

Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1912)**

PDF erstellt am: **20.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zufolge der Konstruktion des Winkelgegenpunktes P'' gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2''}{x_1''}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_3''}{x_2''}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{x_1''}{x_3''}$$

also:
$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1''} : \frac{1}{x_2''} : \frac{1}{x_3''}$$

d. h. die Koordinaten eines Punktes sind den entsprechenden reciproken Koordinaten des Winkelgegenpunktes proportional.

Die Koordinaten von P' sollen in BC , CA und AB bezw. die Fusspunkte \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' und \mathfrak{C}' , die von P'' bezw. die Fusspunkte \mathfrak{A}'' , \mathfrak{B}'' , \mathfrak{C}'' bestimmen, so hat man:

$$\frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2''}; \quad \frac{\mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C} = \frac{x_1''}{x_2'}; \quad \text{somit}$$

$$\frac{\mathfrak{A}'C \cdot \mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C \cdot \mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1'}{\frac{1}{x_2'}} = 1$$

d. h. die 4 Punkte \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' , \mathfrak{B}' , \mathfrak{B}'' , liegen auf einem Kreis, dasselbe gilt von den Punkten \mathfrak{B}' , \mathfrak{B}'' , \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , sowie den Punkten \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' . Alle drei Kreise sind aber konzentrisch und darum fallen sie zusammen:

Die Fusspunkte der Senkrechten von 2 Winkelgegenpunkten auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf demselben Kreis.

III. Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises.

Die Gleichung irgend eines dem Grunddreieck umschriebenen Kegelschnitts ist von der Form:

$$a_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

Wie sind a_1 , a_2 und a_3 zu bestimmen damit die Gleichung einen Kreis darstellt? Um diese Frage zu beantworten, führen wir für x_1 , x_2 und x_3 rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir setzen:

$$\text{Für } x_1 = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1 - p_1,$$

$$\text{» } x_2 = x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2 - p_2,$$

$$\text{» } x_3 = x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \sin \alpha_3 - p_3,$$

x und y sind hiebei die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes x_1, x_2, x_3 . Die α sind die Winkel, welche die Normalen vom Nullpunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems auf die bezw. Seiten des Grunddreiecks (ABC) mit der positiven Richtung der x Achse eben dieses Koordinatensystems bilden. Die p sind die Längen dieser Normalen. Als Bedingungen für den Kreis bekommt man daher, indem man die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich und denjenigen von xy Null setzt:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \cos(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \\ a_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ a_2 &= a_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 \cdot \sin A : \sin C \\ a_2 &= a_3 \cdot \sin B : \sin C \end{aligned}$$

Die Gleichung des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises (Umkreis) lautet deshalb:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C = 0$$

Hieraus leitet man sofort den Satz ab:

Die Fusspunkte der Senkrechten aus einem Punkte des Umkreises auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf einer Geraden (Simson'sche Gerade genannt).

IV. Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel.

(Hiezu Fig. 2)

Die Seiten eines Dreiecks (ABC) umhüllen mit der Zentralen (A'B'C') der Apollonischen Kreise eine Parabel, der die folgende Eigenschaft zukommt: Bestimmt man von irgend einer ihrer Tangenten die Schnittpunkte (A, B und C) mit den resp. Dreiecksseiten (BC, CA, AB), so treffen sich die Kreise mit diesen Schnittpunkten zu Zentren, durch die resp. Dreiecksecken (A, B, C) in zwei Punkten O und O'.

Beweis: M sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Figur), A', B' und C' seien die Zentren der Apollonischen Kreise,