Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel
Autor: Schenker, O.
Kapitel: III: Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319226

Zufolge der Konstruktion des Winkelgegenpunktes P'' gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2''}{x_1''};\quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_3''}{x_2''};\quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{x_1''}{x_3''}$$

also:
$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1''} : \frac{1}{x_2''} : \frac{1}{x_3''}$$

d. h. die Koordinaten eines Punktes sind den entsprechenden reciproken Koordinaten des Winkelgegenpunktes proportional.

Die Koordinaten von P' sollen in BC, CA und AB bezw. die Fusspunkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$, die von P'' bezw. die Fusspunkte $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ bestimmen, so hat man:

$$\frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2''};\quad \frac{\mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C} = \frac{x_1''}{x_2'};$$ somit

$$\frac{\mathfrak{A}'C \cdot \mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C \cdot \mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{\frac{1}{x_1'}}{\frac{1}{x_2'}} = 1$$

d. h. die 4 Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$, liegen auf einem Kreis, dasselbe gilt von den Punkten $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$, sowie den Punkten $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$. Alle drei Kreise sind aber konzentrisch und darum fallen sie zusammen:

Die Fusspunkte der Senkrechten von 2 Winkelgegenpunkten auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf demselben Kreis.

III. Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises.

Die Gleichung irgend eines dem Grunddreieck umschriebenen Kegelschnitts ist von der Form:

$$a_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

Wie sind a_1, a_2 und a_3 zu bestimmen damit die Gleichung einen Kreis darstellt? Um diese Frage zu beantworten, führen wir für x_1, x_2 und x_3 rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir setzen:

Für $x_1 = x \cdot \cos\alpha_1 + y \cdot \sin\alpha_1 - p_1$,
» $x_2 = x \cdot \cos\alpha_2 + y \cdot \sin\alpha_2 - p_2$,
» $x_3 = x \cdot \cos\alpha_3 + y \cdot \sin\alpha_3 - p_3$,

x und y sind hiebei die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes x_1, x_2, x_3. Die α sind die Winkel, welche die Normalen vom Nullpunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems auf die bezw. Seiten des Grunddreiecks (ABC) mit der positiven Richtung der x Achse eben dieses Koordinatensystems bilden. Die p sind die Längen dieser Normalen. Als Bedingungen für den Kreis bekommt man daher, indem man die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich und denjenigen von xy Null setzt:

$$a_1 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \cos(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$
$$a_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

woraus
$$a_1 = a_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$
$$a_2 = a_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$
oder
$$a_1 = a_3 \cdot \sin A : \sin C$$
$$a_2 = a_3 \cdot \sin B : \sin C$$

Die Gleichung des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises (Umkreis) lautet deshalb:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C = 0$$

Hieraus leitet man sofort den Satz ab:

Die Fusspunkte der Senkrechten aus einem Punkte des Umkreises auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf einer Geraden (Simson'sche Gerade genannt).

IV. Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel.

(Hiezu Fig. 2)

Die Seiten eines Dreiecks (ABC) umhüllen mit der Zentralen (A′B′C′) der Apollonischen Kreise eine Parabel, der die folgende Eigenschaft zukommt: Bestimmt man von irgend einer ihrer Tangenten die Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$) mit den resp. Dreiecksseiten (BC, CA, AB), so treffen sich die Kreise mit diesen Schnittpunkten zu Zentren, durch die resp. Dreiecksecken (A, B, C) in zwei Punkten O und O′.

Beweis: M sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Figur), A′, B′ und C′ seien die Zentren der Apollonischen Kreise,