Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 14
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

dem Dreieck ABC umschriebenen rechtwinkligen Hyperbel, die durch den Schwerpunkt von ABC geht, oder auf der sogenannten Hyperbel von Kiepert.

Nach der bekannten Grundeigenschaft der Hyperbel von Kiepert folgt dies auch unmittelbar daraus, dass die Dreiecke B i′ C, C k′ A, A l′ B gleichschenklig und einander ähnlich sind, und analog die Dreiecke B I′ C, C K′ A, A L′ B.

Ferner haben wir:

Die Dreiecke i′ k′ l′ und I′ K′ L′ liegen auch zu einander perspektivisch, und das perspektivische Zentrum derselben ist der Umkreismittelpunkt des Stammdreiecks ABC. 91.

§ 14.

Stellen wir endlich die Gleichungen der Seiten der beiden Vierseite auf, deren Diagonalen laut 33 neben BC einmal die dort mit Ia und IIa bezeichneten sich in i′ scheidenden Geraden, und das andermal die sich in I′ schneidenden Geraden IIIa und IVa sind. Die Seiten des ersten dieser Vierseite sind Q R′, q′ R, Q′ r′, q r und diejenigen des zweiten Vierseits Q′ r, q r′, Q R, q′ R′.

In 51 haben wir die Koordinaten der Punkte q, q′, Q, Q′, r, r′, R, R′, und wir erhalten hieraus als Gleichung der Geraden Q R′:

$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)x, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)y, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)z \\ c\gamma, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)\beta, & -a\alpha \\ b\beta, & a\alpha, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.: $-\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)Ax+\left(\frac{h}{b}-\beta\right)By+\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)Cz=0$, wo

$$A=\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\left\{\beta\gamma+\left(\frac{h}{b}+\beta\right)\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)\right\}=$$

$$=\frac{2\triangle}{bc}\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)(2\triangle+b\beta-c\gamma)$$

$B = - a b \alpha \beta - c \gamma^2 \left(\frac{h}{c} + \gamma\right)$, oder in Folge der Relationen 49

$$B = - 2 \triangle \gamma \left(\frac{h}{c} + \gamma\right) \text{ und analog } C = 2 \triangle \beta \left(\frac{h}{b} - \beta\right).$$

Wir erhalten so die erste der folgenden Gleichungen:

$$\text{Gerade } Q R' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} + \alpha\right)(2\triangle + b\beta - c\gamma)\,x}{b\,c} + \gamma y - \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } q' R \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} + \alpha\right)(2\triangle - b\beta + c\gamma)\,x}{b\,c} - \gamma y + \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } Q' r' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)(2\triangle - b\beta - c\gamma)\,x}{b\,c} + \gamma y + \beta z = 0 \qquad 92.$$

$$\text{Gerade } q\,r \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)(2\triangle + b\beta + c\gamma)\,x}{b\,c} - \gamma y - \beta z = 0$$

und

$$\text{Gerade } Q' r \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)(2\triangle + b\beta - c\gamma)\,x}{b\,c} - \gamma y + \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } q\,r' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)(2\triangle - b\beta + c\gamma)\,x}{b\,c} + \gamma y - \beta z = 0$$

$$\text{Gerade } Q R \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} + \alpha\right)(2\triangle - b\beta - c\gamma)\,x}{b\,c} - \gamma y - \beta z = 0 \qquad 93.$$

$$\text{Gerade } q' R' \ldots \frac{\left(\frac{h}{a} + \alpha\right)(2\triangle + b\beta + c\gamma)\,x}{b\,c} + \gamma y + \beta z = 0.$$

Hieraus ergibt sich wieder, wie wir in § 6 gesehen, dass die Seite BC von den zwei ersten Geraden jeder Gruppe im Punkte u, und von den zwei letztern Geraden im Punkte u′ geschnitten wird.

Schreiben wir für die Gruppe 92 zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle+b\beta-c\gamma)&=bc\quad,\\
\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle-b\beta+c\gamma)&=bc\mathfrak{A}',\\
\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle-b\beta-c\gamma)&=bc\mathfrak{A}'',\\
\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle+b\beta+c\gamma)&=bc\mathfrak{A}'''
\end{aligned}\tag{94.}$$

und für die Gruppe 93

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle+b\beta-c\gamma)&=bc\mathfrak{A}_1,\\
\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)(2\triangle-b\beta+c\gamma)&=bc\mathfrak{A}_1',\\
\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle-b\beta-c\gamma)&=bc\mathfrak{A}_1'',\\
\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)(2\triangle+b\beta+c\gamma)&=bc\mathfrak{A}_1''',
\end{aligned}\tag{95.}$$

wo $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$; $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{A}_1'''$, respektive aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ durch Umsetzung von α in $-\alpha$ hervorgehen, so sind die Seiten des ersten dieser Vierseite

