine Untersuchungen, welche den Gegenstand nicht erschöpfen. Ich werde noch weiter forschen und, wenn ich Erfolg habe, Ihnen meine Resultate mitteilen.

Meine Resultate könnten vielleicht in derselben Berner Zeitschrift erscheinen.

Hochachtungsvoll

J. Neuberg.

Wenn wir die ungeheure Literatur ins Auge fassen, die sich auf dem Gebiete der Geometrie entwickelt hat, so drängt

sich uns unwillkürlich die Frage auf: Aus welchem Bedürfnis ist diese Literatur entstanden? Waren es Gründe praktischer oder mehr geistiger Natur, welche eine derartige Literatur ins Leben rufen konnten? Wir geben der idealen Weltauffassung den Vorzug und glauben daher, dass auch in der Geometrie das geistige Bedürfnis vor allem andern schöpferisch gewesen ist. So verdankt z. B. die Kurventheorie, in moderner Gestalt von Jakob Steiner geschaffen, ihre Entstehung dem Problem von der Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem), also einem religiösen Bedürfnis. Zur Lösung desselben erfand Nikomedes die Konchoide und Diokles die Cissoide. Die Entdeckung der Kegelschnitte durch Menächmus, einen Schüler Plato's, hängt mit eben diesem Problem zusammen. Über den Ursprung des delischen Problems wissen wir folgendes: Der griechische Volksstamm der Delier ward vom Unglück heimgesucht, suchte Rat beim Orakel zu Delphi und erhielt den Auftrag, den würfelförmigen Altar des Orakels zu verdoppeln. Da dies nicht gelang, musste sich der Philosoph Plato ins Mittel legen, der seinen Schülern das Studium des Problems empfahl. Menächmus suchte die Aufgabe durch Einschiebung zweier mittleren geometrischen Proportionalen zu lösen; ist  $a^3$  der Inhalt des gegebenen Würfels, so ist  $2 a^3$  der des gesuchten und dann folgt aus:

$$\begin{aligned} a : x &= x : y = y : 2 a; \quad x^2 = a y \\ y^2 &= 2 a \cdot x, \quad \text{woraus} \quad \frac{x^4}{a^2} = 2 a x; \quad x^3 = 2 a^3 \\ x &= a \sqrt[3]{2}, \end{aligned}$$

die gesuchte Würfelseite. Zur Lösung waren also hier die Schnittpunkte zweier Parabeln zu bestimmen. Wir wollen uns auch daran erinnern, dass Euklides, Archimedes und Apollonius, die drei grössten Mathematiker des Altertums, an der Erforschung der Kegelschnitte gearbeitet haben. Die vier Bücher des Euklid über die Kegelschnitte sind leider verloren gegangen. Archimedes gab eine Quadratur der Parabel sowie der Ellipse. In dem Buche: «Über Konoide und Sphäroide» behandelte er die durch Rotation eines Kegelschnittes um eine seiner Hauptachsen entstehenden Körper.



Bewundernswürdig ist, was Apollonius (der 250—200 v. Chr. zu Alexandrien lebte) über die Kegeschnitte in 8 Büchern schrieb. Hierin ist alles von seinen Vorgängern auf diesem Gebiete enthalten und mit eigenen Entdeckungen zu einem Ganzen vereinigt. Er erkannte zuerst, dass alle drei Arten von Kegelschnitten an einem und demselben Kegel erzeugt werden können, ferner dass durch den Koordinatenzusammenhang:  $y^2 = -x^2 + ax$ , ein Kreis, durch  $y^2 = x^2 + ax$  eine Hyperbel und durch  $y^2 = ax$  eine Parabel dargestellt wird. Von Apollonius ist auch die Aufgabe in Angriff genommen worden einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt, die von Jakob Steiner gelöst worden ist. Der grosse Astronom Edmund Halley, der die Ansicht vertrat, dass es uns nicht zum Ruhme gereiche, so vieles nicht besser machen zu können, als es die Alten gemacht haben, veranstaltete selbst eine lateinische Ausgabe der acht Bücher über die Kegelschnitte (Antwerpen 1710) und stellte die Bücher des «grossen Geometers», «De sectione rationis» und «De sectione spatii» nach einem arabischen Text wiederum her (Oxford 1706). Auch Robert Simson (nach ihm ist die Simsonsche Gerade benannt) hat sich um die Erhaltung der Werke des Apollonius verdient gemacht, indem er dessen Bücher «De locis planis» wieder herstellte (Edinburgh 1749). Chasles führt in seiner Geschichte der Geometrie aus, dass nach der Zerstörung des Museums zu Alexandrien im Jahre 642 n. Chr. durch den Kalifen Omar I. das Signal zur Barbarei und zu einer lang andauernden Finsternis auf wissenschaftlichem Gebiete gegeben wurde. Nach langer Nacht für Kunst und Wissenschaft brach um die Mitte des 15. Jahrhunderts durch Vermittlung Italiens die Morgenröte eines neuen Zeitalters an. Purbach, Regiomontanus, de Cusa, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer gelten als Bahnbrecher in der Zeit der Renaissance.

Die Umwälzungen auf dem Gebiete der Astronomie durch Kopernicus, Kepler, Newton, verhalfen auch den Kegelschnitten zu ihrem Recht, sodass sie die populärsten Kurven geworden sind.

Die interessanteste Kurve unter den Kegelschnitten ist die Parabel, da sie sowohl die Eigenschaften der Ellipse, wie der Hyperbel in sich vereinigt. Eine einfache Überlegung zeigt, dass sich ein genügend kleines Stück einer beliebigen Kurve als Stück

einer Parabel betrachten lässt; vielleicht ist Thomas Simpson durch eine ähnliche Überlegung zu der nach ihm benannten Formel gelangt. Hätte Archimedes ahnen können, welche nützliche Anwendung seine Formel für den Inhalt eines Parabelsegmentes finden sollte, sicherlich würde er es nicht unterlassen haben auszurufen: Heureka, Heureka, wie damals, als er den hydrostatischen Auftrieb dazu verwandte, um eine Königskrone auf ihre Echtheit zu prüfen.

Auch in der Statistik erweist sich die Parabel als sehr brauchbar. So hat Herr Prof. Kinkelin in Basel dieselbe benützt, um die Abhängigkeit des Alters von der Zahl der durchschnittlichen jährlichen Krankentage darzustellen. Ich verweise auf die von Herrn Kinkelin abgefasste Schrift: Die gegenseitigen Hilfsgesellschaften der Schweiz im Jahre 1880. Ich erinnere ferner an die Formel von Woolhouse, die Ausgleichungszwecken in der Bevölkerungsstatistik dient.

«Geist und Körper sind zwei Welten und im Menschenorganismus unbegreiflich vereint» sagt der Arzt, Philosoph und Dichter Ernst Freiherr v. Feuchtersleben in seinen Aphorismen und seit Plato haben die Philosophen der Freiheit des menschlichen Geistes das Wort geredet. Diese Ungebundenheit des Geistes kam dem Schöpfer der neuen Geometrie Jean Victor Poncelet zugute. Poncelet hatte den Feldzug Napoleons nach Russland als Lieutenant mitgemacht, war bei Krasnoï schwer verwundet und als Gefangener nach Saratoff geführt worden. Um das Unglück, das sein Vaterland und ihn selbst betroffen hatte, zu vergessen, schuf er in der Gefangenschaft die Grundlagen zu seinem berühmten Werk: «Traité des propriétés projectives». Von Poncelet stammt auch das Prinzip der Kontinuität, wonach Eigenschaften, die von reellen geometrischen Gebilden gelten, ohne weiteres auch auf imaginäre Gebilde übertragen werden können und umgekehrt. Hiezu ein Beispiel:

Ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte bestimmt. Da nun ein Kreis schon durch 3 Punkte gegeben ist, so gehen alle Kreise durch dieselben 2 imaginären Punkte. Dieselben lassen sich näher bestimmen, wenn man sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf den Fall beschränkt, wo sich ein Kreis auf den Koordinatenanfang reduziert, somit die Gleichung hat:

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ oder } (x + i y)(x - i y) = 0$$

Die beiden Richtungen  $+i$  und  $-i$  bestimmen die beiden imaginären Kreispunkte. Dieselben liegen also auf der unendlich fernen Geraden. Zwei Gerade, gegeben durch die Gleichungen  $x + a y = 0$  und  $x - a y = 0$ , werden aber von  $x = 0$  und  $y = 0$  harmonisch geteilt, woraus folgt:

Zwei zueinander senkrechte Gerade teilen die Verbindungslinie der imaginären Kreispunkte harmonisch.

## II. Aus der Theorie der Winkelgegenpunkte.

(Fig. 1.)

Zieht man vom Punkte  $P'$  nach den Ecken des Dreiecks  $A B C$  Strahlen, welche die Gegenseiten in den Punkten  $A', B', C'$  treffen mögen, und spiegelt man diese Strahlen an den innern Winkelhalbierenden des Dreiecks  $A B C$ , so treffen sich diese Spiegelbilder in demselben Punkte  $P''$ , dem Winkelgegenpunkt von  $P'$ .

Beweis: Die gespiegelten Strahlen sollen die Gegenseiten bezw. in den Punkten  $A'', B''$  und  $C''$  treffen, so hat man bei Verwendung trimetrischer Koordinaten (s. Kp. IV, Al. 3)

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{C' B \cdot \sin B}{C' A \cdot \sin A}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{A' C \cdot \sin C}{A' B \cdot \sin B}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{B' A \cdot \sin A}{B' C \cdot \sin C}$$

$$\frac{x_1''}{x_2''} = \frac{C'' B \cdot \sin B}{C'' A \cdot \sin A}; \quad \frac{x_2''}{x_3''} = \frac{A'' C \cdot \sin C}{A'' B \cdot \sin B}; \quad \frac{x_3''}{x_1''} = \frac{B'' A \cdot \sin A}{B'' C \cdot \sin C}$$

den  $C' B \cdot \sin B$  ist die Länge der Senkrechten aus  $C'$  auf  $BC$  und  $C' A \cdot \sin A$  die Länge der Senkrechten von  $C'$  auf  $AC$  etc. Aus ähnlichen Dreiecken folgt sofort das übrige. Multipliziert man die ersten drei Relationen miteinander, so erhält man den Satz von Ceva, die drei letzten multipliziert ergeben:

$$1 = \frac{C'' B \cdot A'' C \cdot B'' A}{C'' A \cdot A'' B \cdot B'' C}$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden sich daher  $A A'', B B''$  und  $C C''$  in demselben Punkte  $P''$ .

Zufolge der Konstruktion des Winkelgegenpunktes  $P''$  gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2''}{x_1''}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_3''}{x_2''}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{x_1''}{x_3''}$$

also: 
$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1''} : \frac{1}{x_2''} : \frac{1}{x_3''}$$

d. h. die Koordinaten eines Punktes sind den entsprechenden reciproken Koordinaten des Winkelgegenpunktes proportional.

Die Koordinaten von  $P'$  sollen in  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  bezw. die Fusspunkte  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{C}'$ , die von  $P''$  bezw. die Fusspunkte  $\mathfrak{A}''$ ,  $\mathfrak{B}''$ ,  $\mathfrak{C}''$  bestimmen, so hat man:

$$\frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2''}; \quad \frac{\mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C} = \frac{x_1''}{x_2'}; \quad \text{somit}$$

$$\frac{\mathfrak{A}'C \cdot \mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C \cdot \mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x_2'}} = 1$$

d. h. die 4 Punkte  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{A}''$ ,  $\mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{B}''$ , liegen auf einem Kreis, dasselbe gilt von den Punkten  $\mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{B}''$ ,  $\mathfrak{C}'$ ,  $\mathfrak{C}''$ , sowie den Punkten  $\mathfrak{C}'$ ,  $\mathfrak{C}''$ ,  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{A}''$ . Alle drei Kreise sind aber konzentrisch und darum fallen sie zusammen:

Die Fusspunkte der Senkrechten von 2 Winkelgegenpunkten auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf demselben Kreis.

### III. Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises.

Die Gleichung irgend eines dem Grunddreieck umschriebenen Kegelschnitts ist von der Form:

$$a_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

Wie sind  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  zu bestimmen damit die Gleichung einen Kreis darstellt? Um diese Frage zu beantworten, führen wir für  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir setzen:

$$\text{Für } x_1 = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1 - p_1,$$

$$\text{» } x_2 = x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2 - p_2,$$

$$\text{» } x_3 = x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \sin \alpha_3 - p_3,$$

$x$  und  $y$  sind hierbei die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes  $x_1, x_2, x_3$ . Die  $\alpha$  sind die Winkel, welche die Normalen vom Nullpunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems auf die bezw. Seiten des Grunddreiecks ( $ABC$ ) mit der positiven Richtung der  $x$  Achse eben dieses Koordinatensystems bilden. Die  $p$  sind die Längen dieser Normalen. Als Bedingungen für den Kreis bekommt man daher, indem man die Koeffizienten von  $x^2$  und  $y^2$  einander gleich und denjenigen von  $xy$  Null setzt:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \cos(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \\ a_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

woraus  $a_1 = a_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$   
 $a_2 = a_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$   
 oder  $a_1 = a_3 \cdot \sin A : \sin C$   
 $a_2 = a_3 \cdot \sin B : \sin C$

Die Gleichung des dem Dreieck  $ABC$  umschriebenen Kreises (Umkreis) lautet deshalb:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C = 0$$

Hieraus leitet man sofort den Satz ab:

Die Fusspunkte der Senkrechten aus einem Punkte des Umkreises auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf einer Geraden (Simson'sche Gerade genannt).

#### IV. Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel.

(Hiezu Fig. 2)

Die Seiten eines Dreiecks ( $ABC$ ) umhüllen mit der Zentralen ( $A'B'C'$ ) der Apollonischen Kreise eine Parabel, der die folgende Eigenschaft zukommt: Bestimmt man von irgend einer ihrer Tangenten die Schnittpunkte ( $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ ) mit den resp. Dreiecksseiten ( $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ ), so treffen sich die Kreise mit diesen Schnittpunkten zu Zentren, durch die resp. Dreiecksecken ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) in zwei Punkten  $O$  und  $O'$ .

Beweis:  $M$  sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Figur),  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  seien die Zentren der Apollonischen Kreise,

so stehen bekanntlich  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  bzw. senkrecht zu  $AM$ ,  $BM$  und  $CM$ . Die Seite  $AB$  bestimmt mit  $A'B'$  auf den Seiten  $CA$  und  $CB$  zwei ähnliche Punktreihen ( $\mathfrak{B}...$  und  $\mathfrak{A}...$ ). Und die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte ( $\mathfrak{B}...$  und  $\mathfrak{A}...$ ) umhüllen unsere Parabel. Zwei Paare entsprechender Punkte sind  $A, A'$  und  $B, B'$  und sei  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  ein beliebiges drittes Paar, so besteht die Relation:

$$\frac{BA'}{AB'} = \frac{B\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} \quad (1)$$

Wenn wir in trimetrischen Koordinaten rechnen und das Dreieck  $ABC$  zum Grunddreieck wählen (also einen beliebigen Punkt  $P$  durch seine Abstände  $x_1, x_2$  und  $x_3$  von den bzw. Dreiecksseiten bestimmen), so müssen wir zur Bestimmung von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zunächst die Strecken berechnen:  $B\mathfrak{A}$ ,  $C\mathfrak{A}$ ,  $A\mathfrak{B}$  und  $C\mathfrak{B}$ . Setzt man  $\mathfrak{B}B' = p$ , so ist  $\underline{A\mathfrak{B}} = AB' - p$ ,  $\underline{\mathfrak{B}C} = \sin B - A\mathfrak{B}$ . (Der Kreis um  $ABC$  hat hierbei den Durchmesser 1),  $\underline{B\mathfrak{A}} = \frac{BA'}{AB'} \cdot A\mathfrak{B}$  nach (1) und  $\underline{C\mathfrak{A}} = B\mathfrak{A} - \sin A$ .

Man findet aber leicht für  $AB'$  und  $A'B$ :

$$AB' = \frac{\sin^2 C}{\sin(C-A)}; \quad BA' = \frac{\sin^2 C}{\sin(C-B)}$$

somit wird:

$$\underline{A\mathfrak{B}} = \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-A)}$$

$$\underline{\mathfrak{B}C} = \frac{\sin B \cdot \sin(C-A) - \sin^2 C + p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-A)}$$

$$= \frac{\frac{\cos 2A - \cos 2C}{2} - \sin^2 C + p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-A)}$$

$$= \frac{\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 C + p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-A)}$$

oder

$$\underline{\mathfrak{B}C} = \underline{[p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A] : \sin(C-A)}$$



$$B\mathfrak{U} = \frac{\sin(C-A)}{\sin(C-B)} \cdot \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-A)} \quad \text{oder}$$

$$B\mathfrak{U} = \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-B)}$$

$$C\mathfrak{U} = \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-B)} - \sin A$$

$$= \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A) - \sin A \cdot \sin(C-B)}{\sin(C-B)}$$

$$= \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A) + \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin(C-B)} \quad \text{oder}$$

$$C\mathfrak{U} = [\sin^2 B - p \cdot \sin(C-A)] : \sin(C-B).$$

Die Strecken  $B\mathfrak{C}$  und  $A\mathfrak{C}$  ergeben sich nach dem Satz des Menelaus:

$$\frac{A\mathfrak{B}}{C\mathfrak{B}} \cdot \left( \frac{B\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} \right) \cdot \frac{C\mathfrak{U}}{B\mathfrak{U}} = 1, \quad \text{woraus}$$

$$\frac{B\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} = \frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} \cdot \frac{B\mathfrak{U}}{C\mathfrak{U}} = \frac{p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A}{\sin(C-A)} \cdot \frac{\sin^2 C - p \sin(C-A)}{\sin(C-B)}$$

$$= \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-B)} \cdot \frac{\sin(C-B)}{\sin^2 B - p \cdot \sin(C-A)}$$

$$= [p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A] : [\sin^2 B - p \cdot \sin(C-A)]$$

Also ist  $B\mathfrak{C} = k [p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A]$

$$A\mathfrak{C} = k [\sin^2 B - p \cdot \sin(C-A)] :$$

da aber  $B\mathfrak{C} + A\mathfrak{C} = \sin C$  ist, so wird:

$$k = \sin C : [\sin^2 B - \sin^2 A]$$

$$= \sin C : (\sin B + \sin A)(\sin B - \sin A)$$

$$= \sin C : 4 \sin \frac{B+A}{2} \cdot \cos \frac{B-A}{2} \cdot \cos \frac{B+A}{2} \cdot \sin \frac{B-A}{2}$$

$$= \sin C : \sin C \cdot \sin(B-A) = 1 : \sin(B-A) \quad \text{also wird:}$$

$$B\mathfrak{C} = [p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A] : \sin(B-A)$$

$$A\mathfrak{C} = [\sin^2 B - p \cdot \sin(C-A)] : \sin(B-A)$$



Kommt man überein, dass für einen Punkt im Innern des Dreiecks alle drei Koordinaten positiv seien, so sind nach dem vorigen die Koordinaten von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\mathfrak{A}$	0	$\frac{p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 B}{\sin(C-B)} \cdot \sin C$	$\frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-B)} \cdot \sin B$
$\mathfrak{B}$	$\frac{p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A}{\sin(C-A)} \cdot \sin C$	0	$\frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-A)} \cdot \sin A$
$\mathfrak{C}$	$\frac{p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A}{\sin(B-A)} \cdot \sin B$	$\frac{\sin^2 B - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(B-A)} \cdot \sin A$	0

