Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 13
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

γ auf dem Kreise λ, δ' auf dem Kreise μ, ε' auf dem Kreise ν. Aber γ und δ' liegen auch auf dem Kreise um $\mathrm{u\,v'}$ als Durchmesser, und daher ist $\mathrm{h'}\gamma \cdot \mathrm{h'u} = \mathrm{h'}\delta' \cdot \mathrm{h'v'}$ und analog $= \mathrm{h'}\varepsilon' \cdot \mathrm{h'w'}$. Der Punkt $\mathrm{h'}$ hat daher in Bezug auf die Kreise λ, μ, ν dieselbe Potenz, und liegt somit auf der gemeinsamen Potenzlinie dieser drei Kreise. Dasselbe gilt von den Höhenpunkten der drei übrigen im Vierseit U enthaltenen Dreiecke. Die Höhenpunkte der im Vierseit U enthaltenen vier Dreiecke liegen daher ebenfalls auf der Eulerschen Geraden OH des Stammdreiecks ABC.

Diese vier Höhenpunkte liegen bekanntlich auf der Leitlinie der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Wir können daher auch sagen: Die Leitlinie der dem Vierseit U eingeschriebenen Parabel ist die Eulersche Gerade 87.
des Dreiecks ABC.

Die Diagonalen $\mathrm{u\,u'}$, $\mathrm{v\,v'}$, $\mathrm{w\,w'}$ des Vierseits U sind spezielle Fälle der dem Vierseit U eingeschriebenen Kegelschnitte, und wir können die respektive um $\mathrm{u\,u'}$, $\mathrm{v\,v'}$ $\mathrm{w\,w'}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise als die Orte der Scheitel der diese Kegelschnitte $\mathrm{u\,u'}$, $\mathrm{v\,v'}$, $\mathrm{w\,w'}$ umgleitenden rechten Winkel auffassen. Allgemein gilt nun der Satz: Für die einem gegebenen Vierseit eingeschriebene Schar von Kegelschnitten bilden die Ortskreise der Scheitel der je einen dieser Kegelschnitte umgleitenden rechten Winkel ein Kreisbüschel. Jedem Kegelschnitte der dem Vierseit U eingeschriebenen Schar entspricht so als Ort des Scheitels des diesen Kegelschnitt umgleitenden rechten Winkels ein Kreis des Büschels, dem die Kreise λ, μ, ν angehören, oder des Büschels, 88.
das zum Umkreise und zum Neunpunktkreise des Stammdreiecks ABC orthogonal ist, und dessen Grundpunkte somit auf der Eulerschen Geraden von Dreieck ABC liegen.

§ 13.

In 64′ haben wir die Koordinaten der Punkte $\mathrm{i'}$ und $\mathrm{I'}$ aufgestellt, und mittelst des Buchstabenrades erhalten wir hieraus die Koordinaten von $\mathrm{k'}$, $\mathrm{K'}$ und von $\mathrm{l'}$, $\mathrm{L'}$. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Dreiecke $\mathrm{i'\,k'\,l'}$ und $\mathrm{I'\,K'\,L'}$ zum Stammdreieck ABC perspektivisch liegen. Denn wir erhalten aus 64′

$$\text{Strahl } A\,i' \ldots \frac{y}{z} = \frac{\sin(C - 45^0)}{\sin(B - 45^0)},$$

und analog für die Strahlen $B\,k'$ und $C\,l'$. Die drei Strahlen $A\,i'$, $B\,k'$, $C\,l'$ schneiden sich also in einem nämlichen Punkte, für welchen

$$x : y : z = \frac{1}{\sin(A - 45^0)} : \frac{1}{\sin(B - 45^0)} : \frac{1}{\sin(C - 45^0)} \cdot \quad 89.$$

