Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel

Autor: Schenker, O.

Kapitel: XI: Die Zylinderfokale als Spezialfall der behandelten zyklischen Kurven dritten Grades

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

$$\frac{1}{2}y^2 - y^2 + p(2x + p) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 - 4p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0$$

als Gleichung der Enveloppe. Sie ist also eine mit der Kiepert'schen Parabel $y^2 - 2px = 0$ konfokale und koaxiale Parabel von doppelt so grossem Parameter (s. Fig. 5).

Die Figuren 6, 7 und 8 sind Spezialfälle unserer zyklischen Kurven, 6 und 7 sind solche mit Spitzen (auf der Kiepert'schen Parabel liegend), Fig. 8 ist eine solche mit einem isolierten Punkt.

XI. Die Zylinderfokale als Spezialfall der behandelten zyklischen Kurven dritten Grades.

Unsere zyklische Kurve hat am rechtwinkligen Dreieck die Gleichung (nach pag. 29, wenn B mit C vertauscht und $C = 90^0$ gesetzt wird)

$$(x^2 + y^2 + 2ax + 2by)(\sin A \cdot y - \sin B\, x) \\ + 2xy(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Wir wollen nun das Koordinatensystem um den Anfangspunkt $\mathfrak{O}$ um den Winkel φ drehen, seien x' und y' die Koordinaten des laufenden Punktes im neuen gedrehten Koordinatensystem, so gelten bekanntlich die Transformationsformeln:

$$x = x' \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi; \quad y = x' \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi$$

die Kurvengleichung geht somit über in:

$$[x^2 + y^2 + 2x(a\cos\varphi + b \cdot \sin\varphi) \\ + 2y(-a \cdot \sin\varphi + b \cdot \cos\varphi)] \cdot \\ \cdot [y(\sin A \cdot \cos\varphi + \sin B \cdot \sin\varphi) \\ + x(\sin A \cdot \sin\varphi - \sin B \cdot \cos\varphi)] \\ + 2(x^2 - y^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ + x \cdot y(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0,$$

wenn statt x' und y', x und y gesetzt wird, oder:

$$[x^2 + y^2 + 2x(a \cdot \cos\varphi + b\sin\varphi) \\ + 2y(-a \cdot \sin\varphi + b\cos\varphi)] \\ \cdot [y \cdot \sin(A + \varphi) - x \cdot \cos(A + \varphi)] \\ + 2[(x^2 - y^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ + x \cdot y(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)](\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Setzt man $\varphi = - A$, so geht diese Gleichung über in:

$$\begin{gathered}[x^2 + y^2 + 2x(a \cdot \cos A - b \cdot \sin A) \\ + 2y(a \cdot \sin A + b \cdot \cos A)] \cdot (-x) \\ - 2(x^2 - y^2) \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) \\ + 2xy \cdot (\sin^2 B - \sin^2 A)^2 = 0\end{gathered}$$

Setzt man weiter:

(a) $$-(a \cdot \sin A + b \cdot \cos A) + (\sin^2 B - \sin^2 A)^2 = 0,$$

so lautet die Gleichung der Kurve:

(b) $$\begin{gathered}-[x^2 + y^2 + 2x(a \cdot \cos A - b \cdot \sin A)]\, x - 2(x^2 + y^2) \\ \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0,\end{gathered}$$

wo a und b durch Gleichung (a) zusammenhängen. Nun erfüllen die Koordinaten des Brennpunktes ($-\sin A \cdot \cos 2A$, $\cos A \cdot \cos 2A$ s. Fig. 3) die Gleichung (a). Die durch sie bestimmte Gerade ist ausserdem zur Euler'schen Geraden senkrecht d. h. sie ist die Achse der Kiepert'schen Parabel, welche zum Dreieck A B C gehört. Die Gleichung (b) bleibt unverändert wenn $-y$ für y gesetzt wird, d. h., gehört der Punkt $\mathfrak{O}$ (a, b) der Achse der Kiepert'schen Parabel an, so ist die zugehörige zyklische Kurve in Bezug auf diese Achse symmetrisch.