$$\begin{aligned}
QR'\ \ldots\quad &\mathfrak{A}x+\gamma y-\beta z=0\\
q'R\ \ldots\quad &\mathfrak{A}'x-\gamma y+\beta z=0\\
Q'r'\ \ldots\quad &\mathfrak{A}''x+\gamma y+\beta z=0\\
qr\ \ldots\quad &\mathfrak{A}'''x-\gamma y-\beta z=0
\end{aligned}\tag{92'.}$$

und die Seiten des zweiten Vierseits

$$\begin{aligned}
Q'r\ \ldots\quad &\mathfrak{A}_1x-\gamma x+\beta z=0\\
qr'\ \ldots\quad &\mathfrak{A}_1'x+\gamma x-\beta z=0\\
QR\ \ldots\quad &\mathfrak{A}_1''x-\gamma x-\beta z=0\\
q'R'\ \ldots\quad &\mathfrak{A}_1'''x+\gamma x+\beta z=0.
\end{aligned}\tag{93'.}$$

Hieraus erhalten wir für die von u und u′ verschiedenen Ecken des Vierseits 92 oder 92′

$$\text{Punkt}\ \begin{cases}QR'\\Q'r'\end{cases}\ldots x:y:z=2\beta\gamma:-\beta(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}''):\gamma(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}'')$$

$$\text{Punkt}\left\{\begin{matrix} q'\,R \\ q\,r \end{matrix}\right. \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''') : -\gamma(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}''')$$

96.

$$\text{Punkt}\left\{\begin{matrix} Q\,R' \\ q\,r \end{matrix}\right. \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : -\beta(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}''') : \gamma(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}''')$$

$$\text{Punkt}\left\{\begin{matrix} q'\,R \\ Q'\,r' \end{matrix}\right. \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}'') : -\gamma(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'')$$

und für die von u und u′ verschiedenen Ecken des Vierseits 93 oder 93′

$$\text{Punkt}\left\{\begin{matrix} Q'\,r \\ Q\,R \end{matrix}\right. \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1'') : -\gamma(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_1'')$$

$$\text{Punkt}\left\{\begin{matrix} q\,r' \\ q'\,R' \end{matrix}\right. \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : -\beta(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1''') : \gamma(\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}_1''')$$

97.

$$\text{Punkt}\left\{\begin{matrix} Q'\,r \\ q'\,R' \end{matrix}\right. \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : \beta(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_1''') : -\gamma(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1''')$$

$$\text{Punkt}\left\{\begin{matrix} q\,r' \\ Q\,R \end{matrix}\right. \ldots x:y:z = 2\beta\gamma : -\beta(\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}_1'') : \gamma(\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_1'')$$

Für die Gerade $\mathrm{I}a = \left\{\begin{matrix} Q\,R' \\ Q'\,r' \end{matrix}\right. \ldots \left\{\begin{matrix} q'\,Q \\ q\,r \end{matrix}\right.$ erhalten wir nun mittelst der Koordinaten dieser Punkte die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{2}, & \gamma y, & \beta z \\ 1, & -(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}''), & \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'' \\ 1, & \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''', & -(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}''') \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.: $$\frac{1}{2} A x + \gamma B y + \beta C z = 0, \text{ wo}$$

$A = (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'')(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}''') - (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'')(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''') = 2(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}\mathfrak{A}''')$. $B = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}'''$, $C = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}'''$, woraus, da wir, A, B, C mit demselben Faktur b c multiplizieren dürfen,

$$A = -\frac{16\triangle\beta(h_a^2 - \alpha^2)}{c},\ B = 8\triangle\alpha,\ C = 8\triangle h_a.$$

Somit

$$\text{Gerade I}a \ldots -\frac{(h_a^2 - \alpha^2)\beta x}{c} + \gamma\alpha y + h_a \beta z = 0.$$

Aber $h_a^2 - \alpha^2 = b c \cos A$, $\gamma\alpha = b\beta\cos B$, $h_a = b \sin C$, und wir erhalten so die erste der Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Gerade Ia} \ldots & -x\cos A + y\cos B + z\sin C = 0 \\ \text{Gerade IIa} \ldots & -x\cos A + y\sin B + z\cos C = 0 \\ \text{Gerade IIIa} \ldots & x\cos A - y\cos B + z\sin C = 0 \\ \text{Gerade IVa} \ldots & x\cos A + y\sin B - z\cos C = 0. \end{array} \qquad 98.$$

Der Schnittpunkt der Geraden Ia und IIa ist

$$x \sim \cos(B + C) = -\cos A,\ y \sim -\cos A(\sin C - \cos C),$$
$$z \sim -\cos A(\sin B - \cos B),\ \text{d. h. } x : y : z =$$
$$1 : \sin C - \cos C : \sin B - \cos B.$$

Und als Schnittpunkt der Geraden IIIa und IVa finden wir

$$x : y : z = -1 : \sin C + \cos C : \sin B + \cos B.$$

Aus den Gleichungen 98 verifizieren wir also, dass Ia und IIa sich im Punkte i′ und dass IIIa und IVa sich im Punkte I′ schneiden.