Nunmehr kann man die Gleichungen der Kreise aus  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ , und  $\mathfrak{C}$  durch A bzw. B bzw. C aufstellen, wenn man berück-

sichtigt, dass der Abstand zweier Punkte  $P'$  und  $P''$  mit den Koordinaten  $x_1', x_2', x_3'$  und  $x_1'', x_2'', x_3''$  gegeben ist durch:

$$\overline{P'P''}^2 = (x_1' - x_1'')^2 \sin 2A + (x_2' - x_2'')^2 \sin 2B + (x_3' - x_3'')^2 \sin 2C \\ : 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

(siehe die Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1906),

und dass die Koordinaten der Ecken A, B und C sind;

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
A	$\sin B \cdot \sin C$	0	0
B	0	$\sin C \cdot \sin A$	0
C	0	0	$\sin A \cdot \sin B$

Gleichung des Kreises aus  $\mathfrak{A}$ :

$$\sin 2A \cdot (\sin B \cdot \sin C)^2 + \sin 2B \cdot \left[ \frac{p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 B}{\sin(C - B)} \cdot \sin C \right]^2 \\ + \sin 2C \left[ \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - B)} \cdot \sin B \right]^2 \\ = \sin 2A \cdot x_1^2 + \sin 2B \left[ x_2 - \frac{p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 B}{\sin(C - B)} \cdot \sin C \right]^2 \\ + \sin 2C \left[ x_3 - \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - B)} \cdot \sin B \right]^2 \quad (2)$$

Gleichung des Kreises aus  $\mathfrak{B}$ :

$$\sin 2A \left[ \frac{p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A}{\sin(C - A)} \cdot \sin C \right]^2 + \sin 2B \cdot (\sin A \cdot \sin C)^2 \\ + \sin 2C \cdot \left[ \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - A)} \cdot \sin A \right]^2 \quad (3) \\ = \sin 2A \left[ x_1 - \frac{p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A}{\sin(C - A)} \cdot \sin C \right]^2 + \sin 2B \cdot x_2^2 \\ + \sin 2C \left[ x_3 - \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - A)} \cdot \sin A \right]^2$$

Die gemeinsame Sehne dieser beiden Kreise hat deshalb  
(2) — (3) = 0 zur Gleichung oder:

$$\begin{aligned}
 & \sin 2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C - \sin 2 B \cdot \sin^2 A \cdot \sin^2 C \\
 &= \sin 2 A \cdot 2 x_1 \cdot \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 A}{\sin (C - A)} \cdot \sin C \\
 &- \sin 2 B \cdot 2 x_2 \cdot \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 B}{\sin (C - B)} \cdot \sin C \\
 &+ \sin 2 C \cdot 2 x_3 \left[ \sin^2 C - p \cdot \sin (C - A) \right] \\
 &\left[ \frac{\sin A \cdot \sin (C - B) - \sin B \cdot \sin (C - A)}{\sin (C - A) \cdot \sin (C - B)} \right]
 \end{aligned}$$

oder da  $\sin A \cdot (C - B) - \sin B \cdot \sin (C - A)$

$$= \frac{\cos 2 B - \cos 2 C}{2} + \frac{\cos 2 C - \cos 2 A}{2}$$

$$= \cos 2 B - \cos 2 A : 2 = \sin C \cdot \sin (A - B) \quad \text{ist}$$

und:

$$\begin{aligned}
 & \sin 2 A \sin^2 B \cdot \sin^2 C - \sin 2 B \cdot \sin^2 A \sin^2 C \\
 &= 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C [\cos A \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \sin A \cdot \sin C] \\
 &= 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin C \sin (B - A),
 \end{aligned}$$

so erhält man daher für (2) — (3):

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin C \cdot \sin (B - A) \\
 &= \sin 2 A \cdot 2 x_1 \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 A}{\sin (C - A)} \cdot \sin C \\
 &- \sin 2 B \cdot 2 x_2 \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 B}{\sin (C - B)} \cdot \sin C \\
 &+ \sin 2 C \cdot 2 x_3 \left[ \sin^2 C - p \cdot \sin (C - A) \right] \frac{\sin C \cdot \sin (A - B)}{\sin (C - A) \cdot \sin (C - B)}.
 \end{aligned}$$

Dividiert man noch beiderseits durch  $2 \cdot \sin C \cdot \sin (A - B)$ , so gewinnt man die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 -\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C &= \sin 2 A \cdot x_1 \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 A}{\sin (A - B) \cdot \sin (C - A)} \\
 &+ \sin 2 B \cdot x_2 \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 B}{\sin (B - C) \cdot \sin (A - B)} \quad (4) \\
 &+ \sin 2 C \cdot x_3 \frac{p \cdot \sin (C - A) - \sin^2 C}{\sin (C - A) \cdot \sin (B - C)}
 \end{aligned}$$

[Zur Abkürzung kann noch  $p \cdot \sin (C - A) = P$  gesetzt werden].

welche Gleichung durch Vorrücken der Buchstaben und Indices unverändert bleibt, womit der vorangestellte Satz bewiesen ist.

Es erübrigt noch die Gleichung unserer Parabel aufzustellen. Sie ist die Envelope der Geraden  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ , deren Gleichung sein möge:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad (5)$$

Die Koordinaten von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  müssen diese Gleichung erfüllen und dies gibt uns zur Bestimmung von  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  oder vielmehr ihrer Verhältnisse die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_2 (P - \sin^2 B) \cdot \sin C + a_3 (\sin^2 C - P) \cdot \sin B &= 0 \\ a_1 (P - \sin^2 A) \sin C + a_3 (\sin^2 C - P) \cdot \sin A &= 0, \quad \text{so dass} \\ a_2 &= a_3 (P - \sin^2 C) \cdot \sin B : (P - \sin^2 B) \cdot \sin C \\ a_1 &= a_3 (P - \sin^2 C) \cdot \sin A : (P - \sin^2 A) \cdot \sin C \end{aligned}$$

Substituiert man diese Werte von  $a_1$  und  $a_2$  in Gleichung (5), so bleibt:

$$\begin{aligned} (P - \sin^2 C) \cdot (P - \sin^2 B) \cdot \sin A x_1 + (P - \sin^2 A) (P - \sin^2 C) x_2 \\ + (P - \sin^2 B) \cdot (P - \sin^2 A) x_3 &= 0, \quad \text{oder} \\ P^2 \left[ x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C \right] - 2P \left[ \frac{(\sin^2 B + \sin^2 C) \sin A x_1}{2} \right. \\ + \frac{(\sin^2 C + \sin^2 A) \cdot \sin B x_2}{2} + \frac{(\sin^2 A + \sin^2 B) \sin C x_3}{2} \Big] & \quad (6^a) \\ + \sin^2 B \cdot \sin^2 C \cdot \sin A \cdot x_1 + \sin^2 C \cdot \sin^2 A \cdot \sin B \cdot x_2 \\ + \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin C \cdot x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in  $P$ , d. h. durch jeden Punkt  $(x_1, x_2, x_3)$  der Ebene gehen 2 Tangenten an die gesuchte Kurve; für einen Punkt der Kurve selbst fallen diese zusammen, und die Bedingung hiefür ist:

$$\begin{aligned} \left[ (\sin^2 B + \sin^2 C) \cdot \sin A x_1 + (\sin^2 C + \sin^2 A) \cdot \sin B x_2 \right. \\ \left. + (\sin^2 A + \sin^2 B) \cdot \sin C \cdot x_3 \right]^2 \\ = 4 (x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C). \quad (6^b) \\ \cdot (\sin^2 B \cdot \sin^2 C \cdot \sin A \cdot x_1 + \sin^2 C \cdot \sin^2 A \cdot \sin B x_2 \\ + \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin C \cdot x_3) \end{aligned}$$

welches die Gleichung unserer Parabel vorstellt. Dieselbe kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & x_1^2 \cdot \sin^2 A (\sin^2 B - \sin^2 C)^2 + x_2^2 \cdot \sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A)^2 \\ & + x_3^2 \cdot \sin^2 C (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 - 2 x_1 \cdot x_2 \cdot \sin A \cdot \sin B (\sin^2 B \\ & \quad - \sin^2 C) \cdot (\sin^2 C - \sin^2 A) \\ & - 2 x_2 \cdot x_3 \cdot \sin B \cdot \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) \cdot (\sin^2 A - \sin^2 B) \quad (6) \\ & - 2 x_3 \cdot x_1 \cdot \sin C \sin A (\sin^2 A - \sin^2 B) \cdot (\sin^2 B - \sin^2 C) = 0 \end{aligned}$$

Um die Koordinaten des Brennpunktes ermitteln zu können, erinnern wir uns an die folgende Brennpunktseigenschaft eines Kegelschnitts:

Die Verbindungsgeraden irgend eines Punktes mit den beiden Brennpunkten bilden mit den Tangenten aus diesem Punkt bezw. gleiche Winkel.

Hieraus folgt für einen dem Grunddreieck (ABC) eingeschriebenen Kegelschnitt, dass die Koordinaten des einen Brennpunktes proportional den reziproken Werten desjenigen des andern sind.

Im Falle der Parabel ist der eine Brennpunkt ( $F \sim$ ) der Berührungspunkt mit der unendlich fernen Geraden, der die Gleichung zukommt:  $x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C = 0$ . Dessen Koordinaten  $x_{1F \sim}$ ,  $x_{2F \sim}$  und  $x_{3F \sim}$  ergeben sich daher aus (6<sup>b</sup>), und

$$x_{1F \sim} \cdot \sin A + x_{2F \sim} \cdot \sin B + x_{3F \sim} \cdot \sin C = 0$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} & x_2 \left[ \sin B \cdot (\sin^2 C + \sin^2 A) - \sin B (\sin^2 B + \sin^2 C) \right] \\ & + x_3 \left[ \sin C \cdot (\sin^2 A + \sin^2 B) - \sin C (\sin^2 B + \sin^2 C) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = x_3 \frac{\sin^2 C - \sin^2 A}{\sin^2 A - \sin^2 B} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin (C - A)}{\sin (A - B)} \cdot x_3$$

und ähnlich:

$$x_1 = x_2 \cdot \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A - \sin^2 B} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin (B - C)}{\sin (A - B)} \cdot x_3$$

Somit besteht für  $x_{1F}$ ,  $x_{2F}$  und  $x_{3F}$  die Relation:

$$x_{1F} : x_{2F} : x_{3F} = \sin(B - C) : \sin(C - A) : \sin(A - B)$$

und somit für den im Endlichen gelegenen Brennpunkt F:

$$\underline{x_{1F} : x_{2F} : x_{3F} = \frac{1}{\sin(B - C)} : \frac{1}{\sin(C - A)} : \frac{1}{\sin(A - B)}}$$

Dieser Brennpunkt F liegt auf dem dem Grunddreieck ABC umschriebenen Kreise, weil dieser das Winkelgegenpunktsgebilde der unendlich fernen Geraden in Bezug auf das Dreieck ABC ist. In der Tat ersetzt man in der Gleichung  $x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C = 0$  der unendlich fernen Geraden  $x_1, x_2, x_3$  resp. durch  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ , so resultiert die Gleichung  $x_2 x_3 \sin A + x_3 x_1 \sin B + x_1 x_2 \sin C = 0$  des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises.

Die Direktrix bestimmt sich als die Polare des Brennpunktes F. Die Gleichung der Polaren des durch

$$a_{11}^2 x_1^2 + a_{22}^2 x_2^2 + a_{33}^2 x_3^2 - 2a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1 \cdot x_2 - 2a_{22} \cdot a_{33} \cdot x_2 \cdot x_3 - 2a_{33} \cdot a_{11} \cdot x_3 \cdot x_1 = 0$$

gegebenen Kegelschnitts bezogen auf den Punkt F lautet:

$$a_{11}^2 x_1 \cdot x_{1F} + a_{22}^2 x_2 \cdot x_{2F} + a_{33}^2 x_3 \cdot x_{3F} - a_{11} \cdot a_{22} (x_1 \cdot x_{2F} + x_2 \cdot x_{1F}) - a_{22} \cdot a_{33} (x_2 \cdot x_{3F} + x_3 \cdot x_{2F}) - a_{33} \cdot a_{11} (x_3 \cdot x_{1F} + x_1 \cdot x_{3F}) = 0 \quad (7)$$

Bemerkung: Dass die Polare eines Kegelschnitts diese Gleichungsform hat, kann man leicht bestätigen, indem man die Gleichung der Kurve durch die Gleichungen zweier Tangenten und der Berührungssehne ausdrückt.

$$\text{Nun ist } a_{11} = \sin A \cdot (\sin^2 B - \sin^2 C)$$

$$a_{22} = \sin B \cdot (\sin^2 C - \sin^2 A)$$

$$a_{33} = \sin C \cdot (\sin^2 A - \sin^2 B)$$

$$x_{1F} \text{ proportional } \sin(C - A) \cdot \sin(A - B)$$

$$x_{2F} \quad \gg \quad \sin(A - B) \cdot \sin(B - C)$$

$$x_{3F} \quad \gg \quad \sin(B - C) \cdot \sin(C - A)$$

Also geht Gleichung (7) über in:

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 A (\sin^2 B - \sin^2 C)^2 \cdot \sin (C - A) \cdot \sin (A - B) \cdot x_1 \\
 & + \sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A)^2 \cdot \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) \cdot x_2 \\
 & + \sin^2 C (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A) \cdot x_3 \\
 & - \sin A \cdot \sin B (\sin^2 B - \sin^2 C) \cdot (\sin^2 C - \sin^2 A) \\
 & \left[ x_1 \cdot \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) + x_2 \cdot \sin (C - A) \cdot \sin (A - B) \right] \\
 & - \sin B \cdot \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) (\sin^2 A - \sin^2 B) \\
 & [x_2 \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A) + x_3 \cdot \sin (A - B) \cdot \sin (B - C)] \\
 & - \sin C \cdot \sin A \cdot (\sin^2 A - \sin^2 B) (\sin^2 B - \sin^2 C) \\
 & [x_3 \cdot \sin (C - A) \cdot \sin (A - B) + x_1 \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A)] = 0
 \end{aligned}$$

oder indem man beide Seiten durch:

$$\begin{aligned}
 & \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A) \quad \text{dividiert:} \\
 & \sin^4 A \cdot \sin (B - C) \cdot x_1 + \sin^4 B \cdot \sin (C - A) x_2 + \sin^4 C \cdot \sin (A - B) x_3 \\
 & - \sin^2 A \cdot \sin^2 B [x_1 \cdot \sin (B - C) + x_2 \cdot \sin (C - A)] \\
 & - \sin^2 B \cdot \sin^2 C [x_2 \cdot \sin (C - A) + x_3 \cdot \sin (A - B)] \\
 & - \sin^2 C \cdot \sin^2 A [x_3 \cdot \sin (A - B) + x_1 \cdot \sin (B - C)] = 0, \quad \text{oder} \\
 & x_1 \sin^2 A \sin (B - C) [\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C] \\
 & + x_2 \cdot \sin^2 B \cdot \sin (C - A) [\sin^2 B - \sin^2 C - \sin^2 A] \\
 & + x_3 \cdot \sin^2 C \cdot \sin (A - B) [\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B] = 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos 2A - 1 \right. \\
 & \quad \left. + \cos 2B - 1 + \cos 2C \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -1 + \cos 2B + \cos 2C - \cos 2A \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -2 \cos A \cdot \cos (B - C) - 2 \cos^2 A \right] \\
 &= -\frac{4}{2} \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C \quad \text{und ähnlich}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^2 B - \sin^2 C - \sin^2 A &= -2 \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \sin A \\
 \sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B &= -2 \cdot \cos C \cdot \sin A \cdot \sin B
 \end{aligned}$$



Führt man diese Werte in (8) ein und dividiert man sodann beide Seiten der so erhaltenen Gleichung durch  $-\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ , so bleibt:

$$\frac{x_1 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin(B - C) + x_2 \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin(C - A) + x_3 \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \sin(A - B)}{-\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = 0 \quad (8^a)$$

für die Gleichung der Direktrix. Dieselbe geht aber durch den Höhenpunkt des Dreiecks  $ABC$  (mit den Koordinaten  $\cos B \cdot \cos C$ ,  $\cos C \cdot \cos A$ ,  $\cos A \cdot \cos B$ ) hindurch, weil  $(8^a)$  durch dieselben identisch erfüllt wird, wie es auch sein soll, denn die Leitlinien aller dem Dreieck  $ABC$  eingeschriebenen Parabeln gehen durch dessen Höhenpunkt, siehe Geiser (1867) pag. 122.

### V. Folgerungen aus dem vorigen Kapitel.

Die Gleichungen der Kreise aus  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  lassen sich leicht in homogener Form darstellen.