Transformieren wir nun auch die Koordinaten a und b von $\mathfrak{O}$, a' b' seien seine Koordinaten nach der Drehung, so gilt:

$$a = a' \cos A + b' . \sin A ; \quad b = - a' \sin A + b' \cos A$$

und darum wird die Gleichung (b) zu:

((b)) $$\begin{gathered}(x^2 + y^2 + 2x a')\, x + 2(x^2 - y^2) \\ \cdot \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0\end{gathered}$$

Die Bedingung (a) lautet nunmehr:

$$b' = (\sin^2 B - \sin^2 A)^2$$

ist $a' = 0$, so ist der Punkt $\mathfrak{O}$ der Schnittpunkt der Parabelachse mit der Direktrix und die zugehörige zyklische Kurve hat die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)\, x + 2(x^2 - y^2) \cdot \sin A \cdot \cos A (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

oder $\quad (x^2 + y^2)\, x + 2(x^2 - y^2) \cdot \sin A \cdot \cos A \cos 2A = 0 \quad$ oder

$$\underline{2(x^2 + y^2)\, x + (x^2 - y^2) \cdot \sin 4A = 0}$$

Dies ist die Gleichung der Zylinderfokalen (Fig. 9). Diese Kurve ist von Herrn Prof. Huber in seiner Vorlesung über die: «Theorie der höhern ebenen Kurven» ziemlich ausführlich behandelt worden. Zu den dort angegebenen Erzeugungsarten können wir eine neue hinzufügen, nämlich diejenige, welche mit der Kiepert'schen Parabel zusammenhängt. Die Zylinderfokale schneidet die Parabelachse ausser in dem Punkte 0, 0 noch in dem Punkte $x = \frac{\sin 4\,A}{2}$, 0, und dies ist der Brennpunkt der Parabel, denn aus dem Ausdruck für ihren Halbparameter

$$p = 2 \sin (A - B) \cdot \sin (B - C) \cdot \sin (C - A)$$
$$: \sqrt{(1 - 8 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^3}$$

folgt für $C = 90^0$; $p = -2 \sin (A - B) \cdot \cos B \cdot \cos A$

$$= -2 \sin (A - 90 + A) \cdot \cos B \cdot \cos A$$
$$= 2 \cos 2\,A \cdot \sin A \cdot \sin B = \frac{\sin 4\,A}{2}.$$

XII. Die Cissoide als Spezialfall der behandelten zyklischen Kurven.

Wir nehmen die Gleichung ((b)) Seite 49 vor:

((b)) $$(x^2 + y^2 + 2\,x \cdot a')\,x + 2\,(x^2 - y^2)$$
$$\cdot \sin A \cdot \cos A\,(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Anfangspunkt des Koordinatensystems ist der Punkt $\mathfrak{O}$ beliebig auf der Parabelachse liegend $+\,x$ Achse ist die der Parabel (Richtung Brennpunkt ⋙ Direktrix) $+\,y$ Achse die Parallele zur Direktrix durch $\mathfrak{O}$ (Richtung Höhenpunkt ⋙ Umkreismittelpunkt). a' ist die Abszisse von $\mathfrak{O}$ in Bezug auf ein paralleles Koordinatensystem durch den Scheitel des rechten Winkels. Ist

$$a' = - \sin A \cdot \cos A\,(\sin^2 B - \sin^2 A)$$

so lautet die Gleichung ((b)):

$$(x^2 + y^2)\,x - 2\,y^2 \sin A \cdot \cos A\,(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Diese Kurve hat in $\mathfrak{O}$ eine Spitze, welche nach früherem auf der Parabel liegt; $\left(\text{in der Tat ist } a' = - \frac{\sin 4\,A}{4} = - \frac{p}{2}\right)$. Sie ist die Cissoide des Diokles (Fig. 10).