

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern

**Band:** - (1911)

**Artikel:** Zur Geometrie des Dreiecks

**Autor:** Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.

**Kapitel:** 15

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319223>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

seits wissen, dass die Gerade  $VaWa$  durch den Mittelpunkt  $\alpha$  des letztern Kreises geht, und zu  $BC$  parallel ist, so ist unsere Behauptung erwiesen.

In dem von den Geraden  $Ia, IIa, IIIa, IVa$  gebildeten Vierseit sind also zwei Gegenecken im Kreise um  $BC$  als Durchmesser die Endpunkte  $i'$  und  $I'$  des zu  $BC$  senkrechten Durchmessers, zwei andere Gegenecken sind die Fusspunkte  $E$  und  $F$  der Höhenperpendikel  $BE$  und  $CF$  des Stammdreiecks  $ABC$ , und das dritte Paar Gegenecken sind im Kreise um  $AH$  als Durchmesser die Endpunkte  $Va$  und  $Wa$  des zu  $AH$  senkrechten Durchmessers.

Eine Verifikation dieses Satzes erhalten wir wie folgt: Es ist  $EF$  die gemeinsame Sehne der Kreise um  $BC$  und um  $AH$  als Durchmesser, daher steht die Gerade  $\alpha$  senkrecht zu  $EF$  und geht durch die Mitte von  $EF$ . Die Mitten der drei Diagonalen  $I'i'$ ,  $EF$ ,  $VaWa$  des obigen Vierseits liegen somit in einer Geraden, w. s. s.

### § 15.

Betrachten wir neben dem obigen Vierseite noch die analogen, die sich respektive auf  $CA$  und  $AB$  beziehen, so schneiden sich also drei sich entsprechende Diagonalen der drei Vierseite im Umkreiszentrums  $O$  des Stammdreiecks, drei andere sich entsprechende Diagonalen bilden das Dreieck der Höhenfusspunkte des Stammdreiecks, und die drei übrigen sich entsprechenden Diagonalen bilden ein zum Stammdreieck paralleles und kongruentes Dreieck, das mit jenem Umkreiszentrums und Höhenpunkt gegenseitig vertauscht und gemeinsamen Neunpunkt Kreis hat; der Mittelpunkt dieses Neunpunkt Kreises ist das Ähnlichkeitszentrum der beiden Dreiecke.

Die Gleichungen für die Seiten der zu  $Ia, IIa, IIIa, IVa$  zwei analogen Vierseite erhalten wir aus 98 mittelst des Buchstabentrades:

$$\text{Gerade } Ib \dots x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0$$

$$\text{Gerade } IIb \dots x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0$$

$$\text{Gerade } IIIb \dots x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0$$

$$\text{Gerade } IVb \dots -x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0,$$

98'.

und

$$\text{Gerade Ic} \dots x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0$$

$$\text{Gerade IIc} \dots x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0$$

$$\text{Gerade IIIc} \dots -x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0$$

$$\text{Gerade IVc} \dots x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0.$$

98''.

Die Anschauung dieser Gleichungen 98, 98', 98'' zeigt, dass von den entsprechenden zwölf Geraden je zwei miteinander identisch sind, so dass diese drei 107. Vierseite nur von sechs voneinander verschiedenen Geraden gebildet werden.

Diese sechs Geraden wollen wir jetzt mit  $g_a, g'_a, g_b, g'_b, g_c, g'_c$  bezeichnen, nämlich

$$g_a = Ib = IVc \dots x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0$$

$$g'_a = IIIb = IIc \dots x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0$$

$$g_b = Ic = IVa \dots x \cos A + y \sin B - z \cos C = 0$$

$$g'_b = IIIc = IIa \dots -x \cos A + y \sin B + z \cos C = 0 \quad 108.$$

$$g_c = Ia = IVb \dots -x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0$$

$$g'_c = IIIa = IIb \dots x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0.$$

