Untersuchung einer an der Kiepert'schen Parabel erhaltenen Kegelschnittschar

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1912)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Die Abstände von den Seiten CA und AB werden analog sein:

$$\underline{\sin(B - A) \cdot \sin(B - C) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)}$$

bezw.

$$\underline{\sin(C - B) : \sin(C - A) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)}$$

IX. Der Abstand des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von der Euler'schen Geraden oder der Halbparameter der Kiepert'schen Parabel.

Derselbe ist offenbar gleich dem doppelten Seitenabstand

$$\sin(A - C) \cdot \sin(A - B) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

multipliziert mit dem Cosinus des Winkels, den die Euler'sche Gerade mit der x-Achse bildet. Die Tangente dieses Winkels ist (s. pag. 30):

$$\frac{\sin(C - B) \cdot \cos C - \sin(C - A)}{\sin C \cdot \sin(C - B)}$$

somit sein Cosinus

$$1 : \sqrt{1 + \frac{[\sin(C - B) \cdot \cos C - \sin(C - A)]^2}{\sin^2 C \cdot \sin^2(C - B)}} \qquad \text{oder}$$

$$= \sin C \cdot (C - B) : \sqrt{\sin^2 C \cdot \sin^2(C - B) + [\sin(C - B) \cdot \cos C - \sin(C - A)]^2}$$

$$= \sin(C - B) \cdot \sin C : \sqrt{\sin^2(C - B) + \sin^2(C - A) - 2 \cdot \sin(C - B) \cdot \sin(C - A)]^2 \cdot \cos C}$$

$$= \sin(C - B) : \sqrt{1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

somit ist der gesuchte Halbparameter:

$$p = 2 \cdot \sin(A - B) \cdot \sin(B - C) \cdot \sin(C - A) : \sqrt{(1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)^3}$$

X. Untersuchung einer an der Kiepert'schen Parabel erhaltenen Kegelschnittschar.

Die Form der Gleichung für die auf Seite 35 erhaltene Kegelschnittschar sagt unmittelbar aus, dass alle Kurven der Schar durch die Schnittpunkte der Euler'schen Geraden mit der

Kiepert'schen Parabel hindurch gehen und in denselben die Kiepert'sche Parabel berühren. Wir haben hier also ein System von sich doppelt berührenden Kegelschnitten. Die Kiepert'sche Parabel gehört selbst zu diesem System und ebenso ihre Direktrix ($c = 0$, resp. $c = \infty$).

Wählt man die Achse der Kiepert'schen Parabel zur x-Achse und ihre Scheiteltangente als y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet die Parabelgleichung:
$y^2 - 2\,p\,x = 0$ (p = Halbparameter) und die der Euler'schen Geraden: $x = -\frac{p}{2}$, somit die der Kegelschnittschar:

$$y^2 - 2\,p\,x = c^2 \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - p\,x\,(2 + c^2) - \frac{c^2 \cdot p^2}{4} = 0 \qquad (1)$$

Für $c^2 = -1$ kommt:

$$y^2 + x^2 - p\,x + \frac{p^2}{4} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

d. i. die Gleichung eines unendlich kleinen Kreises im Brennpunkt.

Die x-Koordinate des Mittelpunktes eines durch Gleichung (1) gegebenen Kegelschnittes sei α, so lautet seine Gleichung bezüglich eines parallelen Koordinatensystems durch denselben:

$$y^2 - c^2 (x + \alpha)^2 - p\,(x + \alpha)\,(2 + c^2) - \frac{c^2 \cdot p^2}{4} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 - c\,x^2 - x\,[2\,\alpha\,c^2 + p\,(2 + c^2)]$$
$$- p\left[(2 + c^2)\,\alpha + \frac{c^2 \cdot p}{4}\right] - c^2\,\alpha^2 = 0$$

Da nun der Koordinatenanfang im Mittelpunkt des Kegelschnittes liegt, so muss das Glied mit x wegfallen
d. h.

$$\alpha = -\frac{p\,(2 + c^2)}{2\,c^2}$$

und die Kurvengleichung ist:

$$y^2 - c^2 x^2 - p \left[(2 + c^2)(-p) \frac{(2 + c^2)}{2 c^2} + \frac{c^2 \cdot p}{4} \right]$$

$$- p^2 \frac{(2 + c^2)^2}{4 c^2} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - p \left[- p \frac{(2 + c^2)^2}{2 c^2} + \frac{c^2 \cdot p}{4} \right] - p^2 \frac{(2 + c^2)^2}{4 c^2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - \frac{p^2}{4 c^2} [- 2 (2 + c^2)^2 + c^4 + (2 + c^2)^2] = 0 \quad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 - \frac{p^2}{4 c^2} [- 4 - 4 c^2] = 0 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 - c^2 x^2 + \frac{p^2 (1 + c^2)}{c^2} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$c^2 x^2 - y^2 - \frac{p^2 (1 + c^2)}{c^2} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{x^2}{\frac{p^2 (1 + c^2)}{c^4}} - \frac{y^2}{\frac{p^2 (1 + c^2)}{c^2}} - 1 = 0$$

Die eine Achse des Kegelschnitts ist gleich:

$$\frac{2 p \sqrt{1 + c^2}}{c^2}$$

die andere ist gleich:

$$\frac{i \cdot 2 p \cdot \sqrt{1 + c^2}}{c}$$

Setzt man $c = \operatorname{tg} \varphi$, so kommt:

$$\frac{2 p}{\cos \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi} \text{ u. } \frac{2 p i}{\sin \varphi}$$

für die beiden Achsen des Kegelschnitts, das Achsenverhältnis ist also:

$$\frac{\sin \varphi}{i} : \cos \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = \operatorname{cotg} \varphi : i$$

d. h. für einen reellen Winkel φ ist die eine Achse imaginär.

