

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel

Autor: Schenker, O.

Kapitel: III: Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319226>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zufolge der Konstruktion des Winkelgegenpunktes P'' gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2''}{x_1''}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_3''}{x_2''}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{x_1''}{x_3''}$$

also: $x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1''} : \frac{1}{x_2''} : \frac{1}{x_3''}$

d. h. die Koordinaten eines Punktes sind den entsprechenden reciproken Koordinaten des Winkelgegenpunktes proportional.

Die Koordinaten von P' sollen in BC , CA und AB bezw. die Fusspunkte \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' und \mathfrak{C}' , die von P'' bezw. die Fusspunkte \mathfrak{A}'' , \mathfrak{B}'' , \mathfrak{C}'' bestimmen, so hat man:

$$\frac{\mathfrak{A}' C}{\mathfrak{B}'' C} = \frac{x_1'}{x_2''}; \quad \frac{\mathfrak{A}'' C}{\mathfrak{B}' C} = \frac{x_1''}{x_2'}, \quad \text{somit}$$

$$\frac{\mathfrak{A}' C \cdot \mathfrak{A}'' C}{\mathfrak{B}' C \cdot \mathfrak{B}'' C} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{1}{\frac{x_1'}{x_2'}} = 1$$

d. h. die 4 Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$, liegen auf einem Kreis, das-selbe gilt von den Punkten $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$, sowie den Punkten $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$. Alle drei Kreise sind aber konzentrisch und darum fallen sie zusammen:

Die Fusspunkte der Senkrechten von 2 Winkelgegenpunkten auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf demselben Kreis.

III. Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises.

Die Gleichung irgend eines dem Grunddreieck umschriebenen Kegelschnitts ist von der Form:

$$a_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

Wie sind a_1 , a_2 und a_3 zu bestimmen damit die Gleichung einen Kreis darstellt? Um diese Frage zu beantworten, führen wir für x_1 , x_2 und x_3 rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir setzen:

Für $x_1 = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1 = p_1$,

» $x_2 = x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2 = p_2$,

» $x_3 = x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \sin \alpha_3 = p_3$,

x und y sind hiebei die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes x_1, x_2, x_3 . Die α sind die Winkel, welche die Normalen vom Nullpunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems auf die bezw. Seiten des Grunddreiecks (ABC) mit der positiven Richtung der x Achse eben dieses Koordinatensystems bilden. Die p sind die Längen dieser Normalen. Als Bedingungen für den Kreis bekommt man daher, indem man die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich und denjenigen von xy Null setzt:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \cos(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \\ a_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

woraus $a_1 = a_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$a_2 = a_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

oder $a_1 = a_3 \cdot \sin A : \sin C$

$$a_2 = a_3 \cdot \sin B : \sin C$$

Die Gleichung des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises (Umkreis) lautet deshalb:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C = 0$$

Hieraus leitet man sofort den Satz ab:

Die Fusspunkte der Senkrechten aus einem Punkte des Umkreises auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf einer Geraden (Simson'sche Gerade genannt).

IV. Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel. (Hiezu Fig. 2)

Die Seiten eines Dreiecks (ABC) umhüllen mit der Zentralen ($A'B'C'$) der Apollonischen Kreise eine Parabel, der die folgende Eigenschaft zukommt: Bestimmt man von irgend einer ihrer Tangenten die Schnittpunkte ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und \mathfrak{C}) mit den resp. Dreiecksseiten (BC, CA, AB), so treffen sich die Kreise mit diesen Schnittpunkten zu Zentren, durch die resp. Dreiecksecken (A, B, C) in zwei Punkten O und O' .

Beweis: M sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Figur), A', B' und C' seien die Zentren der Apollonischen Kreise,