

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1912)

Artikel: Das Dreieck und die Kiepert'sche Parabel
Autor: Schenker, O.
Kapitel: II: Aus der Theorie der Winkelgegenpunkte
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319226>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ oder } (x + i y)(x - i y) = 0$$

Die beiden Richtungen $+i$ und $-i$ bestimmen die beiden imaginären Kreispunkte. Dieselben liegen also auf der unendlich fernen Geraden. Zwei Gerade, gegeben durch die Gleichungen $x + a y = 0$ und $x - a y = 0$, werden aber von $x = 0$ und $y = 0$ harmonisch geteilt, woraus folgt:

Zwei zueinander senkrechte Gerade teilen die Verbindungslinie der imaginären Kreispunkte harmonisch.

II. Aus der Theorie der Winkelgegenpunkte.

(Fig. 1.)

Zieht man vom Punkte P' nach den Ecken des Dreiecks $A B C$ Strahlen, welche die Gegenseiten in den Punkten A', B', C' treffen mögen, und spiegelt man diese Strahlen an den innern Winkelhalbierenden des Dreiecks $A B C$, so treffen sich diese Spiegelbilder in demselben Punkte P'' , dem Winkelgegenpunkt von P' .

Beweis: Die gespiegelten Strahlen sollen die Gegenseiten bezw. in den Punkten A'', B'' und C'' treffen, so hat man bei Verwendung trimetrischer Koordinaten (s. Kp. IV, Al. 3)

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{C' B \cdot \sin B}{C' A \cdot \sin A}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{A' C \cdot \sin C}{A' B \cdot \sin B}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{B' A \cdot \sin A}{B' C \cdot \sin C}$$

$$\frac{x_1''}{x_2''} = \frac{C'' B \cdot \sin B}{C'' A \cdot \sin A}; \quad \frac{x_2''}{x_3''} = \frac{A'' C \cdot \sin C}{A'' B \cdot \sin B}; \quad \frac{x_3''}{x_1''} = \frac{B'' A \cdot \sin A}{B'' C \cdot \sin C}$$

den $C' B \cdot \sin B$ ist die Länge der Senkrechten aus C' auf BC und $C' A \cdot \sin A$ die Länge der Senkrechten von C' auf AC etc. Aus ähnlichen Dreiecken folgt sofort das übrige. Multipliziert man die ersten drei Relationen miteinander, so erhält man den Satz von Ceva, die drei letzten multipliziert ergeben:

$$1 = \frac{C'' B \cdot A'' C \cdot B'' A}{C'' A \cdot A'' B \cdot B'' C}$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden sich daher $A A'', B B''$ und $C C''$ in demselben Punkte P'' .

Zufolge der Konstruktion des Winkelgegenpunktes P'' gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2''}{x_1''}; \quad \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_3''}{x_2''}; \quad \frac{x_3'}{x_1'} = \frac{x_1''}{x_3''}$$

also:
$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1''} : \frac{1}{x_2''} : \frac{1}{x_3''}$$

d. h. die Koordinaten eines Punktes sind den entsprechenden reciproken Koordinaten des Winkelgegenpunktes proportional.

Die Koordinaten von P' sollen in BC , CA und AB bezw. die Fusspunkte \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' und \mathfrak{C}' , die von P'' bezw. die Fusspunkte \mathfrak{A}'' , \mathfrak{B}'' , \mathfrak{C}'' bestimmen, so hat man:

$$\frac{\mathfrak{A}'C}{\mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2''}; \quad \frac{\mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C} = \frac{x_1''}{x_2'}; \quad \text{somit}$$

$$\frac{\mathfrak{A}'C \cdot \mathfrak{A}''C}{\mathfrak{B}'C \cdot \mathfrak{B}''C} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x_2'}} = 1$$

d. h. die 4 Punkte \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' , \mathfrak{B}' , \mathfrak{B}'' , liegen auf einem Kreis, dasselbe gilt von den Punkten \mathfrak{B}' , \mathfrak{B}'' , \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , sowie den Punkten \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' . Alle drei Kreise sind aber konzentrisch und darum fallen sie zusammen:

Die Fusspunkte der Senkrechten von 2 Winkelgegenpunkten auf die Seiten des Grunddreiecks liegen auf demselben Kreis.

III. Die Gleichung des dem Grunddreieck umschriebenen Kreises.

Die Gleichung irgend eines dem Grunddreieck umschriebenen Kegelschnitts ist von der Form:

$$a_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3 \cdot x_1 + a_3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

Wie sind a_1 , a_2 und a_3 zu bestimmen damit die Gleichung einen Kreis darstellt? Um diese Frage zu beantworten, führen wir für x_1 , x_2 und x_3 rechtwinklige Koordinaten ein, indem wir setzen:

$$\text{Für } x_1 = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1 - p_1,$$

$$\text{» } x_2 = x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2 - p_2,$$

$$\text{» } x_3 = x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \sin \alpha_3 - p_3,$$