Es gehen

$g_a$  und  $g'_a$  durch den Höhenfusspunkt D,

$g_b$  und  $g'_b$  durch den Höhenfusspunkt E,

$g_c$  und  $g'_c$  durch den Höhenfusspunkt F,

und man hat

$$\text{Vierseit } IVa IIa Ia IIIa = g_b g'_b g_c g'_c$$

$$\text{Vierseit } IVb IIb Ib IIIb = g_c g'_c g_a g'_a$$

$$\text{Vierseit } IVc IIc Ic IIIc = g_a g'_a g_b g'_b.$$

Die 15 Ecken des Sechsecks 108 sind die Höhenfusspunkte D, E, F des Stammdreiecks A B C, die Punkte  $i' J', k', K'; l', L'$  auf den respektive um B C, C A, A B als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu 109. diesen Dreieckseiten senkrechten Durchmesser, und endlich die Punkte V<sub>a</sub>, W<sub>a</sub>; W<sub>b</sub> U<sub>b</sub>; U<sub>c</sub>, V<sub>c</sub>, auf den um A H, B H, C H als Durchmesser beschriebenen Kreisen je die Endpunkte der zu diesen Höhenabschnitten senkrechten Durchmesser.

Stellen wir gemäss 33, 34, 35, 99, 100, 106 die Punkte zusammen, die auf den sechs Geraden  $g$  liegen, so finden wir:

Auf jeder der sechs Geraden  $g$  liegen neun aus-  
gezeichnete Punkte, nämlich 110.

Gerade	Punkte
$g_a$	$D, k', L', W_b, U_c, \begin{cases} R P' v \\ R' p' v' \end{cases}, \begin{cases} r' P v \\ r p' v' \end{cases}, \begin{cases} P' q w \\ p' Q' w' \end{cases}, \begin{cases} r q' w \\ P Q w' \end{cases}$
$g'_a$	$D, K', I', U_b, V_c, \begin{cases} R' p v \\ R P v' \end{cases}, \begin{cases} r p' v \\ r' P' v' \end{cases}, \begin{cases} P Q' w \\ p q w' \end{cases}, \begin{cases} p' Q w \\ P' q' w' \end{cases}$
$g_b$	$E, l', J' U_c, V_a, \begin{cases} P Q' w' \\ P' q' w' \end{cases}, \begin{cases} p' Q w \\ p q w' \end{cases}, \begin{cases} Q' r u \\ q' R' u' \end{cases}, \begin{cases} q r' u \\ Q R u' \end{cases}$
$g'_b$	$E, L', i', V_c, W_a, \begin{cases} P' q w \\ P Q w' \end{cases}, \begin{cases} p q' w \\ p' Q' w' \end{cases}, \begin{cases} Q R' u \\ q r u' \end{cases}, \begin{cases} q' R u \\ Q' r' u' \end{cases}$
$g_c$	$F, i', K', V_a, W_b, \begin{cases} Q R' u \\ Q' r' u' \end{cases}, \begin{cases} q' R u \\ q r u' \end{cases}, \begin{cases} R' p v \\ r' P' v' \end{cases}, \begin{cases} r p' v \\ R P v' \end{cases}$
$g'_c$	$F, J' k', W_a, U_b, \begin{cases} Q' r u \\ Q R u' \end{cases}, \begin{cases} q r' u \\ q' R' u' \end{cases}, \begin{cases} R P' v \\ r p v' \end{cases}, \begin{cases} r' P v \\ R' p' v' \end{cases}$

Wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig wird, so werden auf diesen Geraden je die 4 letztangegebenen Punkte imaginär, die Geraden  $g$  selber aber und je die 5 erstangeführten Punkte auf denselben bleiben reell.

Durch den Höhenfusspunkt D gehen die Kreise um AC und um AB als Durchmesser; die Geraden  $Dk'$  und  $DK'$ , oder  $DL'$  und  $DI'$  sind daher zu einander senkrecht. Im Punkte D stehen also die Geraden  $g_a$  und  $g'_a$  zu einander senkrecht, und analog im Punkte E sind die Geraden  $g_b$  und  $g'_b$ , und im Punkte F sind die Geraden  $g_c$  und  $g'_c$  zu einander senkrecht. 111.

Bilden wir aus den sechs Geraden  $g$  in der Reihenfolge  $g_a g'_b g'_c g_a g_b g'_c$  ein einfaches Sechseck, so sind die aufeinanderfolgenden Ecken derselben die Punkte  $L' i' K' l' J' k'$ , und die Verbindungslien je zweier Gegenecken d. h. die Geraden  $L' l'$ ,  $i' J'$ ,  $K' k'$  schneiden sich in einem nämlichen Punkte, dem Umkreiszentrum O des Stammdreiecks.

Die sechs Geraden  $g$  sind also einem nämlichen Kegelschnitte  $G$  umschrieben. 112.