Wegen der Relation:

$$x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

kann man die Gleichung des Kreises aus  $\mathfrak{A}$  in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} & \sin 2A (\sin B \cdot \sin C)^2 \left( \frac{x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \right)^2 \\ &= \sin 2A \cdot x_1^2 + \sin 2B \cdot x_2^2 + \sin 2C \cdot x_3^2 \\ & \quad - 2 \cdot \sin 2B \frac{p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 B}{\sin(C - B)} \\ & \quad \cdot \sin C \cdot x_2 \frac{x_1 \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \\ & \quad - 2 \cdot \sin 2C \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - B)} \\ & \quad \cdot \sin B \cdot x_3 \frac{x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \quad \text{oder} \\ & 2 \cdot \cos A \cdot \sin(C - B) [x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C]^2 = \\ & [\sin 2A \cdot x_1^2 + \sin 2B \cdot x_2^2 + \sin 2C \cdot x_3^2] \cdot \sin A \cdot (C - B) \end{aligned}$$

$$+ [2 \cdot \sin 2 B \cdot \sin B \cdot x_2 - 2 \sin 2 C \cdot \sin C \cdot x_3] \\ [x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \sin C]$$

$$- [4 \cdot \cos B \cdot p \cdot \sin (C - A) x_2 - 4 \cos C \cdot p \cdot \sin (C - A) \cdot x_3] \\ [x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C]$$

oder wenn  $p \cdot \sin (C - A) = P$  gesetzt wird:

$$x_1^2 [2 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin^2 A - 2 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin^2 A]$$

$$+ x_2^2 [2 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin^2 B - \sin 2 B \cdot \sin A \cdot \sin (C - B) \\ - 2 \sin 2 B \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P]$$

$$+ x_3^2 [2 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) \sin^2 C - \sin 2 C \cdot \sin A \cdot \sin (C - B) \\ + 2 \cdot \sin 2 C \cdot \sin^2 C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P]$$

$$+ x_1 \cdot x_2 [4 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin A \cdot \sin B \\ - 2 \cdot \sin 2 B \cdot \sin A \cdot \sin B + 4 \cos B \cdot \sin A \cdot P]$$

$$+ x_2 \cdot x_3 [4 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin B \cdot \sin C \\ - 2 \cdot \sin 2 B \cdot \sin B \cdot \sin C + 2 \cdot \sin 2 C \cdot \sin B \sin C \\ + 4 \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot P - 4 \cdot \cos C \cdot \sin B \cdot P]$$

$$+ x_3 x_1 [4 \cdot \cos A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C \cdot \sin A \\ + 2 \cdot \sin 2 C \cdot \sin C \cdot \sin A - 4 \cdot \cos C \cdot \sin A \cdot P] = 0$$

Koeffizient von  $x_1^2$ : 0

Koeffizient von  $x_2^2$ :  $(\sin 2 B - \sin 2 C) \sin^2 B$

$$= \sin 2 B \cdot \frac{\cos 2 B - \cos 2 C}{2} - 2 \cdot \sin 2 B \sin^2 B \\ + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B P$$

$$= \sin 2 B \left[ \frac{\cos 2 C - \cos 2 B}{2} + \frac{1 - \cos 2 B}{2} - (1 - \cos 2 B) \right] \\ - \sin 2 C \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B P$$

$$= \sin 2 B \frac{\cos 2 C - 1}{2} - \sin 2 C \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P$$

$$= - \sin 2 B \cdot \sin^2 C - \sin 2 C \cdot \sin^2 B + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P$$

$$= \underline{\underline{- 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C + 4 \cdot \cos B \cdot \sin B \cdot P}}$$

Koeffizient von  $x_3^2$ :

$$\begin{aligned}
 & (\sin 2B - \sin 2C) \sin^2 C - \sin 2C \frac{\cos 2B - \cos 2C}{2} \\
 & \quad + 2 \cdot \sin 2C \cdot \sin^2 C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P \\
 = & \sin 2C \left[ \frac{1 - \cos 2C}{2} + \frac{\cos 2C - \cos 2B}{2} \right] + \sin 2B \sin^2 C \\
 & \quad - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P \\
 = & \sin 2C \cdot \sin^2 B + \sin 2B \cdot \sin^2 C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P \\
 = & \underline{\underline{2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C - 4 \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot P}}
 \end{aligned}$$

Koeffizient von  $x_1 x_2$ :

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \sin A \sin B (\sin 2B - \sin 2C - \sin 2B) + 4 \cdot \cos B \cdot \sin A \cdot P \\
 = & \underline{\underline{-4 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos C + 4 \cdot \cos B \cdot \sin A \cdot P}}
 \end{aligned}$$

Koeffizient von  $x_2 x_3$ :

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \sin B \cdot \sin C (\sin 2B - \sin 2C - \sin 2B + \sin 2C) \\
 & \quad + 4P \cdot \sin (C - B) \\
 = & \underline{\underline{4 \cdot P \cdot \sin (C - B)}}
 \end{aligned}$$

Koeffizient von  $x_3 x_1$ :

$$\begin{aligned}
 & 2 \sin C \cdot \sin A (\sin 2B - \sin 2C + \sin 2C) - 4 \cos C \cdot \sin A \cdot P \\
 = & \underline{\underline{4 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos B - 4 \cdot \cos C \cdot \sin A \cdot P}}
 \end{aligned}$$

Setzt man  $P : 2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = P'$ , so lautet die Gleichung des Kreises aus  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{aligned}
 & \underline{\underline{-x_2^2 (1 - \sin 2B \cdot P') + x_3^2 (1 - \sin 2C \cdot P')}} \\
 + & \underline{\underline{2 x_1 x_2 (-\cos C + \cos B \cdot \sin A \cdot P') + 2 x_2 x_3 \cdot \sin (C - B) P'}} \\
 & \quad + \underline{\underline{2 x_3 x_1 \cdot (\cos B - \cos C \cdot \sin A \cdot P')}} = 0
 \end{aligned}$$

Für den Fall von  $P' = 0$ , reduziert sich die Gleichung auf:

$$\begin{aligned}
 & -x_2^2 + x_3^2 - 2 x_1 \cdot x_2 \cdot \cos C + 2 \cdot x_3 \cdot x_1 \cdot \cos B = 0, \text{ oder} \\
 & -x_2 (x_2 + 2 x_1 \cos C) + x_3 (x_3 + 2 x_1 \cdot \cos B) = 0
 \end{aligned}$$

Spiegelt man den Punkt A an der Seite BC und heisst das Bild A', so ist  $x_2 + 2 x_1 \cdot \cos C = 0$  die Gleichung von CA', analog ist  $x_3 + 2 x_1 \cdot \cos B = 0$  die Gleichung von BA'. Der Kreis geht also durch den Schnittpunkt von CA' mit AB, ferner durch den Schnittpunkt von AC mit AB, durch den Schnittpunkt von AC mit BA' und durch den Schnittpunkt von CA' und BA' hindurch.

Die Gleichung

$$-x_2(x_2 + 2 x_1 \cdot \cos C) + x_3(x_3 + 2 x_1 \cdot \cos B) = 0$$

muss in der Form geschrieben werden können:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C + (a_2 x_2 - a_3 x_3)(x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C) = 0,$$

denn die repräsentierende Kurve geht durch A, und ist ein Kreis, da sie durch die beiden imaginären Kreispunkte hindurch geht. Gibt man den beiden letzten Gleichungen die Form:

$$2 x_3 \cdot x_1 \cdot \cos B - 2 x_1 \cdot x_2 \cdot \cos C - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$x_2 \cdot x_3 (\sin A + a_2 \sin C + a_3 \cdot \sin B) + x_3 \cdot x_1 (\sin B + a_3 \cdot \sin A) + x_1 \cdot x_2 (\sin C + a_2 \cdot \sin A) + x_2^2 \cdot a_2 \cdot \sin B + x_3^2 \cdot a_3 \cdot \sin C = 0$$

so bestimmen sich  $a_2$  und  $a_3$  aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{-1}{a_2 \cdot \sin B} = \frac{1}{a_3 \cdot \sin C} \quad \text{und} \quad \frac{2 \cos B}{\sin B + a_3 \cdot \sin A} = \frac{-2 \cdot \cos C}{\sin C + a_2 \cdot \sin A}$$

woraus folgt:

$$a_2 = -\frac{a_3 \cdot \sin C}{\sin B}; \quad 2 \cdot \sin A + 2 a_2 \cdot \sin A \cdot \cos B + 2 a_3 \cdot \sin A \cdot \cos C = 0$$

oder

$$\begin{array}{l|l} a_2 \cdot \sin B + a_3 \cdot \sin C = 0 & 2 \cos B \\ a_2 \cdot \cos B + a_3 \cdot \cos C + 1 = 0 & -\sin B \end{array} \quad \begin{array}{l} -\cos C \\ \sin C \end{array}$$

$$a_3 = \sin B : \sin (C - B)$$

$$a_2 = -\sin C : \sin (C - B)$$

Diese Werte müssen die Gleichung:  $\sin A + a_2 \cdot \sin C + a_3 \cdot \sin B = 0$  erfüllen, da der Koeffizient von  $x_2 \cdot x_3$  Null ist; in der Tat ist  $\sin A \cdot \sin (C - B) - \sin^2 C + \sin^2 B = 0$ .

Die Gleichungen der Apollonischen Kreise sind deshalb:

$$\begin{aligned}\sin(B - C) \Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + (x_2 \sin C - x_3 \sin B) \Sigma x_1 \cdot \sin A &= 0 \\ \sin(C - A) \Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + (x_3 \sin A - x_1 \sin C) \Sigma x_1 \cdot \sin A &= 0 \\ \sin(A - B) \Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + (x_1 \sin B - x_2 \sin A) \Sigma x_1 \cdot \sin A &= 0\end{aligned}$$


---

Die Durchschnittssehnen dieser Kreise mit dem Umkreis haben deshalb die Gleichungen:

$$\begin{aligned}x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B &= 0, \quad x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C = 0, \\ x_1 \cdot \sin B - x_2 \cdot \sin A &= 0\end{aligned}$$

und schneiden sich darum im Winkelgegenpunkt des Schwerpunktes (Punkt v. Lemoine).

Für ein beliebiges  $P'$  lauten die entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}U \cdot \sin(B - C) + [x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin C \\ - x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \sin B] L &= 0 \\ U \cdot \sin(C - A) + [x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \sin A \\ - x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \sin C] \cdot L &= 0 \\ U \cdot \sin(A - B) + [x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \sin B \\ - x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin A] \cdot L &= 0\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}x_2 x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C &= U \quad \text{und} \\ x_1 \cdot \sin A + x_2 \cdot \sin B + x_3 \cdot \sin C &= L\end{aligned}$$

gesetzt worden ist.

Die Durchschnittssehnen dieser Kreise mit dem Umkreis haben zu Gleichungen:

$$\begin{aligned}x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin C - x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \cdot \sin B &= 0 \\ x_3 (1 - \sin 2 C \cdot P') \cdot \sin A - x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \cdot \sin C &= 0 \\ x_1 (1 - \sin 2 A \cdot P') \cdot \sin B - x_2 (1 - \sin 2 B \cdot P') \cdot \sin A &= 0\end{aligned}$$

und schneiden sich also in demselben Punkt  $\mathfrak{P}$ , dessen Ort man durch Elimination von  $P'$  aus zwei der Gleichungen erhält:

$$\begin{aligned}x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B &= 2 P' \sin B \cdot \sin C (x_2 \cdot \cos B - x_3 \cdot \cos C) \\ x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C &= 2 \cdot P' \cdot \sin C \cdot \sin A (x_3 \cdot \cos C - x_1 \cdot \cos A)\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}& (x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B) (x_3 \cdot \cos C - x_1 \cdot \cos A) \cdot \sin A \\ &= (x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C) (x_2 \cdot \cos B - x_3 \cdot \cos C) \sin B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder:} \quad & x_2 \cdot x_3 (\sin 2C \cdot \sin A - \sin 2B \cdot \sin A) \\ & + x_3 \cdot x_1 (\sin 2A \cdot \sin B - \sin 2C \cdot \sin B) \\ & + x_1 \cdot x_2 (\sin 2B \cdot \sin C - \sin 2A \cdot \sin C) = 0 \quad \text{oder} \\ & \underline{x_2 \cdot x_3 \cdot \sin 2A \cdot \sin (B - C) + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin 2B \cdot \sin (C - A)} \\ & \quad \underline{+ x_1 \cdot x_2 \cdot \sin 2C \cdot \sin (A - B) = 0} \end{aligned}$$

Der Ort von  $\mathfrak{P}$  ist also ein dem Grunddreieck umschriebener Kegelschnitt, der ausserdem durch seinen Umkreismittelpunkt und seinen Höhenpunkt hindurchgeht.

Die Kreise aus  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  sollen sich in  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{Q}'$  schneiden; so kann man den Ort dieser Punkte bestimmen, indem man aus den zugehörigen Gleichungen  $P'$  eliminiert:

$$\begin{aligned} P' &= \frac{U \cdot \sin (B - C) + L (x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B)}{-(x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot 2 \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot L} \quad \text{für } \mathfrak{A} \text{ und} \\ P' &= \frac{U \cdot \sin (C - A) + L (x_3 \cdot \sin A - x_1 \cdot \sin C)}{-(x_1 \cos A - x_3 \cdot \cos C) \cdot 2 \sin C \cdot \sin A \cdot L} \quad \text{für } \mathfrak{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{woraus:} \quad & -U [(x_1 \cos A - x_3 \cdot \cos C) \sin A \cdot \sin (B - C) \\ & - (x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot \sin B \cdot \sin (C - A)] \\ & - L [(x_1 \cdot \cos A - x_3 \cdot \cos C) (x_2 \cdot \sin C - x_3 \cdot \sin B) \cdot \sin A \\ & - (x_3 \cdot \sin A - x_1 \sin C) \cdot (x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot \sin B] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{nun ist:} \quad & (x_1 \cdot \cos A - x_3 \cdot \cos C) \sin A \cdot \sin (B - C) \\ & - (x_3 \cdot \cos C - x_2 \cdot \cos B) \cdot \sin B \cdot \sin (C - A) \\ & = x_1 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin (B - C) - x_2 \sin B \cdot \cos B \cdot \sin (C - A) \\ & \quad + x_3 \cdot \cos C \left( \frac{\cos 2B - \cos 2C}{2} + \frac{\cos 2C - \cos 2A}{2} \right) \quad \text{oder} \\ & = x_1 \sin A \cos A \cdot \sin (B - C) + x_2 \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \sin (C - A) \\ & \quad + x_3 \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \sin (A - B) \end{aligned}$$

Somit lautet die Gleichung des Ortes für  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{Q}'$ :

$$\begin{aligned} & -U [\sin 2A \cdot \sin (B - C) \cdot x_1 + \sin 2B \cdot \sin (C - A) x_2 \\ & \quad + \sin 2C \cdot \sin (A - B) x_3] \\ & - L [\sin A (\sin 2B - \sin 2C) x_2 x_3 + \sin B (\sin 2C - \sin 2A) x_3 \cdot x_1 \\ & \quad + \sin C (\sin 2A - \sin 2B) x_1 x_2] = 0 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$U \Sigma \sin 2A \cdot \sin (B - C) \cdot x_1 - L \Sigma \sin 2A \cdot \sin (B - C) x_2 x_3 = 0$$

also eine Gleichung vom dritten Grad.

Die repräsentierende Kurve, welche zu dieser Gleichung gehört, geht durch die Ecken des Grunddreiecks, durch die imaginären Kreispunkte, durch den Höhenpunkt und den Umkreismittelpunkt, ausserdem aber durch die Schnittpunkte der Geraden  $\Sigma x_1 \cdot \sin 2A \cdot \sin(B-C) = 0$  mit dem Kegelschnitt  $\Sigma x_2 \cdot x_3 \cdot \sin 2A \cdot \sin(B-C) = 0$ , sowie durch den vierten Schnittpunkt des Umkreises mit eben diesem Kegelschnitt, endlich auch durch die Schnittpunkte der Geraden  $\Sigma \sin 2A \cdot \sin(B-C) \cdot x_1 = 0$  mit der unendlich fernen Geraden, d. h. die Gerade, die durch die Gleichung gegeben wird,  $\Sigma \sin 2A \cdot \sin(B-C) x_1 = 0$ , d. h. die Euler'sche Gerade ist Asymptote an unsere Kurve dritter Ordnung.

Herr Prof. Neuberg in Lüttich hat, angeregt durch meine Arbeit, den Ort von  $\mathfrak{O}$  und  $\mathfrak{O}'$  zuerst bestimmt; er fand eine Gleichung vierten Grades, aus der sich aber ein linearer Faktor absondern lässt, so dass unsere Resultate übereinstimmen.

Aus den Formeln für die Koordinaten von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  folgt:

Trifft ein Kreis aus  $M$  die Geraden,  $MA$ ,  $MB$  und  $MC$  bzw. in den Punkten  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , so schneiden seine Tangenten in  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  die entsprechenden Gegenseiten des Grunddreiecks in Punkten ( $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ ) einer Geraden, welche Tangente an die Parabel von Kiepert ist.

Die Kreise aus  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  durch  $A$ , bzw.  $B$ , bzw.  $C$  teilen  $MA$ , resp.  $MB$  und  $MC$  im gleichen Verhältnis; allgemein gilt der Satz:

Die Kreise aus  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ , welche  $MA$ ,  $MB$  und  $MC$  im gleichen Verhältnis teilen, bestimmen eine Kreisschar.

Beweis:

Die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  teilen  $MA$ , bzw.  $MB$  und  $MC$  in gleichem Verhältnis, sodass  $MA_1 = MB_1 = MC_1 = \frac{k}{2}$ ; dann sind die Koordinaten von  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$ :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
für $A_1$	$\frac{\cos A + k \cdot \cos(C-B)}{2}$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos B$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos C$
" $B_1$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos A$	$\frac{\cos B + k \cdot \cos(A-C)}{2}$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos C$
" $C_1$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos A$	$\frac{1-k}{2} \cdot \cos B$	$\frac{\cos C + k \cdot \cos(B-A)}{2}$



Von der Gleichung des Kreises aus  $\mathfrak{A}$  durch  $A_1$  brauchen wir bloss die linke Seite zu notieren; die rechte Seite ist uns schon bekannt.

Diese linke Seite lautet:

$$\begin{aligned} \sin 2 A \left[ \frac{\cos A + k \cdot \cos(C-B)}{2} \right]^2 + \sin 2 B \left[ \frac{P - \sin^2 B}{\sin(C-B)} \right. \\ \left. \cdot \sin C - \frac{1-k}{2} \cdot \cos B \right]^2 \\ + \sin 2 C \left[ \frac{\sin^2 C - P}{\sin(C-B)} \cdot \sin B - \frac{1-k}{2} \cdot \cos C \right]^2 = \dots \end{aligned}$$

Analog hat man für den Kreis aus  $\mathfrak{B}$ :

$$\begin{aligned} \sin 2 A \left[ \frac{\sin^2 A - P}{\sin(A-C)} \cdot \sin C - \frac{1-k}{2} \cdot \cos A \right]^2 \\ + \sin 2 B \left[ \frac{\cos B + k \cdot \cos(A-C)}{2} \right]^2 \\ + \sin 2 C \left[ \frac{P - \sin^2 C}{\sin(A-C)} \cdot \sin A - \frac{1-k}{2} \cdot \cos C \right]^2 = \dots \end{aligned}$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen, so bekommt man links, unter Weglassung der Ausdrücke, die beiderseits vom Gleichheitszeichen vorkommen:

$$\begin{aligned} \sin 2 A \left\{ \left[ \frac{\cos A + k \cos(C-B)}{2} \right]^2 - \left( \frac{1-k}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 A \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 A - P}{\sin(A-C)} (1-k) \cdot \cos A \cdot \sin C \right\} \\ + \sin 2 B \left\{ \left( \frac{1-k}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 B - \frac{P - \sin^2 B}{\sin(C-B)} \cdot \sin C (1-k) \cdot \cos B \right. \\ \left. - \left[ \frac{\cos B + k \cdot \cos(A-C)}{2} \right]^2 \right\} \\ + \sin 2 C \left\{ (P - \sin^2 C) (1-k) \cdot \cos C \left( \frac{\sin B}{\sin(C-B)} + \frac{\sin A}{\sin(A-C)} \right) \right\} \end{aligned}$$

Die Glieder mit  $k^2$  fallen weg; denn

$$\sin 2 A \left[ \frac{\cos^2(C-B) - \cos^2 A}{4} \right] + \sin 2 B \left[ \frac{\cos^2 B - \cos^2(A-C)}{4} \right] = 0$$

und es bleibt:

$$\begin{aligned}
 & \sin 2 A \left\{ -k \cdot \cos A [\cos (B + C) - \cos (C - B)] \right. \\
 & \quad \left. + (1 - k) \frac{\sin^2 A - P}{\sin (A - C)} \cdot \cos A \cdot \sin C \right\} \\
 & + \sin 2 B \left\{ k \cos B [\cos (C + A) - \cos (A - C)] \right. \\
 & \quad \left. + (1 - k) \frac{\sin^2 B - P}{\sin (C - B)} \cdot \cos B \cdot \sin C \right\} \\
 & + \sin 2 C \left\{ (P - \sin^2 C) (1 - k) \right. \\
 & \quad \left. \cdot \cos C \left[ \frac{\cos 2 C - \cos 2 A + \cos 2 B - \cos 2 C}{2 \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (A - C)} \right] \right\} \\
 & = \sin 2 A \left\{ +k \cdot \cos A \cdot 2 \cdot \sin B \cdot \sin C + (1 - k) \frac{\sin^2 A - P}{\sin (A - C)} \cdot \cos A \cdot \sin C \right\} \\
 & + \sin 2 B \left\{ -k \cdot \cos B \cdot 2 \cdot \sin A \cdot \sin C + (1 - k) \frac{\sin^2 B - P}{\sin (C - B)} \cdot \cos B \cdot \sin C \right\} \\
 & + \frac{\sin 2 C (P - \sin^2 C) (1 - k) \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot \sin (A - B)}{\sin (B - C) \cdot \sin (C - A)} \\
 & = 4 \cdot k \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C (\cos^2 A - \cos^2 B) \\
 & + (1 - k) \frac{P - \sin^2 A}{\sin (C - A)} \cdot \cos A \cdot \sin C \cdot \sin 2 A \\
 & + (1 - k) \frac{P - \sin^2 B}{\sin (B - C)} \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \sin 2 B \\
 & + (1 - k) \frac{(P - \sin^2 C)}{\sin (B - C) \cdot \sin (C - A)} \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot \sin 2 C \cdot \sin (A - B) \\
 & = -4 k \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin C \cdot \sin (A - B) \\
 & + (1 - k) \cdot \sin (A - B) \cdot \sin C \sum \frac{P - \sin^2 A}{\sin (C - A) \cdot \sin (A - B)} \\
 & \quad \cdot \cos A \cdot \sin 2 A
 \end{aligned}$$

Nun wissen wir bereits, dass die rechte Seite der zugehörigen Gleichung durch  $\sin C \cdot \sin (A - B)$  teilbar ist, und dass der Rest durch Vorrücken der Buchstaben und Indices un geändert bleibt. Dasselbe gilt aber, wie man sieht, von der linken Seite, womit der Satz bewiesen ist.

