

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel

Autor: Schenker, O.

Kapitel: XIII: Die Wendepunkte der behandelten symmetrischen zyklischen Kurven

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319226>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

XIII. Die Wendepunkte der behandelten symmetrischen zyklischen Kurven.

Ihre Gleichungen sind in der Form enthalten:

$$(x^2 + y^2 + 2 a x) x + 2 B (x^2 - y^2) = 0 \quad \text{oder}$$

in homogener Gestalt:

$$x^3 + x y^2 + 2 x^2 (a + B) z - 2 B \cdot y^2 \cdot z = 0$$

Darum ist nach der üblichen Bezeichnung:

$$\begin{aligned} f_1 &= 3 x^2 + y^2 + 4 x (a + B) z \\ f_2 &= 2 y \cdot x - 4 B \cdot y \cdot z; \quad f_3 = 2 x^2 (a + B) - 2 B \cdot y^2 \\ f_{1,1} &= 6 x + 4 (a + B) z; \quad f_{1,2} = 2 y; \quad f_{1,3} = 4 x (a + B) \\ f_{2,1} &= 2 y; \quad f_{2,2} = 2 x - 4 B \cdot z; \quad f_{2,3} = -4 B y \\ f_{3,1} &= 4 x (a + B); \quad f_{3,2} = -4 B \cdot y; \quad f_{3,3} = 0 \end{aligned}$$

Bekanntlich ist die Gleichung der Hessiane:

$$\begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benutzung obiger Werte für die f :

$$\begin{vmatrix} 6 x + 4 (a + B) z, & 2 y, & 4 x (a + B) \\ 2 y, & 2 x - 4 B \cdot z & -4 B \cdot y \\ 4 (a + B) x, & -4 B \cdot y, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} & - [6 x + 4 (a + B) z] \cdot 16 \cdot B^2 \cdot y^2 - 32 \cdot x \cdot y^2 \cdot B \cdot (a + B) \\ & - 32 x \cdot y^2 \cdot B \cdot (a + B) - 32 (a + B)^2 \cdot x^2 \cdot (x - 2 B \cdot z) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & [3 x + 2 (a + B) z] B^2 \cdot y^2 + 2 x \cdot y^2 \cdot B (a + B) + (a + B)^2 \\ & \cdot x^2 (x - 2 B \cdot z) = 0 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^3 (a + B)^2 + x \cdot y^2 [3 B^2 + 2 (a + B) B] - 2 x^2 \cdot z \cdot B (a + B)^2 \\ & + 2 y^2 \cdot z \cdot B^2 (a + B) = 0 \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^3 (a + B)^2 + x y^2 [3 B^2 + 2 (a + B) B] - B (a + B) [2 x^2 (a + B) \\ & - 2 y^2 \cdot B] \cdot z = 0 \end{aligned}$$

oder in Verbindung mit der Gleichung der Kurve Seite 51:

$$x^3 [B(a+B) + (a+B)^2] + y^2 \cdot x [B(a+B) + 3B^2 + 2(a+B)B] = 0 \quad \text{woraus:}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{2B^2 + 3a \cdot B + a^2}{6B^2 + 3aB}, \text{ oder } \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{2B^2 + 3aB + a^2}{3B(2B + a)}$$

Substituiert man den sich hieraus ergebenden Wert für y^2 in die Kurvengleichung ((b)), so erhält man eine Gleichung 3. Grades in x . Die zugehörigen Ordinaten folgen aus dem Werte für $\frac{y}{x}$.

Sollen speziell die beiden symmetrisch zur x -Achse liegenden Wendepunkte in die imaginären Kreispunkte hineinfallen, so muss sein:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{1}{3B} \cdot \frac{2B^2 + 3aB + a^2}{2B + a} = -1$$

woraus folgt:

$$3B(2B + a) - 2B^2 - 3aB - a^2 = 0 \quad \text{oder} \\ 4B^2 = a^2, \text{ also } a = \pm 2B$$

für $a = 2B$ heisst die Gleichung der Kurve:

$$\frac{(x^2 + y^2)x + 2B(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)x - 2B(x^2 + y^2)} = 0 \quad \text{und f\"ur } a = -2B \\ (x^2 + y^2)x - 2B(x^2 + y^2) = 0 \quad \text{oder } x^2 + y^2 = 0 \quad \text{und } x = 2B$$

In letzterem Falle zerfällt also die Kurve in die Direktrix der Kiepert'schen Parabel und in ihren Brennpunkt, denn $2B$ bedeutet ihren Halbparameter.

Berichtigung:

- Seite 13, Zeile 6, lies $\sin(C - B)$ statt $(C - B)$.
 » 18, am Fusse, lies $\sin(C - B)$ statt $(C - B)$.
 » 27, Zeile 6, lies Tétraedre statt Tetraedre.
 » Seite 30, drittletzte Zeile, lies Seite 27 statt 28.

