Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel

Autor: Schenker, O.

Kapitel: XIII: Die Wendepunkte der behandelten symmetrischen zyklischen Kurven

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

XIII. Die Wendepunkte der behandelten symmetrischen zyklischen Kurven.

Ihre Gleichungen sind in der Form enthalten:

$$(x^2 + y^2 + 2\,a\,x)\,x + 2\,B\,(x^2 - y^2) = 0 \qquad \text{oder}$$

in homogener Gestalt:

$$x^3 + x\,y^2 + 2\,x^2\,(a + B)\,z - 2\,B \cdot y^2 \cdot z = 0$$

Darum ist nach der üblichen Bezeichnung:

$$f_1 = 3\,x^2 + y^2 + 4\,x\,(a + B)\,z$$
$$f_2 = 2\,y \cdot x - 4\,B \cdot y \cdot z;\quad f_3 = 2\,x^2\,(a + B) - 2\,B \cdot y^2$$
$$f_{1,1} = 6\,x + 4\,(a + B)\,z;\quad f_{1,2} = 2\,y;\quad f_{1,3} = 4\,x\,(a + B)$$
$$f_{2,1} = 2\,y;\quad f_{2,2} = 2\,x - 4\,B \cdot z;\quad f_{2,3} = -4\,B\,y$$
$$f_{3,1} = 4\,x\,(a + B);\quad f_{3,2} = -4\,B \cdot y;\quad f_{3,3} = 0$$

Bekanntlich ist die Gleichung der Hessiane:

$$\begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

oder mit Benutzung obiger Werte für die f:

$$\begin{vmatrix} 6\,x + 4\,(a + B)\,z, & 2\,y, & 4\,x\,(a + B) \\ 2\,y, & 2\,x - 4\,B \cdot z & -4\,B \cdot y \\ 4\,(a + B)\,x, & -4\,B \cdot y, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$-[6\,x + 4\,(a + B)\,z] \cdot 16 \cdot B^2 \cdot y^2 - 32 \cdot x \cdot y^2 \cdot B \cdot (a + B)$$
$$- 32\,x \cdot y^2 \cdot B \cdot (a + B) - 32\,(a + B)^2 \cdot x^2 \cdot (x - 2\,B \cdot z) = 0$$

oder

$$[3\,x + 2\,(a + B)\,z]\,B^2 \cdot y^2 + 2\,x \cdot y^2 \cdot B\,(a + B) + (a + B)^2$$
$$\cdot\, x^2\,(x - 2\,B \cdot z) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$x^3\,(a + B)^2 + x \cdot y^2\,[3\,B^2 + 2\,(a + B)\,B] - 2\,x^2 \cdot z \cdot B\,(a + B)^2$$
$$+ 2\,y^2 \cdot z \cdot B^2\,(a + B) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$x^3\,(a + B)^2 + x\,y^2\,[3\,B^2 + 2\,(a + B)\,B] - B\,(a + B)\,[2\,x^2\,(a + B)$$
$$- 2\,y^2 \cdot B] \cdot z = 0$$

oder in Verbindung mit der Gleichung der Kurve Seite 51:

$$x^3 [B(a+B) + (a+B)^2] + y^2 \cdot x [B(a+B) + 3B^2 + 2(a+B)B] = 0$$

woraus:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{2B^2 + 3a \cdot B + a^2}{6B^2 + 3aB}, \text{ oder } \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{2B^2 + 3aB + a^2}{3B(2B+a)}$$

Substituiert man den sich hieraus ergebenden Wert für y^2 in die Kurvengleichung ((b)), so erhält man eine Gleichung 3. Grades in x. Die zugehörigen Ordinaten folgen aus dem Werte für $\frac{y}{x}$.

Sollen speziell die beiden symmetrisch zur x-Achse liegenden Wendepunkte in die imaginären Kreispunkte hineinfallen, so muss sein:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{1}{3B} \cdot \frac{2B^2 + 3aB + a^2}{2B + a} = -1$$

woraus folgt:

$$3B(2B+a) - 2B^2 - 3aB - a^2 = 0$$

oder

$$4B^2 = a^2, \text{ also } a = \pm 2B$$

für $a = 2B$ heisst die Gleichung der Kurve:

$$\underline{(x^2 + y^2)x + 2B(2x^2 - y^2) = 0}$$

und für $a = -2B$

$$(x^2 + y^2)x - 2B(x^2 + y^2) = 0 \text{ oder } x^2 + y^2 = 0 \text{ und } x = 2B$$

In letzterem Falle zerfällt also die Kurve in die Direktrix der Kiepert'schen Parabel und in ihren Brennpunkt, denn 2 B bedeutet ihren Halbparameter.

Berichtigung:

Seite 13, Zeile 6, lies sin (C — B) statt (C — B).
» 18, am Fusse, lies sin (C — B) statt (C — B).
» 27, Zeile 6, lies Tétraedre statt Tetraedre.
» Seite 30, drittletzte Zeile, lies Seite **27** statt 28.