## VI. Eine Beziehung zwischen der Euler'schen Geraden und der Parabel von Kiepert.

Zunächst will ich bemerken, dass die Parabel von Kiepert auch Parabel von Neuberg genannt wird; Lemoine gebraucht diese Bezeichnung ohne Zweifel auf Grund der Arbeit Neubergs: «Mémoire sur le Tetraèdre» in den Mémoires de l'Académie Royale de Belgique XXXVII. Von dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis, nachdem der erste Teil zu der meinigen bereits abgeschlossen war. Ich kann nicht umhin, an dieser Stelle dem hervorragenden Förderer der Dreiecksgeometrie, Herrn Prof. Neuberg in Lüttich, für seine vielen Anregungen meinen besten Dank auszusprechen.

Die hervorgehobene Beziehung lässt sich in folgendem Satz aussprechen:

Trifft irgend eine Tangente der Kiepert'schen Parabel die Seiten des Grunddreiecks in den Punkten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  und zieht man um dieselben als Mittelpunkte die Kreise durch irgend einen festen Punkt  $\mathfrak{O}$  der Euler'schen Geraden, so ist der Ort ihres zweiten Schnittpunktes  $\mathfrak{O}'$  eine zyklische Kurve dritten Grades mit einer zur Euler'schen Geraden parallelen Asymptote. Der feste Punkt  $\mathfrak{O}$  ist Doppelpunkt dieser Kurve; seine Tangenten stehen zueinander senkrecht und berühren ausserdem die Parabel von Kiepert.

Bei der Darlegung dieses Satzes werden wir Gelegenheit haben, von derjenigen Methode Gebrauch zu machen, die schon Descartes zur Lösung des Tangentenproblems angewandt hat.

Nun wollen wir im Geiste Descartes daran gehen, den an die Spitze gestellten Satz zu beweisen. Descartes ist ja der eigentliche Begründer der analytischen Methode, von der wir Gebrauch machen.

Wir benützen die Figur 2; nach dem zugehörigen Texte ist  $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A : \sin(C - A)$ . In Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in  $\mathfrak{B}$  und mit  $\mathfrak{BC}$  zur  $+x$  Achse (die  $+y$  Achse soll darüber liegen) sind daher die Koordinaten von  $\mathfrak{B}$ , wenn noch  $p \cdot \sin(C - A) = P$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
 x_{\mathfrak{B}} &= B C - \mathfrak{B} C \cdot \cos C \\
 &= \sin A \cdot \sin (C - A) + (\sin^2 A - P) \cos C : \sin (C - A) \\
 &= \sin^2 A \cdot \cos C - P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A \\
 &\quad - \sin A \cdot \cos C \cdot \sin A : \sin (C - A) \\
 &= \underline{-P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A : \sin (C - A)} \quad \text{und} \\
 y_{\mathfrak{B}} &= \underline{(P - \sin^2 A) \cdot \sin C : \sin (C - A)}
 \end{aligned}$$

Ähnlich bekommt man für  $\mathfrak{A}$ :

$$x_{\mathfrak{A}} = -P + \sin^2 C : \sin (C - B); \quad y_{\mathfrak{A}} = 0$$

Die Gleichungen der Kreise aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  durch einen festen Punkt  $\mathfrak{O}$  mit den Koordinaten  $a$  und  $b$  lauten daher:

$$\begin{aligned}
 \left[ x - \frac{\sin^2 C - P}{\sin (C - B)} \right]^2 + y^2 &= \left[ a - \frac{\sin^2 C - P}{\sin (C - B)} \right]^2 + b^2 \quad \text{bzw.} \\
 \left[ x - \frac{-P \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A}{\sin (C - A)} \right]^2 + \left[ y - \frac{P - \sin^2 A}{\sin (C - A)} \cdot \sin C \right]^2 \\
 &= \left[ a - \frac{-P \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A}{\sin (C - A)} \right]^2 + \left[ b - \frac{P - \sin^2 A}{\sin (C - A)} \cdot \sin C \right]^2 \\
 \text{oder} \quad & \frac{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) \sin (C - B)}{-2x(\sin^2 C - P)} = \frac{-2a(\sin^2 C - P)}{\quad} \quad \text{bzw.} \\
 & \frac{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) \sin (C - A)}{-2x(-P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A)} \\
 & - 2y(P - \sin^2 A) \cdot \sin C = -2a(-P \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A) \\
 & \quad - 2b(P - \sin^2 A) \cdot \sin C \quad \text{oder} \\
 & \frac{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) \sin (C - B)}{-2 \sin^2 C (x - a)} = \frac{-2P(x - a)}{\quad} \quad \text{und} \\
 & \frac{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) \sin (C - A)}{+ 2 \sin A \cdot \sin C [- (x - a) \cos A + (y - b) \sin A]} \\
 & \quad = \underline{2P [\sin C \cdot (y - b) - \cos C \cdot (x - a)]}
 \end{aligned}$$

Verschiebt man das Koordinatensystem parallel sich selbst in den Punkt  $\mathfrak{O}$  ( $a, b$ ), so lauten die beiden letzten Gleichungen in Bezug auf das neue Koordinatensystem (man hat nämlich  $x$  durch  $x + a$  und  $y$  durch  $y + b$  zu ersetzen):

$$(x^2 + y^2 + 2ax + 2by) \sin(C - B) - 2 \sin^2 C \cdot x = -2P \cdot x \\ + 2 \sin A \cdot \sin C (-x \cos A + y \sin A) = 2P \cdot (\sin C \cdot y - \cos C x)$$

Aus diesen beiden Gleichungen bekommt man durch Elimination von P die Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + 2ax + 2by) [-2x \cdot \sin(C - A) - 2 \cdot \sin(C - B)(\sin C y - \cos C x)] - 4 \cdot \sin A \cdot \sin C (-x \cdot \cos A + y \cdot \sin A)x + 4 \sin^2 C \cdot x (\sin C \cdot y - \cos C x) = 0$$

und dies ist die Gleichung für den Ort der Schnittpunkte der Kreise aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  durch  $\mathfrak{D}$  (a, b). Da in dieser Gleichung die Glieder mit der 0. und 1. Potenz der Veränderlichen fehlen, so ist der Punkt  $\mathfrak{D}$  (a, b) Doppelpunkt der Kurve, ferner ist ihre reelle Asymptote parallel zur Geraden:

$$-2x [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] - 2y \cdot \sin C \cdot \sin(C - B) = 0$$

welche parallel ist zur Geraden von Euler, wie später die Gleichung der Euler'schen Geraden zeigt. Die Tangenten im Doppelpunkt haben zur Gleichung:

$$x^2 [-4a \sin(C - A) + 4a \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C + 4 \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A - 4 \sin^2 C \cdot \cos C]$$

$$+ y^2 [-4b \sin(C - B) \cdot \sin C] + 4xy [-b \cdot \sin(C - A) + b \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C - \sin^2 A \cdot \sin C + \sin^3 C - a \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C] = 0 \quad \text{oder}$$

$$- \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot b \sin(C - B) \cdot \sin C + \frac{y}{x} \left[ -b \cdot \sin(C - A) + b \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C - a \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C - \sin^2 A \cdot \sin C + \sin^3 C \right] \\ - a \cdot \sin(C - A) + a \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A - \sin^2 C \cdot \cos C = 0$$

aus dieser Gleichung ergeben sich 2 Werte für  $\frac{y}{x}$ :

$$\left(\frac{y}{x}\right)_1 \text{ u. } \left(\frac{y}{x}\right)_2; \text{ ist } \left(\frac{y}{x}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)_2 = -1$$

so stehen die beiden Tangenten zu einander senkrecht, oder nach obiger Gleichung:

$$\frac{a [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] + b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C}{- \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C} = 0$$

Dies ist die Gleichung der Euler'schen Geraden, denn setzt man für a und b die Koordinaten  $\frac{\sin A}{2}$  und  $\frac{\cos A}{2}$  des Umkreismittelpunktes in diese Gleichung ein, so kommt:

$$\sin A [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] + \cos A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C - 2 \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + 2 \cdot \sin^2 C \cdot \cos C = 0$$

oder wegen

$$\begin{aligned} - 2 \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + 2 \sin^2 C \cdot \cos C &= \sin C (\sin 2 C - \sin 2 A) \\ &= - 2 \cdot \sin C \cdot \cos B \cdot \sin (C - A) \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$\sin (C - B) \cdot \sin (C - A) + \sin (B - C) \cdot \sin (C - A) = 0$$

Die Koordinaten des Umkreismittelpunktes erfüllen also die Gleichung der erhaltenen Geraden, somit liegt er auch auf dieser Geraden. Setzt man aber die Koordinaten des Höhenpunktes:  $\sin C \cdot \cos B$  und  $\cos B \cdot \cos C$  für a und b in diese Gleichung ein, so kommt:

$$\begin{aligned} \sin C \cdot \cos B [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] + \cos B \cdot \cos C \\ \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin C \{ \cos B [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] + \cos B \cdot \cos C \\ \cdot \sin (C - B) - \sin A \cdot \cos A + \sin C \cdot \cos C \} \\ = \sin C \left\{ \cos B \cdot \sin (C - A) - \frac{\sin 2 A}{2} + \frac{\sin 2 C}{2} \right\} \\ = \sin C \left\{ \cos B \cdot \sin (C - A) + \cos (C + A) \cdot \sin (C - A) \right\} \\ = \sin C \left\{ \cos B \cdot \sin (C - A) - \cos B \cdot \sin (C - A) \right\} = 0; \end{aligned}$$

die Koordinaten des Höhenpunktes erfüllen also die Gleichung der erhaltenen Geraden, somit liegt er auch auf derselben. Die Gerade geht also durch den Umkreismittelpunkt und den Höhenpunkt und ist daher die Euler'sche Gerade. Damit ist ein Teil des Seite 28 gegebenen Satzes bewiesen; um auch den Rest zu beweisen, schreiben wir zunächst den Richtungskoeffizienten für die Tangenten im Doppelpunkt hin:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} &= \frac{-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C} \\ &+ \frac{-a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C} \\ &\pm \sqrt{\frac{[-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C \\ &+ \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2 - 4b \sin(C-B) \cdot \sin C [a \cdot \sin(C-A) \\ &- a \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C]}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C}} \end{aligned}$$

Die Gleichung dieser Doppelpunktstangenten in Bezug auf das feste Koordinatensystem durch B lautet daher:

$$\begin{aligned} \frac{y-b}{x-a} &= \frac{-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C} \\ &+ \frac{-a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C} \\ &\pm \sqrt{\frac{[-b \cdot \sin(C-A) + b \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - a \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C \\ &+ \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2 - 4b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C [a \cdot \sin(C-A) \\ &- a \cdot \sin(C-B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C]}{2b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C}} \quad (1) \end{aligned}$$

Der Doppelpunkt  $\mathfrak{D}$  wird zur Spitze, wenn der Radikand verschwindet.  $\mathfrak{D}$  liegt dann auf der Kiepert'schen Parabel. Denn man überzeugt sich ohne weiteres, dass der Null gesetzte Radikand eine dem Dreieck ABC eingeschriebene Parabel vorstellt, und dass die Koordinaten ihrer Berührungspunkte auf den Dreiecksseiten mit denen übereinstimmen, welche die Gleichung der Kiepert'schen Parabel in trimetrischen Koordinaten liefert.

Liegt nun der Punkt  $\mathfrak{D}$  (a, b) auf der Geraden von Euler, so gilt:

$$a = \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) - b \cdot \sin(C-B) \cdot \sin C : \sin(C-A) - \sin(C-B) \cdot \cos C$$



Die Gleichung (1) schreiben wir in der Form:

$$\begin{aligned} & \{ (y - b) 2 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + (x - a) [b \cdot \sin (C - A) \\ & - b \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C + a \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C - \sin^3 C \\ & + \sin^2 A \cdot \sin C] \}^2 \\ & = (x - a)^2 \{ [-b \cdot \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - a \\ & \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2 - 4 b \cdot \sin (C - B) \\ & \cdot \sin C [a \cdot \sin (C - A) - a \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \\ & \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C] \} \end{aligned}$$

und drücken hier  $a$  durch  $b$  aus, so kommt mit Wegschaffung der Nenner:

$$\begin{aligned} & [(y - b) \cdot 2 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 \\ & + \{ x [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \\ & - \sin C (\sin A \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\ & + b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C \} \cdot \{ b [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 \\ & - b \cdot \sin^2 (C - B) \sin^2 C - \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) [\sin (C - A) \\ & - \sin (C - B) \cos C] + \sin (C - B) \cdot \sin C [\sin C (\sin A \\ & \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C)] \}^2 \\ & = \{ x [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \\ & - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) + b \cdot \sin (C - B) \sin C \}^2 \\ & \cdot \{ [-b \cdot \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - a \cdot \sin (C - B) \\ & \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2 - 4 b \cdot \sin (C - B) \\ & \cdot \sin C [a \cdot \sin (C - A) - a \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C \\ & - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C] \} \\ & = \{ x [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] - \sin C (\sin A \cdot \cos A \\ & - \sin C \cdot \cos C) + b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C \}^2 \\ & \cdot [ \{ b [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 - b \cdot \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C \\ & - \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \\ & + \sin (C - B) \cdot \sin C \cdot \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \}^2 \\ & - 4 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C [\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\ & - b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\ & \cdot [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 ] \end{aligned}$$

oder nach Auflösung der Klammern und Reduktion:

$$\begin{aligned}
 & (y - b)^2 [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cos C]^2 \cdot 4 b^2 \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C \\
 & \quad + 4 (y - b) \cdot b \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C \cdot \{ x [\sin(C - A) \\
 & \quad - \sin(C - B) \cdot \cos C] - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\
 & + b \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C \} \cdot \{ b \cdot [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 \\
 & \quad - b \cdot \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C - \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) [\sin(C - A) \\
 & \quad - \sin(C - B) \cos C] + \sin(C - B) \\
 & \quad \cdot \sin C \cdot \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cos C) \} \\
 & = 4 b^2 \cdot \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C \{ x [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] \\
 & \quad - \sin C \cdot (\sin A \cos A - \sin C \cos C) + b \cdot \sin(C - B) \sin C \}^2
 \end{aligned}$$

oder wenn man beide Seiten mit  $4 b \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C$  dividiert:

$$\begin{aligned}
 & (y - b)^2 [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 \cdot b \sin(C - B) \cdot \sin C \\
 & \quad + (y - b) \cdot \{ x [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cos C] \\
 & - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) + b \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C \} \\
 & \quad \cdot \{ b [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cos C]^2 - b \sin^2(C - B) \quad (2) \\
 & \quad \cdot \sin^2 C - \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) [\sin(C - A) \\
 & \quad - \sin(C - B) \cos C] + \sin(C - B) \\
 & \quad \cdot \sin^2 C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \} = \\
 & = b \cdot \sin(C - B) \sin C \{ x [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cos C] \\
 & - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) + b \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C \}^2
 \end{aligned}$$

Für die Glieder mit  $b^3$  hat man links:

$$\begin{aligned}
 & b^3 [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 \sin(C - B) \cdot \sin C \\
 & - b^3 [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C \\
 & \quad + b^3 \sin^3(C - B) \cdot \sin^3 C = b^3 \cdot \sin^3(C - B) \cdot \sin^3 C
 \end{aligned}$$

und rechts hat man ebenfalls  $b^3 \cdot \sin^3(C - B) \cdot \sin^3 C$ .

Die Glieder mit der 3. Potenz von  $b$  fallen also weg und es bleibt bloss eine quadratische Gleichung in  $b$ .

D. h. Bewegt sich der Punkt  $\mathfrak{Q}(a, b)$  auf der Geraden von Euler, so umhüllen die Tangenten durch  $\mathfrak{Q}$  an die durch ihn gehende zyklische Kurve einen Kegelschnitt und zwar muss es eine Parabel sein, deren Direktrix die Euler'sche Gerade ist, denn zwei zueinander senkrechte Tangenten schneiden sich in ihr.

Setzt man in der Gleichung (2)  $b = 0$ , so kommt:

$$y \left\{ x [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \right. \\ \left. - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \right\} \\ \cdot \left\{ \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \right. \\ \left. + \sin (C - B) \sin^2 C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cos C) \right\} = 0$$

also sind  $y = 0$  und  $x = \frac{\sin C (\sin A \cos A - \sin C \cos C)}{\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C}$  Tangenten

an die Parabel. Daraus schliesst man, dass auch die Seiten CA und AB Parabeltangente sind, denn die Wahl von BC zur x Achse war ja eine willkürliche. Unsere Parabel ist also mit der Kiepert'schen identisch und damit ist auch der zweite Teil des Satzes auf Seite 27 bewiesen.