Aus 98 geht ferner unmittelbar hervor:

Die Geraden Ia und IIIa schneiden sich und die Seite AB im Fusspunkte F des Höhenperpendikels CF, und die Geraden IIa und IVa schneiden sich und die Seite CA im Fusspunkte E des Höhenperpendikels BE. 99.

Dieses in Verbindung mit 68 und 36 ergibt die nachstehende direkte Konstruktion der Geraden Ia, IIa, IIIa, IVa:

Seien i′ und J′ die Endpunkte des zu BC senkrechten Durchmessers im Kreise um BC als Durchmesser (i′ auf derselben Seite von BC aus wie die Ecke A), so sind die Strahlen, die man durch den Fusspunkt E des Höhenperpendikels BE nach den Punkten i′ und J′ zieht, die Geraden IIa und IVa und die Strahlen, die man durch den Fusspunkt F des Höhenperpendikels CF nach den Punkten i′ und J′ zieht, sind die Geraden Ia und IIIa. 100.

Aus dieser Konstruktion 100 verbunden mit den Gleichungen 98 folgt auch:

Die Punkte auf BC, für welche

$$y : z = \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\cos C}, \text{ oder } y : z = -\frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\cos C}$$

sind resp. die Schnittpunkte von BC mit den Geraden EJ' und Ei'. 101.

Und die Punkte auf BC, für welche

$$y:z = \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\sin C}, \text{ oder } y:z = \frac{1}{\cos B} : -\frac{1}{\sin B}$$

sind respektive die Schnittpunkte von BC mit den Geraden FJ' und Fi'.

Im Vierseit Ia, IIa, IIIa, IVa haben wir also als Paare von Gegenpunkten einmal i' und J' und das andere mal E und F. Bestimmen wir jetzt das dritte Paar von Gegenpunkten, nämlich die Schnittpunkte Ia, IVa und IIa, IIIa.

Für den Punkt Ia, IVa erhalten wir aus den Gleichungen 98

$$x \sim \cos(B - C),\ y \sim (\cos C - \sin C)\cos A,\ z \sim (\cos B + \sin B)\cos A. \qquad 102.$$

Und für den Punkt IIIa, IIa

$$x \sim \cos(B - C),\ y \sim (\cos C + \sin C)\cos A,\ z \sim (\cos B - \sin B)\cos A. \qquad 103.$$

Als Gleichung der dritten Diagonale unseres Vierseits ergibt sich hieraus

$$\begin{vmatrix} \frac{x\cos A}{\cos(B - C)}, & y, & z, \\ 1, & \cos C - \sin C, & \cos B + \sin B \\ 1, & \cos C + \sin C, & \cos B - \sin B \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{x\cos A}{\cos(B - C)}\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C} = 0,$$

wo

$$\mathfrak{A} = -2\sin(B + C) = -2\sin A,\ \mathfrak{B} = 2\sin B,\ \mathfrak{C} = 2\sin C.$$

Die Gleichung der dritten Diagonale ist also

$$-\frac{x\cos A\sin A}{\cos(B - C)} + y\sin B + z\sin C = 0. \qquad 104.$$

Diese Diagonale schneidet somit die Seite BC in demselben Punkte, wo die Gerade $ax + by + cz = 0$, d. h. die unendlichferne Gerade. Die dritte Diagonale des Vierseits Ia IIa IIIa IVa ist somit der Seite BC des Stammdreiecks parallel.

Berechnen wir die Distanz dieser Diagonalen von der Seite B C. Diese Distanz ist gleich dem wahren Werte der x-Koordinate in den Ausdrücken 102 und 103. In 102 sei $x = \lambda \cos(B - C)$, $y = \lambda(\cos C - \sin C)\cos A$, $z = \lambda(\cos B + \sin B)\cos A$. Aber $ax + by + cz = 2\triangle$, und somit $\frac{2\triangle}{\lambda} =$ $= a\cos(B - C) + b(\cos C - \sin C)\cos A + c(\cos B + \sin B)\cos A =$ $= a\cos(B - C) + a\cos A = 2a\sin B\sin C$. Somit $\lambda = \frac{\triangle}{a\sin B\sin b} =$ $= R$, wo R der Umkreisradius des Dreiecks A B C.