Die Gleichung der Asymptoten ist:

$$\pm y + c\left[x + \frac{p(2+c^2)}{2c^2}\right] = 0$$

(Anfangspunkt des Koordinatensystems ist der Parabelscheitel) oder

$$\pm y + cx + \frac{p}{c} + \frac{cp}{2} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\pm cy + c^2x + p + \frac{c^2p}{2} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$c^2\left(x + \frac{p}{2}\right) \pm cy + p = 0$$

2 reelle Asymptoten haben wir, wenn c reell ist; dies ist der Fall, wenn die Kiepert'sche Parabel dem Punkte $\mathfrak{O}$ die konvexe Seite zukehrt, wovon man sich leicht überzeugt. Für $c = 0$ reduziert sich die Asymptotengleichung auf $p = 0$, d. i. die unendlich ferne Gerade. Der Kegelschnitt ist die Kiepert'sche Parabel selbst. $c = \infty$ ergibt als Grenzfall die Euler'sche Gerade $x = -\frac{p}{2}$. Die Hyperbeln der Kegelschnittschar verlaufen also zwischen der Euler'schen Geraden und der Kiepert'schen Parabel im einen Zweige. (Fig. 4). Die Grenzen für den andern Zweig sind die unendlich ferne Gerade und die Euler'sche Gerade. Ist c rein imaginär, so haben wir Ellipsen, die Grenzfälle sind die Kiepert'sche Parabel ($c = 0$) und ihr Brennpunkt ($c = \pm i$). (Fig. 5). Hat c die Form $A + Bi$, so haben wir imaginäre Kegelschnitte mit imaginären Asymptoten.

Für die Asymptoten:

$$c^2\left(x + \frac{p}{2}\right) \pm cy + p = 0$$

bestimmen wir die Enveloppe in bekannter Weise. Wir differenzieren die Gleichung nach c und erhalten:

$$c(2x + p) \pm y = 0 \quad \text{oder} \quad c = \mp y : 2x + p$$

Trägt man diesen Wert für c in die Asymptotengleichung ein, so kommt mit Wegschaffung des Nenners:

$$\frac{1}{2}y^2 - y^2 + p(2x + p) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 - 4p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0$$

als Gleichung der Enveloppe. Sie ist also eine mit der Kiepert'schen Parabel $y^2 - 2px = 0$ konfokale und koaxiale Parabel von doppelt so grossem Parameter (s. Fig. 5).

Die Figuren 6, 7 und 8 sind Spezialfälle unserer zyklischen Kurven, 6 und 7 sind solche mit Spitzen (auf der Kiepert'schen Parabel liegend), Fig. 8 ist eine solche mit einem isolierten Punkt.

XI. Die Zylinderfokale als Spezialfall der behandelten zyklischen Kurven dritten Grades.

Unsere zyklische Kurve hat am rechtwinkligen Dreieck die Gleichung (nach pag. 29, wenn B mit C vertauscht und $C = 90^0$ gesetzt wird)

$$(x^2 + y^2 + 2ax + 2by)(\sin A \cdot y - \sin B\, x) \\ + 2xy(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$

Wir wollen nun das Koordinatensystem um den Anfangspunkt $\mathfrak{O}$ um den Winkel φ drehen, seien x' und y' die Koordinaten des laufenden Punktes im neuen gedrehten Koordinatensystem, so gelten bekanntlich die Transformationsformeln:

$$x = x' \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi; \quad y = x' \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi$$

die Kurvengleichung geht somit über in:

$$[x^2 + y^2 + 2x(a\cos\varphi + b \cdot \sin\varphi) \\ + 2y(-a \cdot \sin\varphi + b \cdot \cos\varphi)] \cdot \\ \cdot [y(\sin A \cdot \cos\varphi + \sin B \cdot \sin\varphi) \\ + x(\sin A \cdot \sin\varphi - \sin B \cdot \cos\varphi)] \\ + 2(x^2 - y^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ + x \cdot y(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0,$$

wenn statt x' und y', x und y gesetzt wird, oder:

$$[x^2 + y^2 + 2x(a \cdot \cos\varphi + b\sin\varphi) \\ + 2y(-a \cdot \sin\varphi + b\cos\varphi)] \\ \cdot [y \cdot \sin(A + \varphi) - x \cdot \cos(A + \varphi)] \\ + 2[(x^2 - y^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ + x \cdot y(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)](\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$