Für die Tangentenrichtungen im Doppelpunkte  $\mathfrak{D}(a, b)$  der zyklischen Kurve hat man:

$$\left( \frac{y}{x} \right)_{1,2} = -b \cdot \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C \\ - a \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C \\ \pm \sqrt{[-b \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cos C - a \\ \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C]^2 \\ - 4 b \sin (C - B) \sin C [a \cdot \sin (C - A) - a \\ \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A \\ + \sin^2 C \cdot \cos C] : 2 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C}$$

Die Tangente c des Winkels dieser beiden Tangenten ist gleich

$$\left( \frac{y}{x} \right)_1 - \left( \frac{y}{x} \right)_2 : 1 + \left( \frac{y}{x} \right)_1 \cdot \left( \frac{y}{x} \right)_2 \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{[-b \sin (C - A) + b \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C \\ - a \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \sin^3 C - \sin^2 A \\ \cdot \sin C]^2 - 4 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C [a \cdot \sin (C - A) \\ - a \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - \sin A \sin C \cdot \cos A \\ + \sin^2 C \cdot \cos C] : 4 b \cdot \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C}$$

$$4 b^2 \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C + 4 b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C [a \cdot \sin (C - A) - a \cdot \sin (C - B) \cos C - \sin A \cdot \sin C \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C]$$

oder wenn man kürzt und den reduzierten Ausdruck  $= c$  setzt, den Bruch wegschafft und beide Seiten der erhaltenen Gleichung ins Quadrat erhebt:

$$\begin{aligned} & \{ b [-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C] - a \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C \\ & \quad + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C \}^2 \\ & - 4 b \cdot \sin (C - B) \sin C [a \cdot \sin (C - A) - a \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C \\ & \quad - \sin A \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C] \\ & = c^2 \{ b \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + a [\sin (C - A) - \sin (C - B) \\ & \quad \cdot \cos C] - \sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin^2 C \cdot \cos C \}^2 \end{aligned}$$

für  $c = \pm i$  kommt als Spezialfall dieser Kegelschnittschar:

$$\begin{aligned} & b^2 \{ [-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C \} \\ & + a^2 \{ \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C + [-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 \} \\ & - 2a \{ \sin (C - B) \cdot \sin^2 C (\sin^2 C - \sin^2 A) - [\sin (C - A) \\ & \quad - \sin (C - B) \cos C] \cdot \sin C [-\sin A \cos A + \sin C \cos C] \} \\ & - 2b \{ [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cos C] \cdot \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) \\ & \quad + \sin (C - B) \sin^2 C [-\sin A \cos A + \sin C \cdot \cos C] \} \\ & + \sin^2 C (\sin^2 C - \sin^2 A)^2 + \sin^2 C [-\sin A \cdot \cos A + \sin C \cdot \cos C]^2 = 0 \end{aligned}$$

oder wenn man beide Seiten der Gleichung durch

$$[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \sin^2 C$$

dividiert

$$\begin{aligned} & \left\{ b - \frac{[\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \cdot \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A)}{[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C} \right\}^2 \\ & + \left\{ a - \frac{\sin (C - B) \cdot \sin^2 C (-\sin^2 A + \sin^2 C) - [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C] \cdot \sin C (\sin C \cdot \cos C - \sin A \cdot \cos A)}{[-\sin (C - A) + \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C} \right\}^2 \\ & = 0; \text{ denn die Summe der Quadrate der 2. Glieder in den} \end{aligned}$$

Klammern ist ja:

$$\begin{aligned}
 & (\sin^2 C - \sin^2 A) \sin^2 C \{ [-\sin(C - A) + \sin(C - B) \cos C]^2 \\
 & \quad + \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C \} \\
 & + (\sin C \cdot \cos C - \sin A \cos A)^2 \cdot \sin^2 C \{ \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C \\
 & \quad + [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 \} \\
 & : [-\sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C \\
 & = (\sin^2 C - \sin^2 A) \cdot \sin^2 C + \sin^2 C (\sin C \cdot \cos C - \sin A \cdot \cos A)^2
 \end{aligned}$$

wie es sein soll.

Die erhaltene Kurvengleichung ist die eines Kreises vom Radius 0, d. h. die eines Punktes. Dieser Punkt ist nichts anderes als der Brennpunkt (F) der Kiepert'schen Parabel. Dies kann folgendermassen eingesehen werden. Setzt man im Ausdrucke für  $\frac{y}{x}$  die Quadratwurzel  $= 0$ , so erhält man die Gleichung einer Parabel und zwar der Kiepert'schen, denn aus ihrer Form folgt, dass die x-Achse und die dazu Senkrechte

$$a = \frac{\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C)}{\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C}$$

Tangenten dieser Parabel sind. Darum sind alle Dreieckseiten Tangenten, denn eine jede kann zur x-Achse gewählt werden. Nun macht auch die Euler'sche Gerade auf der x-Achse den Abschnitt

$$\frac{\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C)}{\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C}$$

darum ist sie die Direktrix der Parabel, welche mit der Kiepert'schen 3 Tangenten und die Direktrix gemein hat, also mit ihr identisch ist. (Wir haben hiebei als bekannt vorausgesetzt, dass die Direktrix einer jeden dem Dreieck ABC eingeschriebenen Parabel durch den Höhenpunkt dieses Dreiecks geht).

Die Berührungssehne zu den Tangenten  $b = 0$  und

$$a = \frac{\sin C [\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C]}{\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C}$$

hat nach der Parabelgleichung die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 -b \cdot [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] - a \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C \\
 + \sin^3 C - \sin^2 A \cdot \sin C = 0
 \end{aligned}$$

Man weiss, dass sie durch den Brennpunkt geht, ihre Gleichung wird durch die Koordinaten des erhaltenen Grenzkreises erfüllt, denn durch Substitution derselben bekommt man:

$$\begin{aligned}
 & - [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 \sin C \cdot (\sin^2 C - \sin^2 A) \\
 & - \sin (C - B) \cdot \sin^2 C (\sin C \cdot \cos C - \sin A \cdot \cos A)] \sin (C - A) \\
 & \quad - \sin (C - B) \cos C] \\
 & - \sin^2 (C - B) \cdot \sin^3 C (\sin^2 C - \sin^2 A) \\
 & + \sin (C - B) \sin^2 C (\sin C \cos C - \sin A \cos A) [\sin (C - A) \\
 & \quad - \sin (C - B) \cos C] \\
 & + \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) \{ [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cdot \cos C]^2 \\
 & \quad + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C \}
 \end{aligned}$$

wo der gemeinsame Nenner weggelassen ist oder:

$$\begin{aligned}
 & - \sin C \cdot (\sin^2 C - \sin^2 A) \{ [\sin (C - A) - \sin (C - B) \cos C]^2 \\
 & + \sin^2 C \cdot \sin^2 (C - B) \} + \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) \{ [\sin (C - A) \\
 & - \sin (C - B) \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C \} = 0
 \end{aligned}$$

Dieser Grenzkreis liegt, aus Gründen der Symmetrie, auf der Parabelachse und da er noch auf einer davon verschiedenen Geraden durch den Brennpunkt liegt, so muss er mit dem Brennpunkt zusammenfallen w. z. z. w. Wir haben also den Satz: Es gibt einen einzigen Punkt  $\mathfrak{D}$ , dessen Tangenten durch die imaginären Kreispunkte gehen und zwar ist es der Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel, welcher auch der allen zyklischen Kurven gemeinsame Brennpunkt ist.

## VII. Bestimmung der Asymptoten der behandelten zyklischen Kurve (allgemein).

Die allgemeine Gleichung derselben lautet: (s. pag. 29)

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + y^2 + 2 a x + 2 b y) [-2 x \cdot \sin (C - A) \\
 & \quad - 2 \sin (C - B) (\sin C \cdot y - \cos C x)] \\
 & - 4 \cdot \sin A \cdot \sin C (-x \cdot \cos A + y \cdot \sin A) x \\
 & + 4 \sin^2 C \cdot x (\sin C y - \cos C x) = 0
 \end{aligned}$$

Die Gleichung der reellen Asymptote hat die Form:

$$\begin{aligned}
 & 2 x [\cos C \cdot \sin (C - B) - \sin (C - A)] \\
 & - 2 y \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C + \lambda_3 = 0
 \end{aligned}$$

denn bekanntlich erhält man die Gleichungen der Asymptoten, indem man in der Kurvengleichung die Summe der Glieder höchsten Grades = Null setzt und dann diese Gleichung in die linearen Faktoren zerlegt; dann unterscheiden sich die Gleichungen der Asymptoten von diesen Faktoren nur durch eine Konstante. Für unsern Fall ist die eine Konstante  $\lambda_3$ , welche zu bestimmen ist; zunächst hat man:

$$2x [\cos C \cdot \sin (C - B) - \sin (C - A)] \\ - 2y \cdot \sin (C - B) \sin C = -\lambda_3$$

Darum wird die Kurvengleichung, wenn man noch  $y$  durch  $x$  und  $\lambda_3$  ausdrückt und den Nenner  $\sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C$  wegschafft:

$$-\lambda_3 x^2 \{ \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C + \sin^2 (C - B) \cdot \cos^2 C \\ + \sin^2 (C - A) - 2 \sin (C - A) \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C \} \\ - x^2 \cdot 4 \cdot \sin A \cdot \sin C \{ -\cos A \cdot \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C \\ + \sin A \cdot \sin (C - B) \cdot \sin C [\sin (C - B) \cdot \cos C - \sin (C - A)] \} \\ + 4 \sin^4 C \cdot \sin (C - B) [\cos C \cdot \sin (C - B) - \sin (C - A)] x^2 \\ - 4 \cdot \sin^4 C \cdot x^2 \cos C \cdot \sin^2 (C - B) + \text{Glieder mit } x + \text{bekannte} \\ \text{Glieder} = 0.$$

$\lambda_3$  ist nun so zu bestimmen, dass der eine sich hieraus ergebende Wert von  $x$  unendlich wird; dies ist der Fall, wenn der Koeffizient von  $x^2 = 0$  ist (dies lehrt sofort die Substitution  $x = \frac{1}{x'}$ ); hieraus folgt:

$$-\lambda_3 = 4 [\sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin (C - B) \{ -\cos A \sin (C - B) \cdot \sin C \\ + \sin A \cdot \sin (C - B) \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin (C - A) \} \\ + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A)] : N \quad \text{wo}$$

$$N = \sin^2 (C - B) + \sin^2 (C - A) \\ - 2 \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \cdot \cos C \quad \text{also:}$$

$$-\lambda_3 = [4 \sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin (C - B) \{ -\sin (C - B) \\ \cdot \sin (C - A) - \sin A \cdot \sin (C - A) \} \\ + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A)] : N \quad \text{oder}$$

$$-\lambda_3 = [4 \sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin (C - B) \sin (C - A) \\ \{ -\sin (C - B) - \sin A \} \\ + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A)] : N \quad \text{oder}$$



$$- \lambda_3 = 4 \cdot \sin A \cdot \sin^2 C \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \\ \cdot (-2 \cdot \sin C \cdot \cos B) + 4 \cdot \sin^4 C \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) : N$$

oder

$$= -4 \sin^3 C \sin (C - B) \\ \cdot \sin (C - A) [2 \sin A \cdot \cos B - \sin C] : N \\ = -4 \cdot \sin^3 C \cdot \sin (C - B) \\ \cdot \sin (C - A) [2 \sin A \cos B - \sin (A + B)] : N \\ = -4 \cdot \sin^3 C \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \sin (A - B) : N \\ - \lambda_3 = 4 \cdot \sin^3 C \cdot \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A) : N$$

Hiebei ist

$$N = \sin^2 (C - A) + \sin^2 (C - B) \\ - 2 \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \cdot \cos C \\ = \sin^2 C (\cos^2 A + \cos^2 B - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) \\ + \cos^2 C (\sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C) \\ - 2 \sin C \cdot \cos C (\sin A \cdot \cos A + \sin B \cdot \cos B \\ - \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \cos A \cdot \cos C) \\ = \sin^2 C (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \\ - \cos^2 C - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) \\ + \cos^2 C \cdot \sin^2 C - 2 \cdot \sin C \cdot \cos C (\sin A \cdot \cos A \\ + \sin B \cdot \cos B - \sin C \cdot \cos C)$$

Nun ist:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2} (3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \\ = \frac{1}{2} [3 - 2 \cos C \cdot \cos (A - B) + 2 \cos^2 C - 1] \\ = \frac{1}{2} [2 - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C] = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

darum wird:

$$N = \sin^2 C [1 - \cos^2 C - 4 \cdot \cos A \cos B \cdot \cos C] + \cos^2 C \cdot \sin^2 C \\ - 2 \cdot \sin C \cdot \cos C \left( \frac{\sin 2A + \sin 2B}{2} - \sin C \cdot \cos C \right) \\ = \sin^2 C [1 - \cos^2 C - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C] + \cos^2 C \cdot \sin^2 C \\ - 2 \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot [\sin C \cdot \cos (A - B) + \sin C \cdot \cos (A + B)] \\ = \sin^2 C (1 - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) \\ = \sin^2 C (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

Substituiert man diesen Wert N in den Ausdruck für  $\lambda_3$ , so kommt:



$$\frac{-\lambda_3 = 4 \cdot \sin C \cdot \sin(A - B) \cdot \sin(B - C) \cdot \sin(C - A)}{(1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)}$$

Nun ist die Gleichung der reellen Asymptote:

$$2x[\cos C \cdot \sin(C - B) - \sin(C - A)] - 2y \cdot \sin(C - B) \cdot \sin C + \lambda_3 = 0$$

Nach den Regeln der ebenen analytischen Geometrie ist daher der Abstand derselben vom 0 Punkt (O):

$$-\lambda_3 : 2 \sqrt{[\cos C \cdot \sin(C - B) - \sin(C - A)]^2 + \sin^2(C - B) \sin^2 C}$$

der Radikand ist:

$$\begin{aligned} & [\cos C \cdot \sin(C - B) - \sin(C - A)]^2 + \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C \\ &= \sin^2(C - B) + \sin^2(C - A) - 2 \cdot \sin(C - B) \cdot \sin(C - A) \cdot \cos C \\ &= \sin^2 C [1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C] \end{aligned}$$

wie schon gefunden.

Unter Berücksichtigung des Wertes von  $\lambda_3$  erhält man deshalb für den gesuchten Abstand:

$$\frac{2 \cdot \sin(A - B) \cdot \sin(B - C) \cdot \sin(C - A)}{\sqrt{(1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^3}}$$

und dies ist der Halbparameter der Kiepert'schen Parabel, das ist der Abstand ihres Brennpunktes von der Direktrix wie später gezeigt wird. Daraus ergibt sich die Konstruktion der reellen Asymptote: man verschiebe das  $\triangle ABC$  parallel sich selbst, bis C nach O fällt, in die Lage  $A'B'C'$ , zeichne den Brennpunkt der zum  $\triangle A'B'C'$  gehörigen Kiepert'schen Parabel (D), so schneidet die reelle Asymptote auf der Verlängerung von OD über O hinaus das Stück  $OD' = OD$  ab, aber da die Asymptote ausserdem zur Geraden von Euler parallel ist, so ist sie völlig bestimmt, denn durch D kann sie nicht gehen, sonst würde für den Fall, dass D Doppelpunkt der zyklischen Kurve ist, die reelle Asymptote mit derselben zwei im endlichen gelegene Punkte gemein haben, was unzulässig ist (s. Fig. 3).

Wie die reelle Asymptote, so bestimmt sich auch jede der imaginären Asymptoten. Die eine derselben habe die Gleichung  $y + ix + \lambda_1 = 0$ , wo  $\lambda_1$  eine noch zu bestimmende Konstante

ist; ersetzt man in der Kurvengleichung  $y + ix$  durch  $-\lambda_1$  und im Reste  $y$  durch  $-ix - \lambda_1$ , so kommt:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_1 (-2ix - \lambda_1) [-2 \cdot x \sin(C - A) + 2 \cdot \sin(C - B) \\
 & \quad \cdot \sin C \cdot i \cdot x + 2 \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C \cdot x] \\
 & + (2ax - 2bi x) [-2x \cdot \sin(C - A) + 2 \sin(C - B) \\
 & \quad \cdot \sin C \cdot i x + 2 \sin(C - B) \cdot \cos C \cdot x] \\
 & + 4 \sin A \cdot \sin C \cdot x^2 \cdot \cos A + 4 \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \sin A \cdot i \cdot x^2 \\
 & \quad - 4 \cdot \sin^3 C \cdot i \cdot x^2 - 4 \cdot \sin^2 C \cdot \cos C \cdot x^2 = 0 \quad \text{oder} \\
 & -\lambda_1 [i \cdot \sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C - i \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C] x^2 \\
 & = -(a - bi) [-\sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C \\
 & \quad \cdot i + \sin(C - B) \cdot \cos C] x^2 \\
 & \quad - (\sin A \cdot \sin C \cdot \cos A + \sin A \cdot \sin C \cdot \sin A \cdot i \\
 & \quad - \sin^3 C \cdot i - \sin^2 C \cdot \cos C) x^2 + \text{Glieder mit } x = 0;
 \end{aligned}$$

$\lambda_1$  muss so bestimmt werden, dass in dieser Gleichung die Glieder mit  $x^2$  wegfallen (dies lehrt die Substitution  $x = \frac{1}{x'}$  wo man nach der Substitution  $x' = 0$  zu setzen hat).

Hieraus ergibt sich zur Bestimmung von  $\lambda_1$  die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_1 [i \sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C - i \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C] = \\
 & = -(a i + b) [i \cdot \sin(C - A) + \sin(C - B) \\
 & \quad \cdot \sin C - i \cdot \sin(C - B) \cdot \cos C] \\
 & \quad - \sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\
 & \quad - i \sin C (\sin^2 A - \sin^2 C) = 0, \quad \text{oder:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 = +b + ai + \\
 & \frac{\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) + i \cdot \sin C (\sin^2 A - \sin^2 C)}{i \cdot \sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \sin C - i \sin(C - B) \cdot \cos C}
 \end{aligned}$$

oder indem man Zähler und Nenner des Bruches mit

$$\sin(C - B) \cdot \sin C - i \sin(C - A) + i \sin(C - B) \cdot \cos C$$

multipliziert:

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 = +b + ai + [\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) \\
 & \quad + i \sin C \cdot (\sin^2 A - \sin^2 C)] \cdot \\
 & \frac{[\sin(C - B) \cdot \sin C - i \sin(C - A) + i \sin(C - B) \cdot \cos C]}{\sin^2(C - B) + \sin^2(C - A) - 2 \cdot \sin(C - B) \cdot \sin(C - A) \cdot \cos C}
 \end{aligned}$$

Für die zweite imaginäre Asymptote  $y - ix + \lambda_2 = 0$  erhält man analog:

$$\lambda_2 = +b - ai + [\sin C (\sin A \cdot \cos A - \sin C \cdot \cos C) - i \sin C (\sin^2 A - \sin^2 C)] \cdot \frac{[\sin (C - B) \cdot \sin C + i \sin (C - A) - i \sin (C - B) \cdot \cos C]}{\sin^2 (C - B) + \sin^2 (C - A) - 2 \cdot \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \cdot \cos C}$$

hieraus  $\lambda_1 + \lambda_2 = +2b + [2 \sin^2 C \cdot \sin A \cdot \cos A \sin (C - B) - 2 \sin^3 C \cdot \cos C \cdot \sin (C - B) + 2 \sin^2 A \cdot \sin C \cdot \sin (C - A) - 2 \sin^2 A \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \sin (B - C) - 2 \sin^3 C \cdot \sin (C - A) + 2 \sin^3 C \cdot \cos C \cdot \sin (C - B)] : N$ , wo

$$N = \sin^2 (C - B) + \sin^2 (C - A) - 2 \sin (C - B) \cdot \sin (C - A) \cdot \cos C$$

oder  $\lambda_1 + \lambda_2 = +2b + [\sin 2A \cdot \sin C (\cos A \cdot \sin C - \sin A \cdot \cos C) \cdot \sin (C - B) + 2 \sin C \cdot \sin (C - A) (\sin^2 A - \sin^2 C)] : N$  oder

$$= +2b + [2 \sin C \cdot \sin (C - A) \cdot \sin A \cdot \sin (C - B) + 2 \sin C \cdot \sin (C - A) \cdot \sin B \sin (A - C)] : N$$

$$= +2b + 2 \sin C \cdot \sin (C - A) \frac{[\sin A \sin (C - B) - \sin B \cdot \sin (C - A)]}{N}$$

$$= +2b + \sin C \cdot \sin (C - A) \cdot \frac{(\cos 2B - \cos 2C - \cos 2A + \cos 2C)}{N}$$

$$= +2b + \frac{2 \sin^2 C \cdot \sin (C - A) \cdot \sin (A - B)}{N}$$

Wie schon gefunden, ist

$$N = \sin^2 C (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) \quad \text{also:}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = +2b + \frac{2 \sin (C - A) \cdot \sin (A - B)}{1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

und dies ist die negative doppelte Ordinate des Schnittpunktes der imaginären Asymptoten  $y + ix + \lambda_1 = 0$  und  $y - ix + \lambda_2 = 0$ . Seine positive Ordinate wird also:

$$-b + \frac{\sin (C - A) \cdot \sin (B - A)}{1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

und sein Abstand von der Seite B C (s. Fig. 3):

$$\sin(C - A) \cdot \sin(B - A) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

Aus Gründen der Analogie sind seine Abstände von den Seiten C A und A B:

$$\begin{aligned} \sin(A - B) \cdot \sin(C - B) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) \text{ bzw.} \\ \sin(B - C) \cdot \sin(A - C) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) \end{aligned}$$

Dies sind die Abstände des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von den Seiten des Grunddreiecks A B C, wie nachher gezeigt wird. Unsere zyklischen Kurven 3. Ordnung haben also gemeinsame imaginäre Asymptoten, welche durch die imaginären Kreispunkte und durch den Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel gehen. Der Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel ist also auch ein gemeinsamer Brennpunkt dieser zyklischen Kurven.

