Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel
Autor: Schenker, O.
Kapitel: VIII: Die Abstände des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von den Seiten des Grunddreiecks ABC
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

und sein Abstand von der Seite B C (s. Fig. 3):

$$\sin(C - A) \cdot \sin(B - A) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos \cdot B \cdot \cos C)$$

Aus Gründen der Analogie sind seine Abstände von den Seiten C A und A B:

$$\sin(A - B) \cdot \sin(C - B) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cos C) \text{ bezw.}$$

$$\sin(B - C) \cdot \sin(A - C) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

Dies sind die Abstände des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von den Seiten des Grunddreiecks A B C, wie nachher gezeigt wird. Unsere zyklischen Kurven 3. Ordnung haben also gemeinsame imaginäre Asymptoten, welche durch die imaginären Kreispunkte und durch den Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel gehen. Der Brennpunkt der Kiepert'schen Parabel ist also auch ein gemeinsamer Brennpunkt dieser zyklischen Kurven.

VIII. Die Abstände des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von den Seiten des Grunddreiecks ABC.

Der Abstand dieses Brennpunktes von der Seite BC ist nach Seite 35:

$$d = \frac{[\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] \cdot \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) + \sin(C - B) \cdot \sin^2 C (\sin C \cdot \cos C - \sin A \cdot \cos A)}{[- \sin(C - A) + \sin(C - B) \cdot \cos C]^2 + \sin^2 (C - B) \cdot \sin^2 C}$$

Der Nenner ist wie bereits gefunden

$$= \sin^2 C (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

Der Zähler kann in die Form gebracht werden

$$[\sin(C - A) - \sin(C - B) \cdot \cos C] \cdot \sin C \cdot \sin B \cdot \sin(C - A)$$
$$- \sin(C - B) \cdot \sin^2 C \cdot \cos B \sin(C - A)$$
$$= - \sin(C - B) \cdot \sin(C - A) \cdot \sin C \cdot \sin A + \sin^2 (C - A) \sin C \cdot \sin B$$
$$= \sin(C - A) \cdot \sin C [\sin(C - A) \cdot \sin B - (C - B) \cdot \sin A)$$
$$= \sin(C - A) \cdot \sin C \cdot \frac{1}{2} (\cos 2A - \underline{\cos 2C} + \underline{\cos 2C} - \cos 2B)$$
$$= \sin(C - A) \cdot \sin^2 C \cdot \sin(B - A)$$

Darum ist der Abstand des Brennpunktes von der Seite BC:

$$\underline{\sin(A - C) \cdot \sin(A - B) : (1 - 8 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos \cdot C)}$$

Die Abstände von den Seiten CA und AB werden analog sein:

$$\underline{\sin(B-A)\cdot\sin(B-C):(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)}$$

bezw.

$$\underline{\sin(C-B):\sin(C-A):(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)}$$

IX. Der Abstand des Brennpunktes der Kiepert'schen Parabel von der Euler'schen Geraden oder der Halbparameter der Kiepert'schen Parabel.

Derselbe ist offenbar gleich dem doppelten Seitenabstand

$$\sin(A-C)\cdot\sin(A-B):(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)$$

multipliziert mit dem Cosinus des Winkels, den die Euler'sche Gerade mit der x-Achse bildet. Die Tangente dieses Winkels ist (s. pag. 30):

$$\frac{\sin(C-B)\cdot\cos C-\sin(C-A)}{\sin C\cdot\sin(C-B)}$$

somit sein Cosinus

$$1:\sqrt{1+\frac{[\sin(C-B)\cdot\cos C-\sin(C-A)]^2}{\sin^2 C\cdot\sin^2(C-B)}} \qquad \text{oder}$$

$$=\sin C\cdot(C-B):$$

$$\sqrt{\sin^2 C\cdot\sin^2(C-B)+[\sin(C-B)\cdot\cos C-\sin(C-A)]^2}$$

$$=\sin(C-B)\cdot\sin C:$$

$$\sqrt{\sin^2(C-B)+\sin^2(C-A)-2\cdot\sin(C-B)\cdot\sin(C-A)]^2\cdot\cos C}$$

$$=\sin(C-B):\sqrt{1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}$$

somit ist der gesuchte Halbparameter:

$$p=2\cdot\sin(A-B)\cdot\sin(B-C)\cdot\sin(C-A):$$

$$\sqrt{(1-8\cdot\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)^3}$$

X. Untersuchung einer an der Kiepert'schen Parabel erhaltenen Kegelschnittschar.

Die Form der Gleichung für die auf Seite 35 erhaltene Kegelschnittschar sagt unmittelbar aus, dass alle Kurven der Schar durch die Schnittpunkte der Euler'schen Geraden mit der