Analog die Strahlen $A\,I'$, $B\,K'$, $C\,L'$ schneiden sich in einem nämlichen Punkte, für welchen

$$x : y : z = \frac{1}{\sin(A + 45^0)} : \frac{1}{\sin(B + 45^0)} : \frac{1}{\sin(C + 45^0)} \cdot \quad 89'.$$

Nehmen wir die inversen Punkte dieser beiden perspektivischen Zentren in Bezug auf das Dreieck $A\,B\,C$, d. h. die Punkte

$$x : y : z = \sin(A - 45^0) : \sin(B - 45^0) : \sin(C - 45^0) \quad \text{und}$$
$$x : y : z = \sin(A + 45^0) : \sin(B + 45^0) : \sin(C + 45^0),$$

so ergibt sich für die Verbindungsgerade dieser zwei letztern Punkte:

$$x \sin(B - C) + y \sin(C - A) + z \sin(A - B) = 0.$$

Dieses ist aber die Verbindungsgerade des Umkreiszentrums des Dreiecks $A\,B\,C$ mit dem Gegenschwerpunkte oder Punkt von Lemoine von $A\,B\,C$, oder derjenige Durchmesser des Brocardschen Kreises von $A\,B\,C$, der senkrecht steht zur Verbindungslinie der beiden Brocardschen Punkte von $A\,B\,C$.

Das perspektivische Zentrum selber der Dreiecke $i'\,k'\,l'$ und $A\,B\,C$, sowie dasjenige der Dreiecke $I'\,K'\,L'$ und $A\,B\,C$, liegen somit auf der inversen Kurve der obigen Geraden d. h, auf demjenigen dem Dreieck $A\,B\,C$ umschriebenen Kegelschnitte, der durch den Schwerpunkt von $A\,B\,C$ und durch den inversen Punkt des Umkreismittelpunktes d. h. durch den Höhenpunkt von $A\,B\,C$ geht, d. h.: Das perspektivische Zentrum der Dreiecke $i'\,k'\,l'$ und $A\,B\,C$, sowie das perspektivische Zentrum der Dreiecke $I'\,K'\,L'$ und $A\,B\,C$ liegen auf derjenigen **90.**

dem Dreieck ABC umschriebenen rechtwinkligen Hyperbel, die durch den Schwerpunkt von ABC geht, oder auf der sogenannten Hyperbel von Kiepert.

Nach der bekannten Grundeigenschaft der Hyperbel von Kiepert folgt dies auch unmittelbar daraus, dass die Dreiecke B i′ C, C k′ A, A l′ B gleichschenklig und einander ähnlich sind, und analog die Dreiecke B I′ C, C K′ A, A L′ B.

Ferner haben wir:

Die Dreiecke i′ k′ l′ und I′ K′ L′ liegen auch zu
einander perspektivisch, und das perspektivische 91.
Zentrum derselben ist der Umkreismittelpunkt des
Stammdreiecks ABC.

§ 14.

Stellen wir endlich die Gleichungen der Seiten der beiden Vierseite auf, deren Diagonalen laut 33 neben BC einmal die dort mit Ia und IIa bezeichneten sich in i′ scheidenden Geraden, und das andermal die sich in I′ schneidenden Geraden IIIa und IVa sind. Die Seiten des ersten dieser Vierseite sind Q R′, q′ R, Q′ r′, q r und diejenigen des zweiten Vierseits Q′ r, q r′, Q R, q′ R′.

In 51 haben wir die Koordinaten der Punkte q, q′, Q, Q′, r, r′, R, R′, und wir erhalten hieraus als Gleichung der Geraden Q R′:

$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)x, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)y, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)z \\ c\gamma, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)\beta, & -a\alpha \\ b\beta, & a\alpha, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.: $$-\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)A\,x+\left(\frac{h}{b}-\beta\right)B\,y+\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)C\,z=0,$$ wo

$$A=\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\left\{\beta\gamma+\left(\frac{h}{b}+\beta\right)\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)\right\}=$$

$$=\frac{2\triangle}{bc}\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)(2\triangle+b\beta-c\gamma)$$