### VIII. Die Abstände des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von den Seiten des Grunddreiecks ABC.

Der Abstand dieses Brennpunktes von der Seite BC ist nach Seite 35:

$$d = \frac{[\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] \cdot \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) + \sin(C - B) \cdot \sin^2 C (\sin C \cdot \cos C - \sin A \cdot \cos A)}{[-\sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2(C - B) \cdot \sin^2 C}$$

Der Nenner ist wie bereits gefunden

$$= \sin^2 C (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

Der Zähler kann in die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} & [\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] \cdot \sin C \cdot \sin B \cdot \sin(C - A) \\ & \quad - \sin(C - B) \cdot \sin^2 C \cdot \cos B \sin(C - A) \\ = & -\sin(C - B) \cdot \sin(C - A) \cdot \sin C \cdot \sin A + \sin^2(C - A) \sin C \cdot \sin B \\ = & \sin(C - A) \cdot \sin C [\sin(C - A) \cdot \sin B - (C - B) \cdot \sin A] \\ = & \sin(C - A) \cdot \sin C \cdot \frac{1}{2} (\cos 2 A - \cos 2 C + \cos 2 C - \cos 2 B) \\ = & \sin(C - A) \cdot \sin^2 C \cdot \sin(B - A) \end{aligned}$$

Darum ist der Abstand des Brennpunktes von der Seite BC:

$$\underline{\sin(A - C) \cdot \sin(A - B) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)}$$

Die Abstände von den Seiten CA und AB werden analog sein:

$$\frac{\sin(B - A) \cdot \sin(B - C) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)}{\text{bezw.}}$$

bezw.

$$\frac{\sin(C - B) : \sin(C - A) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)}$$

### IX. Der Abstand des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von der Euler'schen Geraden oder der Halbparameter der Kiepert'schen Parabel.

Derselbe ist offenbar gleich dem doppelten Seitenabstand

$$\sin(A - C) \cdot \sin(A - B) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

multipliziert mit dem Cosinus des Winkels, den die Euler'sche Gerade mit der x-Achse bildet. Die Tangente dieses Winkels ist (s. pag. 30):

$$\frac{\sin(C - B) \cdot \cos C - \sin(C - A)}{\sin C \cdot \sin(C - B)}$$

somit sein Cosinus

$$1 : \sqrt{1 + \frac{[\sin(C - B) \cdot \cos C - \sin(C - A)]^2}{\sin^2 C \cdot \sin^2(C - B)}} \quad \text{oder}$$

$$= \sin C \cdot (C - B) :$$

$$\sqrt{\sin^2 C \cdot \sin^2(C - B) + [\sin(C - B) \cdot \cos C - \sin(C - A)]^2}$$

$$= \sin(C - B) \cdot \sin C :$$

$$\sqrt{\sin^2(C - B) + \sin^2(C - A) - 2 \cdot \sin(C - B) \cdot \sin(C - A) \cdot \cos C}$$

$$= \sin(C - B) : \sqrt{1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

somit ist der gesuchte Halbparameter:

$$p = 2 \cdot \sin(A - B) \cdot \sin(B - C) \cdot \sin(C - A) :$$

$$\sqrt{(1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^3}$$

### X. Untersuchung einer an der Kiepert'schen Parabel erhaltenen Kegelschnittschar.

Die Form der Gleichung für die auf Seite 35 erhaltene Kegelschnittschar sagt unmittelbar aus, dass alle Kurven der Schar durch die Schnittpunkte der Euler'schen Geraden mit der

Kiepert'schen Parabel hindurch gehen und in denselben die Kiepert'sche Parabel berühren. Wir haben hier also ein System von sich doppelt berührenden Kegelschnitten. Die Kiepert'sche Parabel gehört selbst zu diesem System und ebenso ihre Direktrix ( $c = 0$ , resp.  $c = \infty$ ).

Wählt man die Achse der Kiepert'schen Parabel zur x-Achse und ihre Scheiteltangente als y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet die Parabelgleichung:

$y^2 - 2 p x = 0$  ( $p$  = Halbparameter) und die der Euler'schen

Geraden:  $x = -\frac{p}{2}$ , somit die der Kegelschnittschar:

$$y^2 - 2 p x = c^2 \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - p x (2 + c^2) - \frac{c^2 \cdot p^2}{4} = 0 \quad (1)$$

Für  $c^2 = -1$  kommt:

$$y^2 + x^2 - p x + \frac{p^2}{4} = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 + \left( x - \frac{p}{2} \right)^2 = 0$$

d. i. die Gleichung eines unendlich kleinen Kreises im Brennpunkt.

Die x-Koordinate des Mittelpunktes eines durch Gleichung (1) gegebenen Kegelschnittes sei  $\alpha$ , so lautet seine Gleichung bezüglich eines parallelen Koordinatensystems durch denselben:

$$y^2 - c^2 (x + \alpha)^2 - p (x + \alpha) (2 + c^2) - \frac{c^2 \cdot p^2}{4} = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c x^2 - x [2 \alpha c^2 + p (2 + c^2)] - p \left[ (2 + c^2) \alpha + \frac{c^2 \cdot p}{4} \right] - c^2 \alpha^2 = 0$$

Da nun der Koordinatenanfang im Mittelpunkt des Kegelschnittes liegt, so muss das Glied mit  $x$  wegfallen

d. h.

$$\alpha = - \frac{p (2 + c^2)}{2 c^2}$$

und die Kurvengleichung ist:

$$y^2 - c^2 x^2 - p \left[ (2 + c^2)(-p) \frac{(2 + c^2)}{2 c^2} + \frac{c^2 \cdot p}{4} \right] - p^2 \frac{(2 + c^2)^2}{4 c^2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - p \left[ -p \frac{(2 + c^2)^2}{2 c^2} + \frac{c^2 \cdot p}{4} \right] - p^2 \frac{(2 + c^2)^2}{4 c^2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - \frac{p^2}{4 c^2} [-2(2 + c^2)^2 + c^4 + (2 + c^2)^2] = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - \frac{p^2}{4 c^2} [-4 - 4 c^2] = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 + \frac{p^2(1 + c^2)}{c^2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$c^2 x^2 - y^2 - \frac{p^2(1 + c^2)}{c^2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{x^2}{\frac{p^2(1 + c^2)}{c^4}} - \frac{y^2}{\frac{p^2(1 + c^2)}{c^2}} - 1 = 0$$

Die eine Achse des Kegelschnitts ist gleich:

$$\frac{2 p \sqrt{1 + c^2}}{c^2}$$

die andere ist gleich:

$$\frac{i \cdot 2 p \cdot \sqrt{1 + c^2}}{c}$$

Setzt man  $c = \operatorname{tg} \varphi$ , so kommt:

$$\frac{2 p}{\cos \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi} \text{ u. } \frac{2 p i}{\sin \varphi}$$

für die beiden Achsen des Kegelschnitts, das Achsenverhältnis ist also:

$$\frac{\sin \varphi}{i} : \cos \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = \cotg \varphi : i$$

d. h. für einen reellen Winkel  $\varphi$  ist die eine Achse imaginär.

Die Gleichung der Asymptoten ist:

$$\pm y + c \left[ x + \frac{p(2 + c^2)}{2c^2} \right] = 0$$

(Anfangspunkt des Koordinatensystems ist der Parabelscheitel)  
oder

$$\pm y + cx + \frac{p}{c} + \frac{cp}{2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\pm cy + c^2x + p + \frac{c^2p}{2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$c^2 \left( x + \frac{p}{2} \right) \pm cy + p = 0$$

2 reelle Asymptoten haben wir, wenn  $c$  reell ist; dies ist der Fall, wenn die Kiepert'sche Parabel dem Punkte  $\mathfrak{Q}$  die konvexe Seite zukehrt, wovon man sich leicht überzeugt. Für  $c = 0$  reduziert sich die Asymptotengleichung auf  $p = 0$ , d. i. die unendlich ferne Gerade. Der Kegelschnitt ist die Kiepert'sche Parabel selbst.

$c = \infty$  ergibt als Grenzfall die Euler'sche Gerade  $x = -\frac{p}{2}$ . Die

Hyperbeln der Kegelschnittschar verlaufen also zwischen der Euler'schen Geraden und der Kiepert'schen Parabel in einen Zweige. (Fig. 4). Die Grenzen für den andern Zweig sind die unendlich ferne Gerade und die Euler'sche Gerade. Ist  $c$  rein imaginär, so haben wir Ellipsen, die Grenzfälle sind die Kiepert'sche Parabel ( $c = 0$ ) und ihr Brennpunkt ( $c = \pm i$ ). (Fig. 5). Hat  $c$  die Form  $A + Bi$ , so haben wir imaginäre Kegelschnitte mit imaginären Asymptoten.

Für die Asymptoten:

$$c^2 \left( x + \frac{p}{2} \right) \pm cy + p = 0$$

bestimmen wir die Enveloppe in bekannter Weise. Wir differenzieren die Gleichung nach  $c$  und erhalten:

$$c(2x + p) \pm y = 0 \quad \text{oder} \quad c = \mp y : 2x + p$$

Trägt man diesen Wert für  $c$  in die Asymptotengleichung ein, so kommt mit Wegschaffung des Nenners:



$$\frac{1}{2} y^2 - y^2 + p(2x + p) = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - 4p \left( x + \frac{p}{2} \right) = 0$$

als Gleichung der Enveloppe. Sie ist also eine mit der Kiepert'schen Parabel  $y^2 - 2px = 0$  konfokale und koaxiale Parabel von doppelt so grossem Parameter (s. Fig. 5).

Die Figuren 6, 7 und 8 sind Spezialfälle unserer zyklischen Kurven, 6 und 7 sind solche mit Spitzen (auf der Kiepert'schen Parabel liegend), Fig. 8 ist eine solche mit einem isolierten Punkt.

### XI. Die Zylinderfokale als Spezialfall der behandelten zyklischen Kurven dritten Grades.

Unsere zyklische Kurve hat am rechtwinkligen Dreieck die Gleichung (nach pag. 29, wenn B mit C vertauscht und  $C = 90^\circ$  gesetzt wird)

$$(x^2 + y^2 + 2ax + 2by)(\sin A \cdot y - \sin B \cdot x) + 2xy(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Wir wollen nun das Koordinatensystem um den Anfangspunkt  $\mathcal{O}$  um den Winkel  $\varphi$  drehen, seien  $x'$  und  $y'$  die Koordinaten des laufenden Punktes im neuen gedrehten Koordinatensystem, so gelten bekanntlich die Transformationsformeln:

$$x = x' \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi; \quad y = x' \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi$$

die Kurvengleichung geht somit über in:

$$\begin{aligned} & [x^2 + y^2 + 2x(a \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi) \\ & \quad + 2y(-a \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi)] \cdot \\ & \quad \cdot [y(\sin A \cdot \cos \varphi + \sin B \cdot \sin \varphi) \\ & \quad + x(\sin A \cdot \sin \varphi - \sin B \cdot \cos \varphi)] \\ & \quad + 2(x^2 - y^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ & + x \cdot y (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0, \end{aligned}$$

wenn statt  $x'$  und  $y'$ ,  $x$  und  $y$  gesetzt wird, oder:

$$\begin{aligned} & [x^2 + y^2 + 2x(a \cdot \cos \varphi + b \sin \varphi) \\ & \quad + 2y(-a \cdot \sin \varphi + b \cos \varphi)] \\ & \quad \cdot [y \cdot \sin(A + \varphi) - x \cdot \cos(A + \varphi)] \\ & \quad + 2[(x^2 - y^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ & + x \cdot y (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0 \end{aligned}$$

Setzt man  $\varphi = -A$ , so geht diese Gleichung über in:

$$\begin{aligned} & [x^2 + y^2 + 2x(a \cdot \cos A - b \cdot \sin A) \\ & + 2y(a \cdot \sin A + b \cdot \cos A)] \cdot (-x) \\ & - 2(x^2 - y^2) \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) \\ & + 2xy \cdot (\sin^2 B - \sin^2 A)^2 = 0 \end{aligned}$$

Setzt man weiter:

$$(a) \quad -(a \cdot \sin A + b \cdot \cos A) + (\sin^2 B - \sin^2 A)^2 = 0,$$

so lautet die Gleichung der Kurve:

$$(b) \quad -[x^2 + y^2 + 2x(a \cdot \cos A - b \cdot \sin A)]x - 2(x^2 + y^2) \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0,$$

wo  $a$  und  $b$  durch Gleichung (a) zusammenhängen. Nun erfüllen die Koordinaten des Brennpunktes  $(-\sin A \cdot \cos 2A, \cos A \cdot \cos 2A$  s. Fig. 3) die Gleichung (a). Die durch sie bestimmte Gerade ist ausserdem zur Euler'schen Geraden senkrecht d. h. sie ist die Achse der Kiepert'schen Parabel, welche zum Dreieck  $ABC$  gehört. Die Gleichung (b) bleibt unverändert wenn  $-y$  für  $y$  gesetzt wird, d. h., gehört der Punkt  $\mathfrak{D}(a, b)$  der Achse der Kiepert'schen Parabel an, so ist die zugehörige zyklische Kurve in Bezug auf diese Achse symmetrisch.

Transformieren wir nun auch die Koordinaten  $a$  und  $b$  von  $\mathfrak{D}$ ,  $a'$   $b'$  seien seine Koordinaten nach der Drehung, so gilt:

$$a = a' \cos A + b' \cdot \sin A; \quad b = -a' \sin A + b' \cos A$$

und darum wird die Gleichung (b) zu:

$$\begin{aligned} ((b)) \quad & (x^2 + y^2 + 2x a')x + 2(x^2 - y^2) \\ & \cdot \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0 \end{aligned}$$

Die Bedingung (a) lautet nunmehr:

$$b' = (\sin^2 B - \sin^2 A)^2$$

ist  $a' = 0$ , so ist der Punkt  $\mathfrak{D}$  der Schnittpunkt der Parabelachse mit der Direktrix und die zugehörige zyklische Kurve hat die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)x + 2(x^2 - y^2) \cdot \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

$$\text{oder} \quad (x^2 + y^2)x + 2(x^2 - y^2) \cdot \sin A \cdot \cos A \cos 2A = 0 \quad \text{oder}$$

$$\underline{2(x^2 + y^2)x + (x^2 - y^2) \cdot \sin 4A = 0}$$

Dies ist die Gleichung der Zylinderfokalen (Fig. 9). Diese Kurve ist von Herrn Prof. Huber in seiner Vorlesung über die: «Theorie der höhern ebenen Kurven» ziemlich ausführlich behandelt worden. Zu den dort angegebenen Erzeugungsarten können wir eine neue hinzufügen, nämlich diejenige, welche mit der Kiepert'schen Parabel zusammenhängt. Die Zylinderfokale schneidet die Parabelachse ausser in dem Punkte 0, 0 noch in dem Punkte  $x = \frac{\sin 4 A}{2}$ , 0, und dies ist der Brennpunkt der Parabel, denn aus dem Ausdruck für ihren Halbparameter

$$p = 2 \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A) \\ : \sqrt{(1 - 8 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^3}$$

folgt für  $C = 90^\circ$ ;  $p = -2 \sin (A - B) \cdot \cos B \cdot \cos A$   
 $= -2 \sin (A - 90 + A) \cdot \cos B \cdot \cos A$   
 $= 2 \cos 2 A \cdot \sin A \cdot \sin B = \frac{\sin 4 A}{2}.$

## XII. Die Cissoide als Spezialfall der behandelten zyklischen Kurven.

Wir nehmen die Gleichung ((b)) Seite 49 vor:

$$((b)) \quad (x^2 + y^2 + 2x \cdot a')x + 2(x^2 - y^2) \\ \cdot \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Anfangspunkt des Koordinatensystems ist der Punkt  $\mathcal{O}$  beliebig auf der Parabelachse liegend + x Achse ist die der Parabel (Richtung Brennpunkt  $\Rightarrow$  Direktrix) + y Achse die Parallele zur Direktrix durch  $\mathcal{O}$  (Richtung Höhenpunkt  $\Rightarrow$  Umkreismittelpunkt).  $a'$  ist die Abszisse von  $\mathcal{O}$  in Bezug auf ein paralleles Koordinatensystem durch den Scheitel des rechten Winkels. Ist

$$a' = -\sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A)$$

so lautet die Gleichung ((b)):

$$(x^2 + y^2)x - 2y^2 \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Diese Kurve hat in  $\mathcal{O}$  eine Spitze, welche nach früherem auf der Parabel liegt; (in der Tat ist  $a' = -\frac{\sin 4 A}{4} = -\frac{p}{2}$ ). Sie ist die Cissoide des Diokles (Fig. 10).