Da nun nach 111 in den Höhenfusspunkten des Stammdreiecks je zwei der Geraden  $g$  zu einander senkrecht stehen, so folgt: Der Neunpunkt Kreis des Stammdreiecks ist der Ort der Scheitel eines den Kegelschnitt  $G$  umgleitenden rechten Winkels. Der Kegelschnitt  $G$  ist somit konzentrisch zum Neunpunkt Kreise des Stammdreiecks, und wenn  $\alpha$  und  $\beta$  die halben Axen des Kegelschnittes  $G$  sind, so hat man je nachdem derselbe eine Ellipse oder eine Hyperbel ist  $4\alpha^2 + 4\beta^2 = R^2$ , oder  $4\alpha^2 - 4\beta^2 = R^2$ .

Im Neunpunkt Kreis seien  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  die Diametralpunkte der Höhenfusspunkte  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , oder die Punkte, wo die Geraden  $I'i'$ ,  $K'k'$ ,  $L'l'$  den Neunpunkt Kreis wiederum schneiden, so gehen durch  $D'$  die respektive zu  $g_a$  und  $g_a'$  parallelen Tangenten  $\gamma_a$  und  $\gamma_a'$  unseres Kegelschnittes, durch  $E'$  die respektive zu  $g_b$  und  $g_b'$  parallelen Tangenten  $\gamma_b$  und  $\gamma_b'$ , und durch  $F'$  die respektive zu  $g_c$  und  $g_c'$  parallelen Tangenten  $\gamma_c$  und  $\gamma_c'$ .

Die Geraden  $g$  und  $\gamma$  zusammen bilden drei dem Neunpunkt Kreise eingeschriebene und dem Kegelschnitt  $G$  umschriebene Rechtecke. 114.

Die Geraden  $\gamma$  bilden ein zu den Geraden  $g$  paralleles und kongruentes einfaches Sechseck, das den Höhenpunkt  $H$  des Stammdreiecks zum Brianchon'schen Punkte hat.

Diese Geraden  $\gamma$  haben zu einem zu  $ABC$  parallelen und kongruenten Dreieck, das mit diesem gemeinsamen Neunpunkt Kreis aber Umkreiszentrum und Höhenpunkt vertauscht hat, und dessen Seiten auf den Geraden  $V_aW_a$ ,  $W_bU_b$ ,  $U_cV_c$  liegen, dieselben Beziehungen wie die Geraden  $g$  zum Stammdreieck  $ABC$ . 115.

Es ist nun leicht, Tangenten von  $G$  in beliebiger Anzahl zu konstruieren: Sei z. B.  $w$  ein variabler Punkt

der Geraden  $I'i'$ , so möge  $k'w$  die Gerade  $g_c$  in  $Z$ , und  $L'w$  die Gerade  $g_b$  in  $Y$  schneiden, so ist  $YZ$  eine variable Tangente von  $G$ . Oder es möge  $K'w$  die gerade  $g'_c$  in  $Z'$ , und  $l'w$  die Gerade  $g'_b$  in  $Y'$  schneiden, so ist auch  $Y'Z'$  eine variable Tangente von  $G$ .

Das Buchstabenrad ergibt hieraus analoge Konstruktionen von Tangenten von  $G$ , wenn wir  $w$  die Gerade  $K'k'$  oder die Gerade  $L'l'$  durchlaufen lassen.

Lassen wir in 116  $Z$  in den Schnittpunkt von  $g_b$  und  $g_c$  rücken, so geht  $Y$  in den Berührungs punkt  $\beta$  von  $g_b$  über. Oder lassen wir  $Y$  in den Schnittpunkt von  $g_b$  und  $g_c$  rücken, so geht  $Z$  in den Berührungs punkt  $\gamma$  von  $g_c$  über.

Der Strahl, der den Schnittpunkt  $Va$  von  $g_b$  und  $g_c$  mit  $k'$  verbindet, schneide also  $i'I'$  in  $w$ , so trifft  $L'w$  die Gerade  $g_b$  in ihrem Berührungs punkt  $\beta$ . Und wenn der Strahl, der den Schnittpunkt  $Va$  von  $g_b$  und  $g_c$  mit  $L'$  verbindet,  $i'I'$  in  $w$  schneidet, so trifft  $k'w$  die Gerade  $g_c$  in ihrem Berührungs punkt  $\gamma$ .

