# Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1912)**

PDF erstellt am: **20.06.2024**

Zufolge der Konstruktion des Winkelgegenpunktes P'' gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2''}{x_1''}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_3''}{x_2''}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{x_1''}{x_3''}$$

also:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1''} : \frac{1}{x_2''} : \frac{1}{x_3''}$$

d. h. die Koordinaten eines Punktes sind den entsprechenden reciproken Koordinaten des Winkelgegenpunktes proportional.

Die Koordinaten von P' sollen in BC, CA und AB bezw. die Fusspunkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$, die von P'' bezw. die Fusspunkte $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ bestimmen, so hat man:

$$\frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2''}; \quad \frac{\mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C} = \frac{x_1''}{x_2'}; \qquad \text{somit}$$

$$\frac{\mathfrak{A}'C \cdot \mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C \cdot \mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{\frac{1}{x_1'}}{\frac{1}{x_2'}} = 1$$

d. h. die 4 Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$, liegen auf einem Kreis, dasselbe gilt von den Punkten $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$, sowie den Punkten $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$. Alle drei Kreise sind aber konzentrisch und darum fallen sie zusammen:

Die Fusspunkte der Senkrechten von 2 Winkelgegenpunkten auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf demselben Kreis.

## III. Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises.

Die Gleichung irgend eines dem Grunddreieck umschriebenen Kegelschnitts ist von der Form:

$$a_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

Wie sind $a_1$, $a_2$ und $a_3$ zu bestimmen damit die Gleichung einen Kreis darstellt? Um diese Frage zu beantworten, führen wir für $x_1$, $x_2$ und $x_3$ rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir setzen:

Für $x_1 = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1 - p_1$,
» $x_2 = x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2 - p_2$,
» $x_3 = x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \sin \alpha_3 - p_3$,

$x$ und $y$ sind hiebei die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $x_1$, $x_2$, $x_3$. Die $\alpha$ sind die Winkel, welche die Normalen vom Nullpunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems auf die bezw. Seiten des Grunddreiecks (ABC) mit der positiven Richtung der x Achse eben dieses Koordinatensystems bilden. Die p sind die Längen dieser Normalen. Als Bedingungen für den Kreis bekommt man daher, indem man die Koeffizienten von $x^2$ und $y^2$ einander gleich und denjenigen von $xy$ Null setzt:

$$a_1 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \cos(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$
$$a_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_2 \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_1) + a_3 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

woraus
$$a_1 = a_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$
$$a_2 = a_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) : \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$
oder
$$a_1 = a_3 \cdot \sin A : \sin C$$
$$a_2 = a_3 \cdot \sin B : \sin C$$

Die Gleichung des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises (Umkreis) lautet deshalb:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \sin A + x_3 \cdot x_1 \cdot \sin B + x_1 \cdot x_2 \cdot \sin C = 0$$

Hieraus leitet man sofort den Satz ab:

Die Fusspunkte der Senkrechten aus einem Punkte des Umkreises auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf einer Geraden (Simson'sche Gerade genannt).

## IV. Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel.

(Hiezu Fig. 2)

Die Seiten eines Dreiecks (ABC) umhüllen mit der Zentralen (A'B'C') der Apollonischen Kreise eine Parabel, der die folgende Eigenschaft zukommt: Bestimmt man von irgend einer ihrer Tangenten die Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$) mit den resp. Dreiecksseiten (BC, CA, AB), so treffen sich die Kreise mit diesen Schnittpunkten zu Zentren, durch die resp. Dreiecksecken (A, B, C) in zwei Punkten O und O'.

Beweis: M sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Figur), A', B' und C' seien die Zentren der Apollonischen Kreise,