### XIII. Die Wendepunkte der behandelten symmetrischen zyklischen Kurven.

Ihre Gleichungen sind in der Form enthalten:

$$(x^2 + y^2 + 2ax)x + 2B(x^2 - y^2) = 0 \quad \text{oder}$$

in homogener Gestalt:

$$x^3 + xy^2 + 2x^2(a+B)z - 2B \cdot y^2 \cdot z = 0$$

Darum ist nach der üblichen Bezeichnung:

$$\begin{aligned} f_1 &= 3x^2 + y^2 + 4x(a+B)z \\ f_2 &= 2y \cdot x - 4B \cdot y \cdot z; \quad f_3 = 2x^2(a+B) - 2B \cdot y^2 \\ f_{1,1} &= 6x + 4(a+B)z; \quad f_{1,2} = 2y; \quad f_{1,3} = 4x(a+B) \\ f_{2,1} &= 2y; \quad f_{2,2} = 2x - 4B \cdot z; \quad f_{2,3} = -4By \\ f_{3,1} &= 4x(a+B); \quad f_{3,2} = -4B \cdot y; \quad f_{3,3} = 0 \end{aligned}$$

Bekanntlich ist die Gleichung der Hessiane:

$$\begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benutzung obiger Werte für die f:

$$\begin{vmatrix} 6x + 4(a+B)z, & 2y, & 4x(a+B) \\ 2y, & 2x - 4B \cdot z & -4B \cdot y \\ 4(a+B)x, & -4B \cdot y, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} & - [6x + 4(a+B)z] \cdot 16 \cdot B^2 \cdot y^2 - 32 \cdot x \cdot y^2 \cdot B \cdot (a+B) \\ & - 32x \cdot y^2 \cdot B \cdot (a+B) - 32(a+B)^2 \cdot x^2 \cdot (x - 2B \cdot z) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & [3x + 2(a+B)z] B^2 \cdot y^2 + 2x \cdot y^2 \cdot B(a+B) + (a+B)^2 \\ & \cdot x^2 (x - 2B \cdot z) = 0 \end{aligned} \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} & x^3 (a+B)^2 + x \cdot y^2 [3B^2 + 2(a+B)B] - 2x^2 \cdot z \cdot B(a+B)^2 \\ & + 2y^2 \cdot z \cdot B^2 (a+B) = 0 \end{aligned} \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} & x^3 (a+B)^2 + xy^2 [3B^2 + 2(a+B)B] - B(a+B) [2x^2(a+B) \\ & - 2y^2 \cdot B] \cdot z = 0 \end{aligned}$$

oder in Verbindung mit der Gleichung der Kurve Seite 51:

$$x^3 [B(a + B) + (a + B)^2] + y^2 \cdot x [B(a + B) + 3B^2 + 2(a + B)B] = 0 \quad \text{woraus:}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{2B^2 + 3a \cdot B + a^2}{6B^2 + 3aB}, \text{ oder } \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{2B^2 + 3aB + a^2}{3B(2B + a)}$$

Substituiert man den sich hieraus ergebenden Wert für  $y^2$  in die Kurvengleichung ((b)), so erhält man eine Gleichung 3. Grades in  $x$ . Die zugehörigen Ordinaten folgen aus dem Werte für  $\frac{y}{x}$ .

Sollen speziell die beiden symmetrisch zur  $x$ -Achse liegenden Wendepunkte in die imaginären Kreispunkte hineinfallen, so muss sein:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{1}{3B} \cdot \frac{2B^2 + 3aB + a^2}{2B + a} = -1$$

woraus folgt:

$$3B(2B + a) - 2B^2 - 3aB - a^2 = 0 \quad \text{oder} \\ 4B^2 = a^2, \text{ also } a = \pm 2B$$

für  $a = 2B$  heisst die Gleichung der Kurve:

$$\underline{(x^2 + y^2)x + 2B(2x^2 - y^2) = 0} \text{ und für } a = -2B \\ (x^2 + y^2)x - 2B(x^2 + y^2) = 0 \text{ oder } x^2 + y^2 = 0 \text{ und } x = 2B$$

In letzterem Falle zerfällt also die Kurve in die Direktrix der Kiepert'schen Parabel und in ihren Brennpunkt, denn  $2B$  bedeutet ihren Halbparameter.

#### Berichtigung:

Seite 13, Zeile 6, lies  $\sin(C - B)$  statt  $(C - B)$ .

» 18, am Fusse, lies  $\sin(C - B)$  statt  $(C - B)$ .

» 27, Zeile 6, lies Tétraedre statt Tetraedre.

» Seite 30, drittletzte Zeile, lies Seite **27** statt 28.



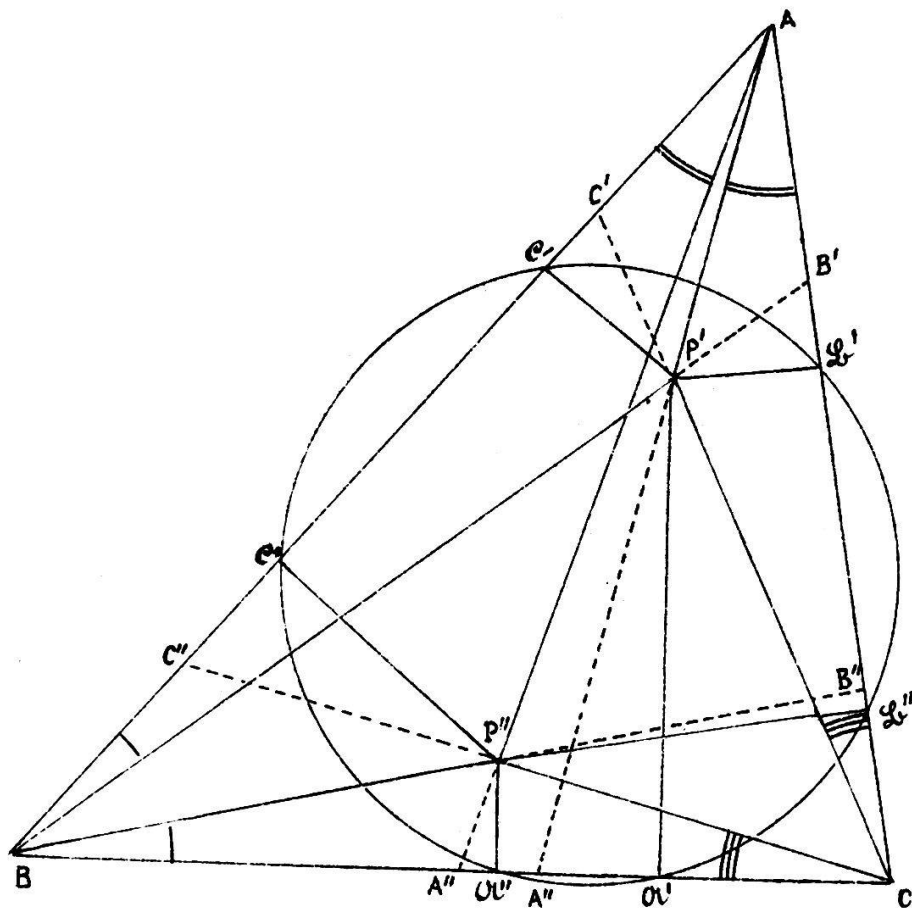


Fig. 1

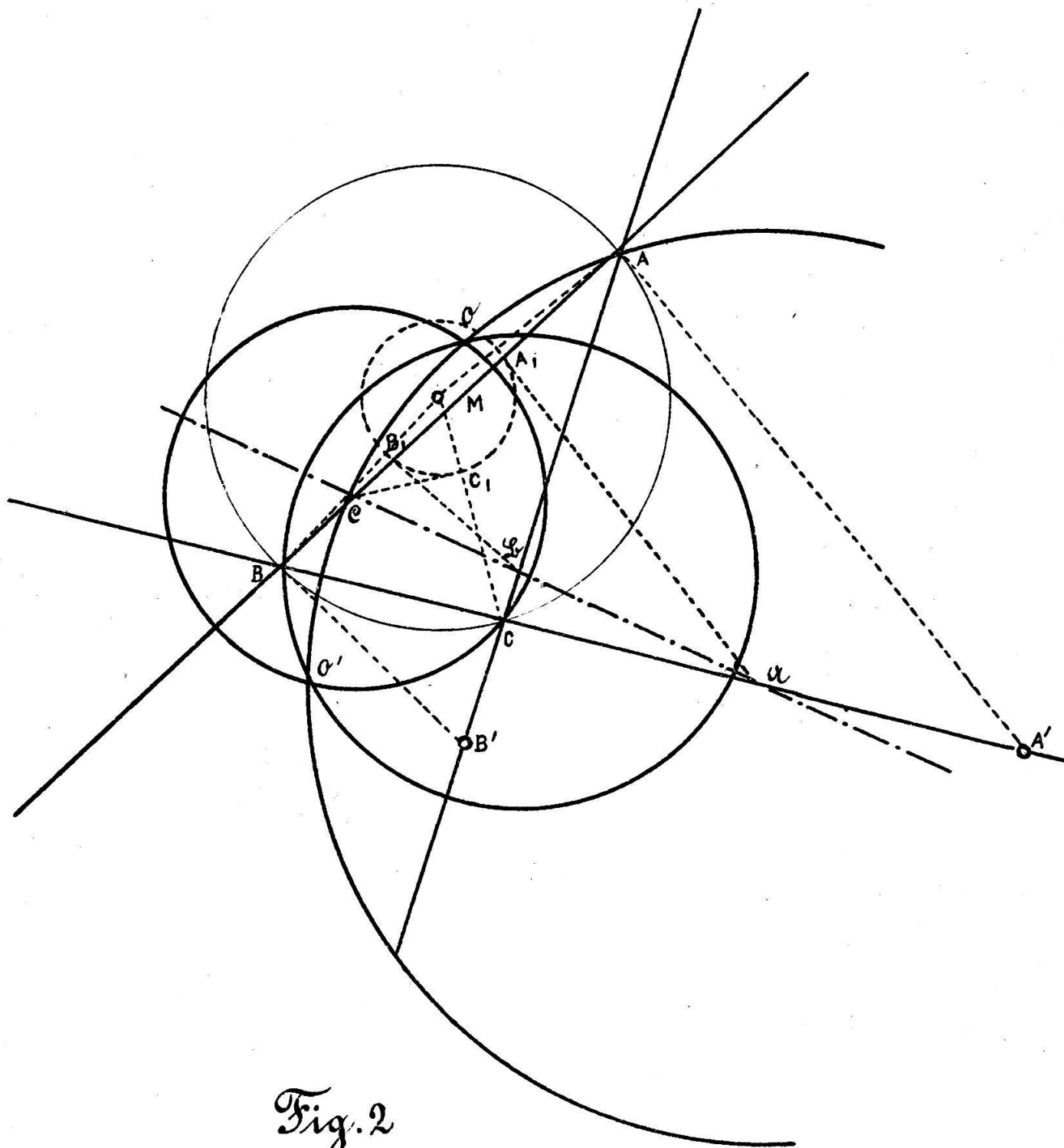


Fig. 2

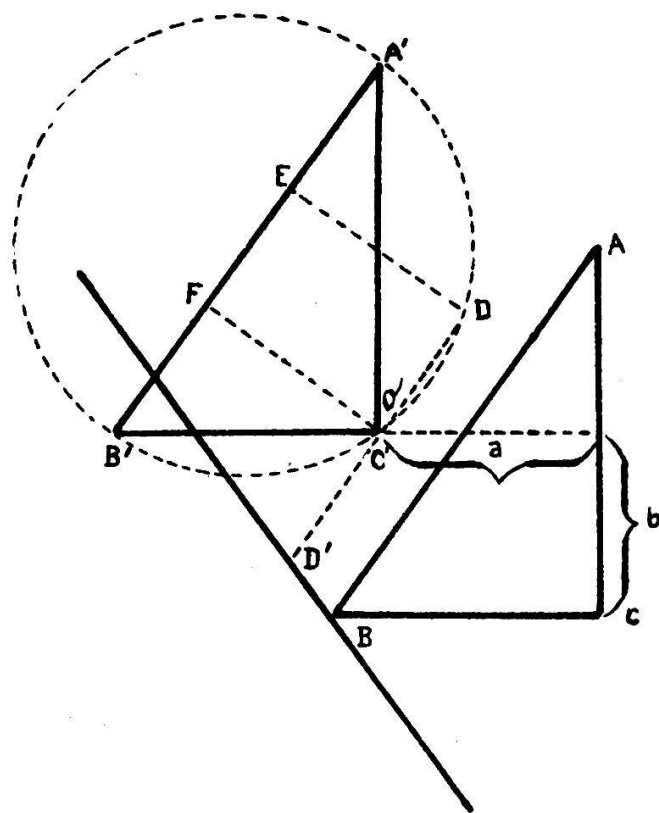
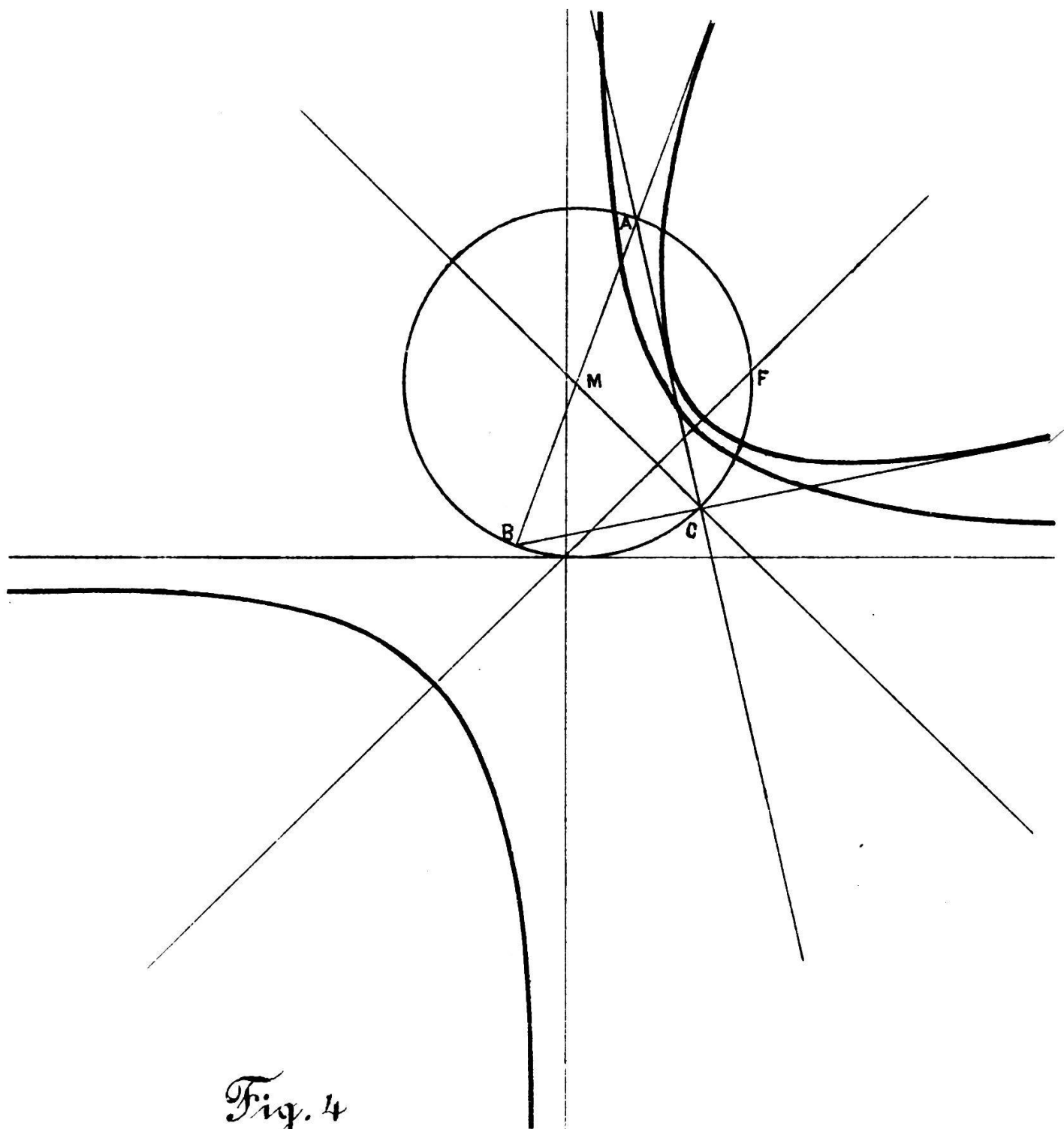
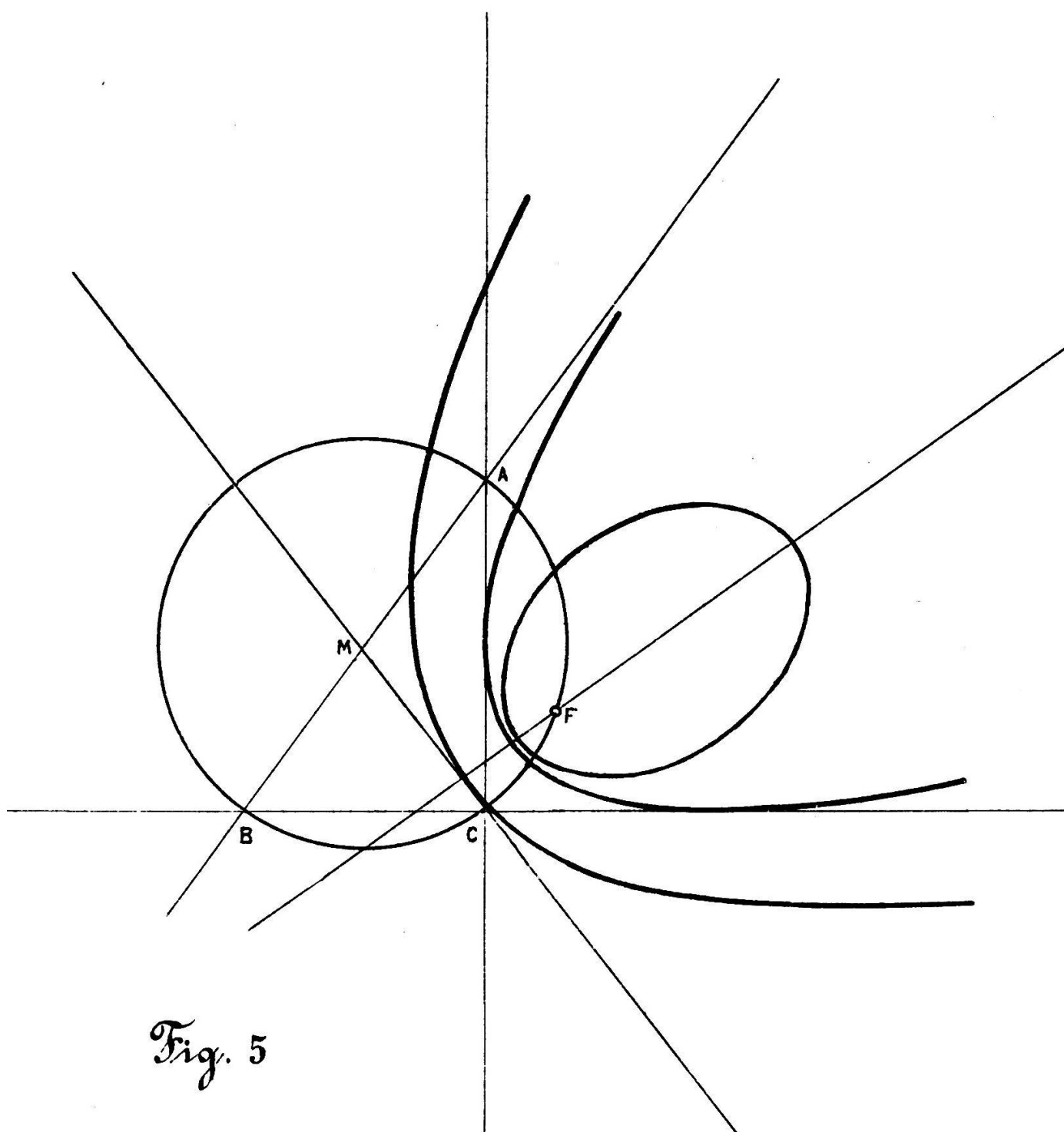