Analog werde  $i'I'$  vom Strahl, der den Schnittpunkt  $Wa$  von  $g_b'$  und  $g_c'$  mit  $K'$  verbindet in  $w$  geschnitten, so trifft  $l'w$  die Gerade  $g_b'$  in ihrem Berührungs punkt  $\beta'$ . 117'. Und wenn der Strahl, der den Schnittpunkt  $Wa$  von  $g_b'$  und  $g_c'$  mit  $l'$  verbindet,  $i'I'$  in  $w$  schneidet, so trifft  $K'w$  die Gerade  $g_c'$  in ihrem Berührungs punkte  $\gamma'$ .

Endlich möge der Strahl, der  $i'$  mit dem Schnittpunkt  $Uc$  von  $g_a$  und  $g_b$  verbindet,  $l'L'$  in  $w$  schneiden, so trifft  $K'w$  die Gerade  $g_a$  in ihrem Berührungs punkt  $\alpha$ . 117''. Und wenn der Strahl, der  $I'$  mit dem Schnittpunkt  $Vc$  von  $g_a'$  und  $g_b'$  verbindet  $l'L'$  in  $w$  schneidet so trifft  $k'w$  die Gerade  $g_a'$  in ihrem Berührungs punkte  $\alpha'$ .

Da wir ferner den Mittelpunkt  $\mu$  des Kegelschnittes  $G$  kennen, so ergeben die Berührungs punkte der Geraden  $g$  unmittelbar auch die Berührungs punkte der hiezu parallelen Geraden  $\gamma$ .

Auch die Berührungs punkte der in 116 konstruierten variablen Tangenten  $YZ$  und  $Y'Z'$  ergeben sich in ein-

facher Weise: Der Strahl, der  $I'$  mit dem Schnittpunkt von  $YZ$  und  $g_b'$  verbindet, schneide  $YL'$  in  $w$ , so trifft  $k'w$  die Gerade  $YZ$  in ihrem Berührungs punkte.<sup>118.</sup> Oder der Strahl, der  $i'$  mit dem Schnittpunkte von  $Y'Z'$  und  $g_b$  verbindet, schneide'  $Yl'$  in  $w$ , so trifft  $K'w$  die Gerade  $Y'Z'$  in ihrem Berührungs punkte.

Haben wir den Berührungs punkt irgend einer Tangente  $G$  konstruiert z. B. den Berührungs punkt  $\alpha$  der Geraden  $g_a$ , so ist  $\mu\alpha$  ein Halbmesser von  $G$ , und ziehen wir durch den Mittelpunkt  $\mu$  zu  $g_a$  eine Parallel, so liegen auf dieser die zu  $\mu\alpha$  konjugierten Halbmesser. Sei  $\mu\alpha = u$  und bezeichnen wir den hiezu konjugierten Halbmesser mit  $v$ , so ist  $v$  gegeben durch  $u^2 + v^2 = \varsigma^2$ , wo  $\varsigma$  der Radius des Neunpunkt Kreises. Es ist somit  $v^2$  gleich der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Potenz des Berührungs punktes  $\alpha$  von  $g_a$  in Bezug auf den Neunpunkt Kreis.

Wir erhalten so nach Grösse und Richtung zwei konjugierte Halbmesser von  $G$ , und können schliesslich nach Grösse und Richtung die Axen des Kegelschnittes  $G$  konstruieren.<sup>119.</sup>

Wenn ein Winkel des Stammdreiecks  $ABC$  gleich  $45^\circ$  ist, so geht der Kegelschnitt  $G$  in die Gerade über, welche die Höhenfusspunkte, die auf den jenen Winkel einschliessenden Seiten liegen, miteinander verbindet, s. 102 und 103. Durch jeden dieser beiden Fusspunkte gehen dann je sechs von den 12 Geraden  $g$  und  $\gamma$ . Wenn alle Winkel des Dreiecks  $ABC$  grösser als  $45^\circ$  sind, oder was auf dasselbe heraus kommt, wenn das Dreieck  $i'k'l'$ , ganz innerhalb des Dreiecks  $ABC$  liegt, so ist  $G$  eine Ellipse. Wenn aber ein Winkel von  $ABC$  kleiner als  $45^\circ$  ist, so ist der Kegelschnitt  $G$  eine Hyperbel.

23. Februar 1902.



Corrigenda: Seite 231, Zeile 14 lies p. 53.

Seite 243, Schluss v. Absatz lies H n''' N''', statt n''' N'''.