Für die Distanz der Diagonalen $\left.\begin{matrix}\mathrm{Ia}\\ \mathrm{IVa}\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}\mathrm{IIa}\\ \mathrm{IIIa}\end{matrix}\right.$ von der Seite B C erhalten wir somit $x = R\cos(B - C)$.

Wenn aber O der Mittelpunkt des Umkreises von A B C und H der Höhenpunkt, so ist $\sphericalangle\, OAH = C - B$. Zieht man also durch O eine Parallele zu B C, welche Parallele das Höhenperpendikel A D in s trifft, so ist $sA = R\cos(C - B)$. Macht man also auf A D die Strecke $D\alpha = sA$ oder $A\alpha = O\mathfrak{A}$, so ist α der Schnittpunkt der in Rede stehenden Diagonalen mit A D. Aber $AH = 2 \cdot O\mathfrak{A}$ und wir finden schliesslich:

Die zu BC parallele Gerade $\left.\begin{matrix}\mathrm{Ia}\\ \mathrm{IVa}\end{matrix}\right\}\ldots\left\{\begin{matrix}\mathrm{IIa}\\ \mathrm{IIIa}\end{matrix}\right.$ schneidet das Höhenperpendikel AD in der Mitte α des Eckabschnittes AH.

Es ist α der Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck A E F, und wir behaupten nun, dass die Punkte

$$(\mathrm{Ia}, \mathrm{IVa}) = \mathrm{Va} \text{ und } (\mathrm{IIa}, \mathrm{IIIa}) = \mathrm{Wa} \qquad 105.$$

die Endpunkte des zu B C parallelen Durchmessers dieses Umkreises seien. In der Tat, wenn wir wieder den Kreis um B C als Durchmesser betrachten, so ist

$$\sphericalangle\, E\,\mathrm{Va}\,F = \frac{\text{Bogen } F B I' - \text{Bogen } E i'}{2} =$$
$$= \frac{(i' B I' - i' F) - (E i' F - i' F)}{2} = \frac{B I' C - E i' F}{2}, \qquad \text{d. h.}$$

$\sphericalangle\, E\,\mathrm{Va}\,F = EAF$. Der Punkt Va liegt somit auf dem Umkreis des Dreiecks A E F und analog der Punkt Wa, und da wir anderseits wissen, dass die Gerade Va Wa durch den Mittelpunkt α des letztern Kreises geht, und zu B C parallel ist, so ist unsere Behauptung erwiesen.

In dem von den Geraden Ia, IIa, IIIa, IVa gebildeten Vierseit sind also zwei Gegenecken im Kreise um BC als Durchmesser die Endpunkte i′ und I′ des zu BC senkrechten Durchmessers, zwei andere Gegenecken sind die Fusspunkte E und F der Höhenper- 106.
pendikel BE und CF des Stammdreiecks ABC, und das dritte Paar Gegenecken sind im Kreise um AH als Durchmesser die Endpunkte Va und Wa des zu AH senkrechten Durchmessers.

Eine Verifikation dieses Satzes erhalten wir wie folgt: Es ist EF die gemeinsame Sehne der Kreise um BC und um AH als Durchmesser, daher steht die Gerade $\mathfrak{A}\alpha$ senkrecht zu EF und geht durch die Mitte von EF. Die Mitten der drei Diagonalen I′ i′, EF, Va Wa des obigen Vierseits liegen somit in einer Geraden, w. s. s.

§ 15.

Betrachten wir neben dem obigen Vierseite noch die analogen, die sich respektive auf C A und A B beziehen, so schneiden sich also drei sich entsprechende Diagonalen der drei Vierseite im Umkreiszentrum O des Stammdreiecks, drei andere sich entsprechende Diagonalen bilden das Dreieck der Höhenfusspunkte des Stammdreiecks, und die drei übrigen sich entsprechenden Diagonalen bilden ein zum Stammdreieck paralleles und kongruentes Dreieck, das mit jenem Umkreiszentrum und Höhenpunkt gegenseitig vertauscht und gemeinsamen Neunpunktkreis hat; der Mittelpunkt dieses Neunpunktkreises ist das Ähnlichkeitszentrum der beiden Dreiecke.

Die Gleichungen für die Seiten der zu Ia, IIa, IIIa, IVa zwei analogen Vierseite erhalten wir aus 98 mittelst des Buchstabenrades:

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade Ib} \;..\; x \sin A - y \cos B + z \cos C = 0\\
&\text{Gerade IIb} \;..\; x \cos A - y \cos B + z \sin C = 0\\
&\text{Gerade IIIb} \;..\; x \sin A + y \cos B - z \cos C = 0\\
&\text{Gerade IVb} \;..\; - x \cos A + y \cos B + z \sin C = 0,
\end{aligned} \qquad 98'.$$

und