Fig. 3







*Fig. 5*

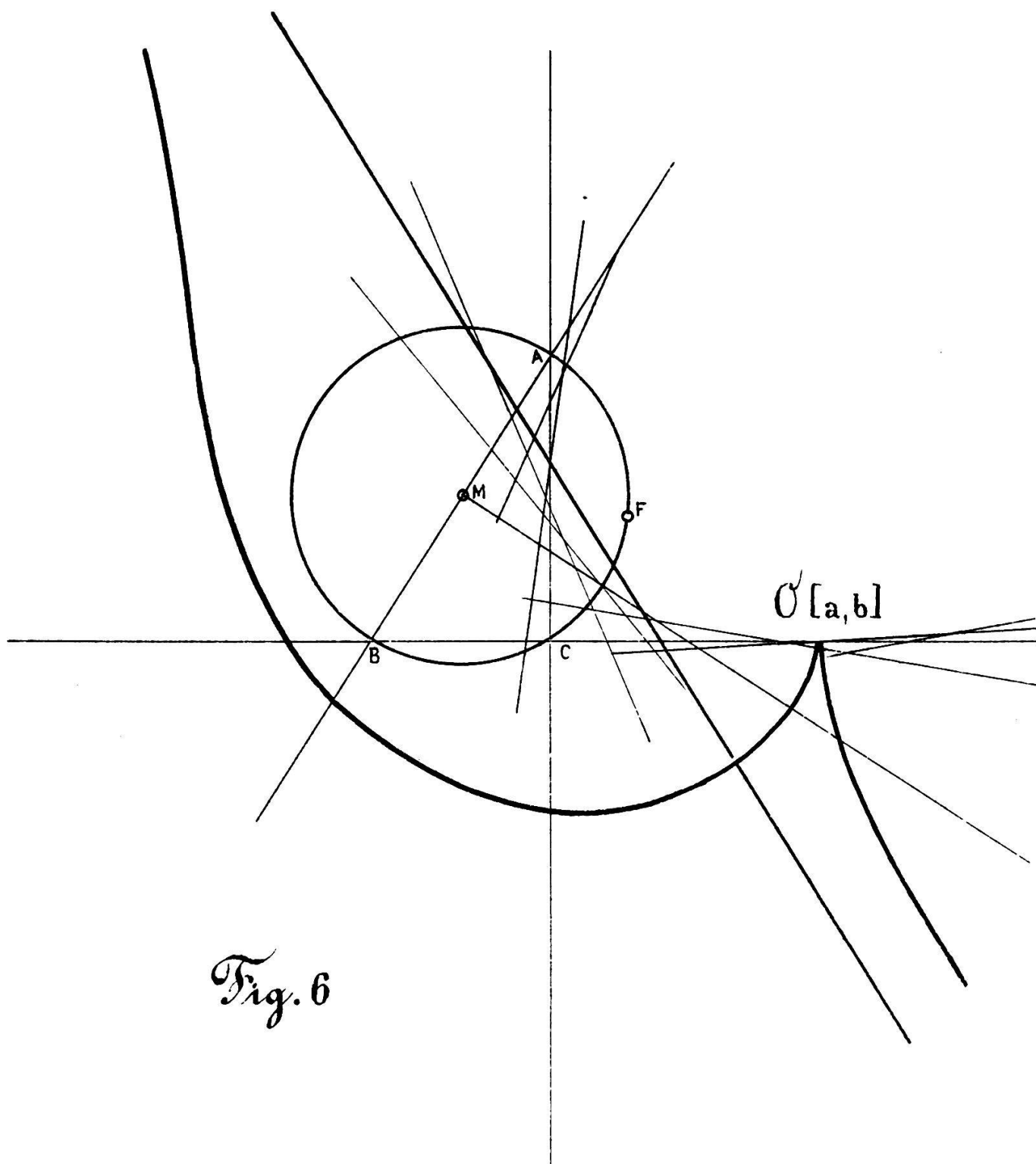
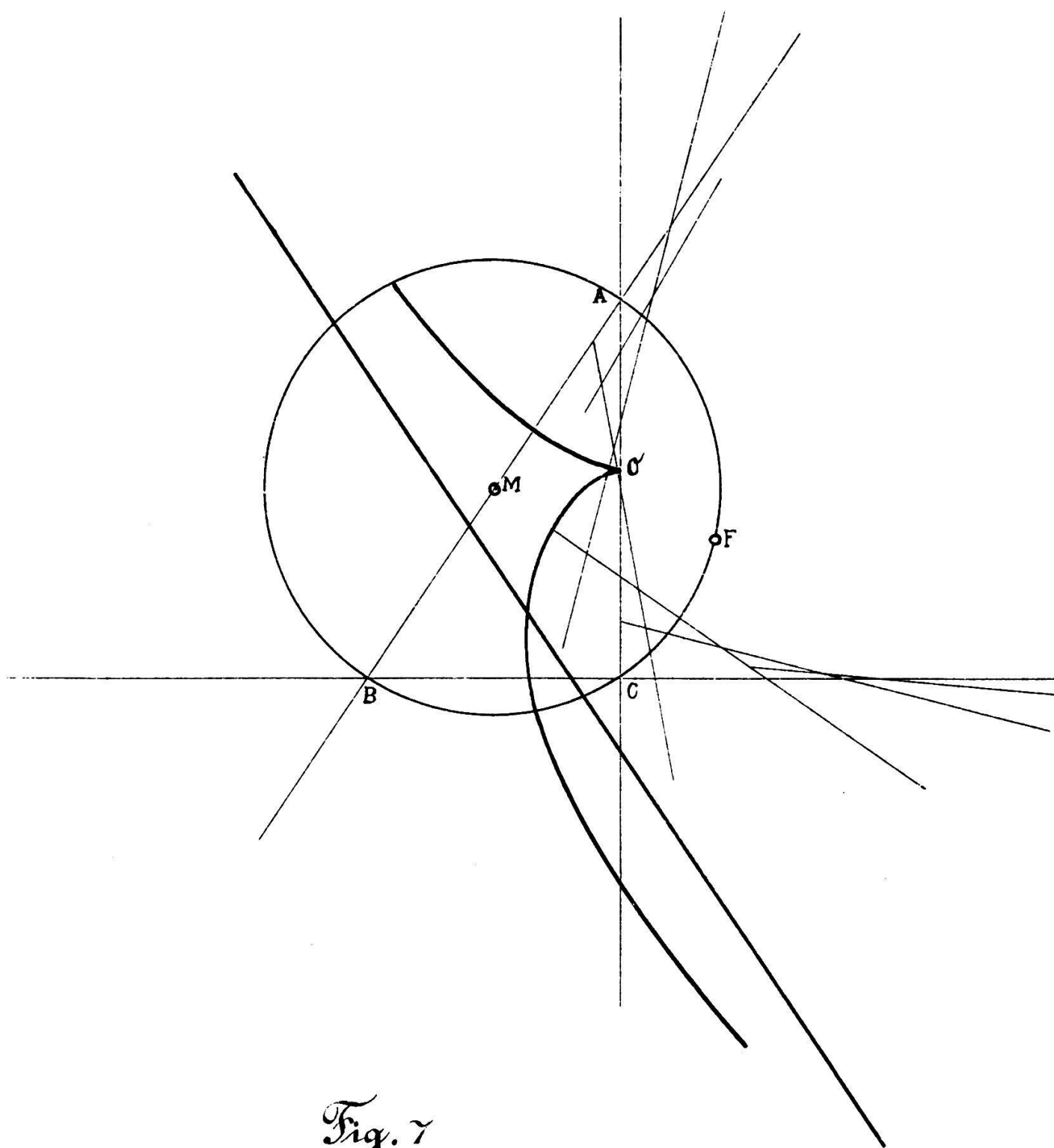


Fig. 6



*Fig. 7*

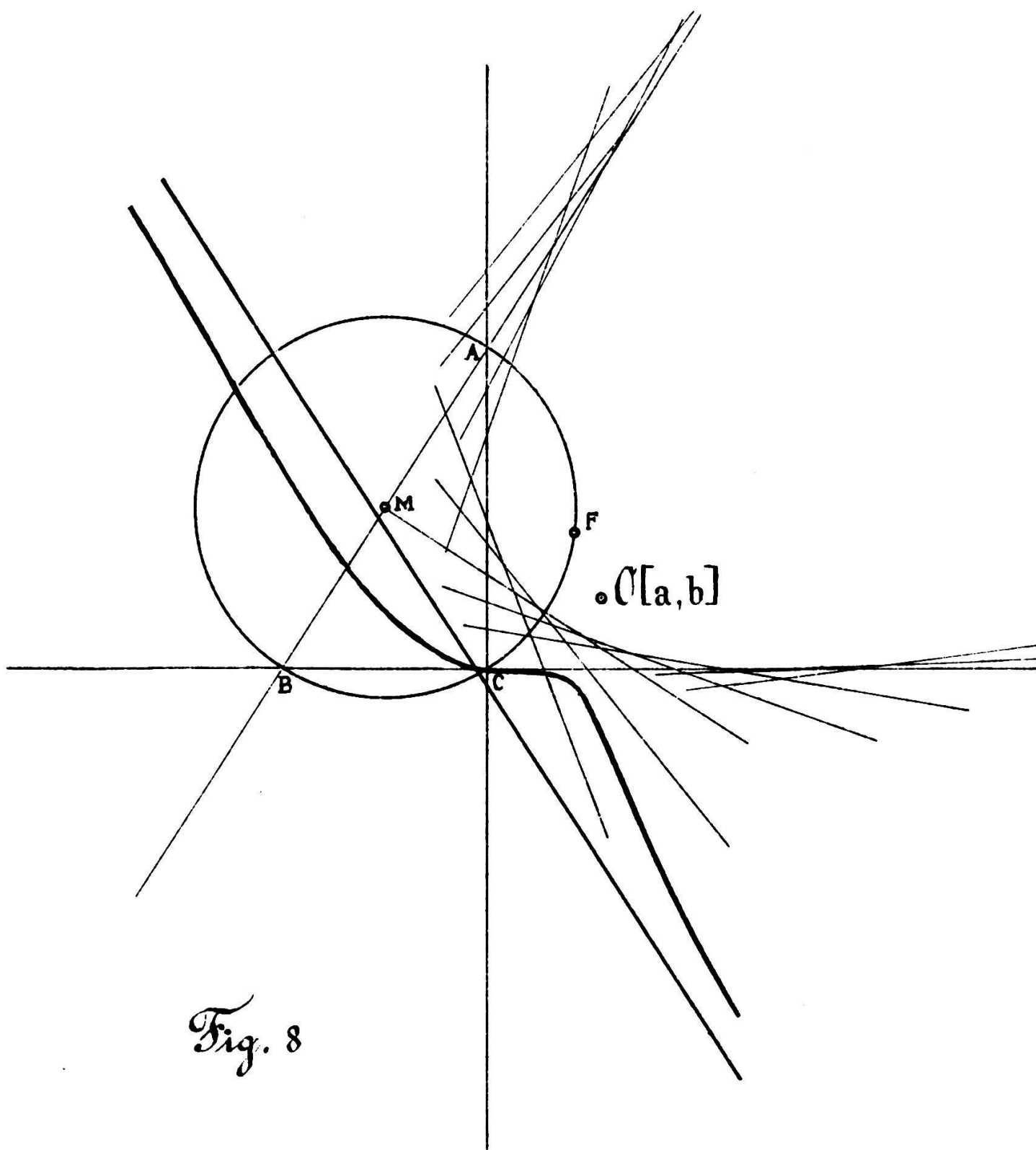


Fig. 8

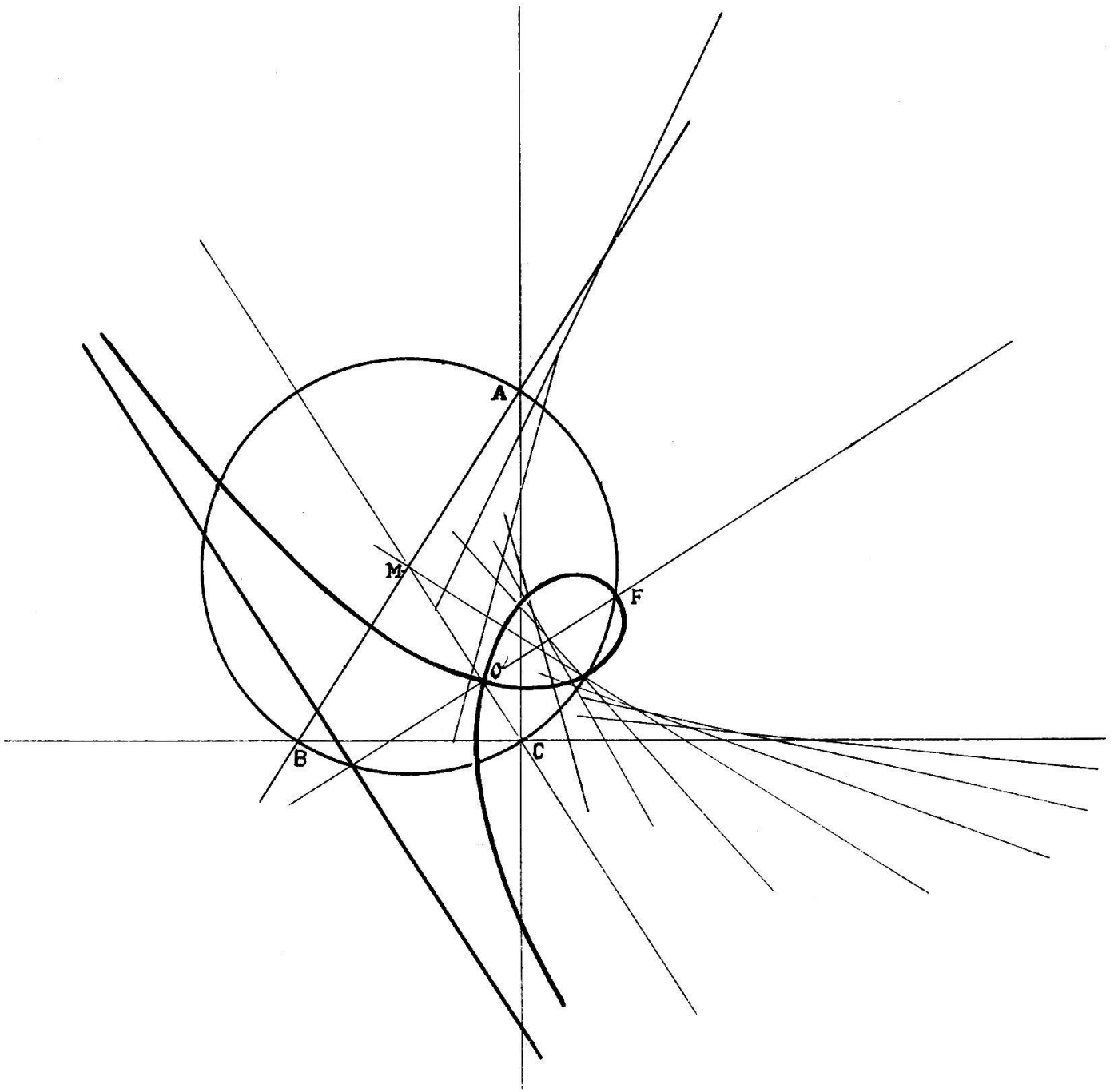
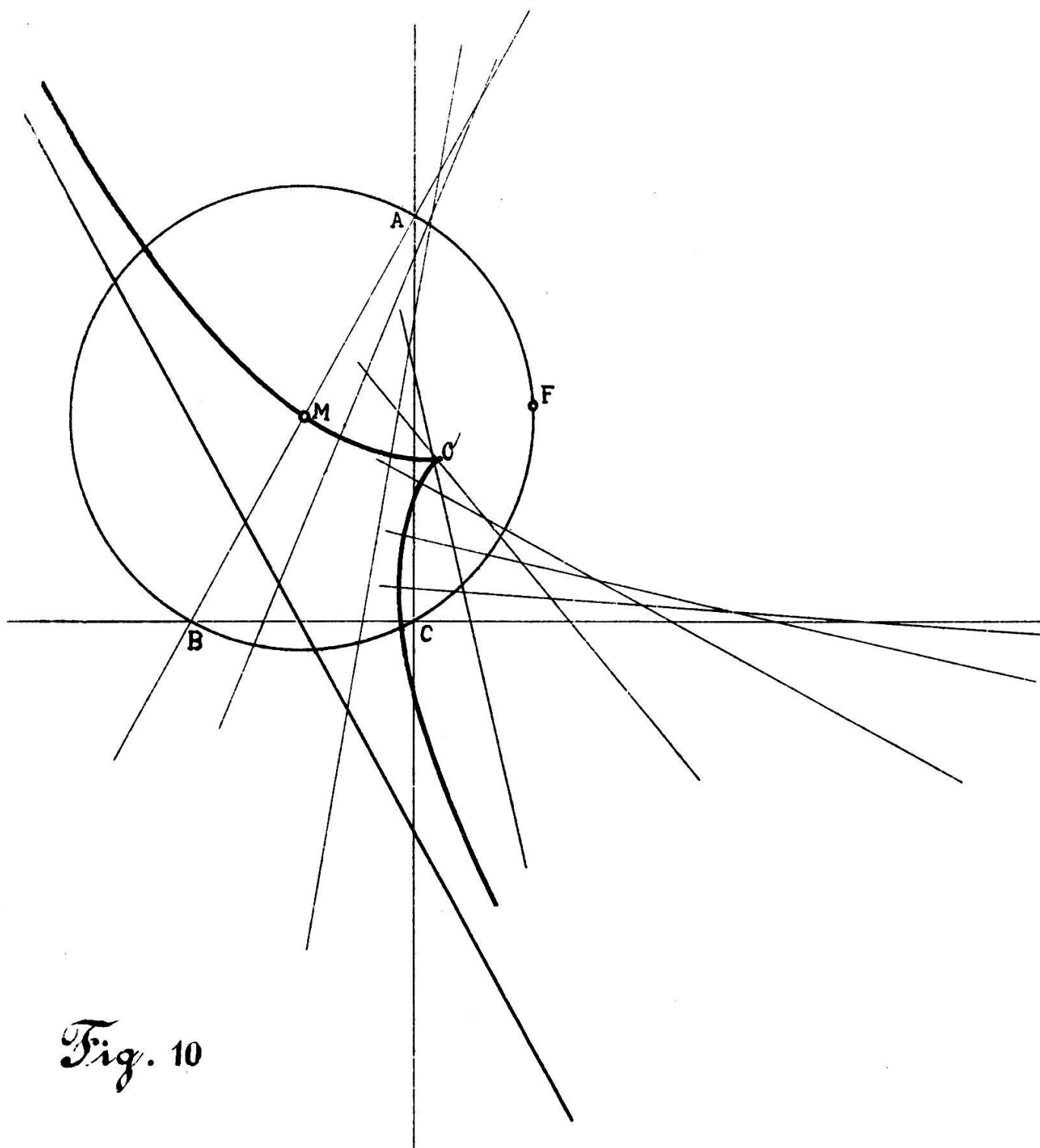


Fig. 9



*Fig. 10*