Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 13
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

γ auf dem Kreise λ, δ' auf dem Kreise μ, ε' auf dem Kreise ν. Aber γ und δ' liegen auch auf dem Kreise um u v' als Durchmesser, und daher ist $h'\gamma \cdot h'u = h'\delta' \cdot h'v'$ und analog $= h'\varepsilon' \cdot h'w'$. Der Punkt h' hat daher in Bezug auf die Kreise λ, μ, ν dieselbe Potenz, und liegt somit auf der gemeinsamen Potenzlinie dieser drei Kreise. Dasselbe gilt von den Höhenpunkten der drei übrigen im Vierseit U enthaltenen Dreiecke. Die Höhenpunkte der im Vierseit U enthaltenen vier Dreiecke liegen daher ebenfalls auf der Eulerschen Geraden OH des Stammdreiecks ABC.

Diese vier Höhenpunkte liegen bekanntlich auf der Leitlinie der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Wir können daher auch sagen: Die Leitlinie der dem Vierseit U eingeschriebenen Parabel ist die Eulersche Gerade 87.
des Dreiecks ABC.

Die Diagonalen u u', v v', w w' des Vierseits U sind spezielle Fälle der dem Vierseit U eingeschriebenen Kegelschnitte, und wir können die respektive um u u', v v' w w' als Durchmesser beschriebenen Kreise als die Orte der Scheitel der diese Kegelschnitte u u', v v', w w' umgleitenden rechten Winkel auffassen. Allgemein gilt nun der Satz: Für die einem gegebenen Vierseit eingeschriebene Schar von Kegelschnitten bilden die Ortskreise der Scheitel der je einen dieser Kegelschnitte umgleitenden rechten Winkel ein Kreisbüschel. Jedem Kegelschnitte der dem Vierseit U eingeschriebenen Schar entspricht so als Ort des Scheitels des diesen Kegelschnitt umgleitenden rechten Winkels ein Kreis des Büschels, dem die Kreise λ, μ, ν angehören, oder des Büschels, 88.
das zum Umkreise und zum Neunpunktkreise des Stammdreiecks ABC orthogonal ist, und dessen Grundpunkte somit auf der Eulerschen Geraden von Dreieck ABC liegen.

§ 13.

In 64' haben wir die Koordinaten der Punkte i' und I' aufgestellt, und mittelst des Buchstabenrades erhalten wir hieraus die Koordinaten von k', K' und von l', L'. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass die Dreiecke i' k' l' und I' K' L' zum Stammdreieck ABC perspektivisch liegen. Denn wir erhalten aus 64'

$$\text{Strahl } A\,i' \ldots \frac{y}{z} = \frac{\sin(C - 45^0)}{\sin(B - 45^0)},$$

und analog für die Strahlen B k′ und C l′. Die drei Strahlen A i′, B k′, C l′ schneiden sich also in einem nämlichen Punkte, für welchen

$$x : y : z = \frac{1}{\sin(A - 45^0)} : \frac{1}{\sin(B - 45^0)} : \frac{1}{\sin(C - 45^0)} \cdot \quad 89.$$

Analog die Strahlen A I′, B K′, C L′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte, für welchen

$$x : y : z = \frac{1}{\sin(A + 45^0)} : \frac{1}{\sin(B + 45^0)} : \frac{1}{\sin(C + 45^0)} \cdot \quad 89'.$$

Nehmen wir die inversen Punkte dieser beiden perspektivischen Zentren in Bezug auf das Dreieck ABC, d. h. die Punkte

$$x : y : z = \sin(A - 45^0) : \sin(B - 45^0) : \sin(C - 45^0) \quad \text{und}$$

$$x : y : z = \sin(A + 45^0) : \sin(B + 45^0) : \sin(C + 45^0),$$

so ergibt sich für die Verbindungsgerade dieser zwei letztern Punkte:

$$x \sin(B - C) + y \sin(C - A) + z \sin(A - B) = 0.$$

Dieses ist aber die Verbindungsgerade des Umkreiszentrums des Dreiecks ABC mit dem Gegenschwerpunkte oder Punkt von Lemoine von ABC, oder derjenige Durchmesser des Brocardschen Kreises von ABC, der senkrecht steht zur Verbindungslinie der beiden Brocardschen Punkte von ABC.

Das perspektivische Zentrum selber der Dreiecke i′ k′ l′ und ABC, sowie dasjenige der Dreiecke I′ K′ L′ und ABC, liegen somit auf der inversen Kurve der obigen Geraden d. h, auf demjenigen dem Dreieck ABC umschriebenen Kegelschnitte, der durch den Schwerpunkt von ABC und durch den inversen Punkt des Umkreismittelpunktes d. h. durch den Höhenpunkt von ABC geht, d. h.: Das perspektivische Zentrum der Dreiecke i′ k′ l′ und ABC, sowie das perspektivische Zentrum der Dreiecke I′ K′ L′ und ABC liegen auf derjenigen 90.

dem Dreieck ABC umschriebenen rechtwinkligen Hyperbel, die durch den Schwerpunkt von ABC geht, oder auf der sogenannten Hyperbel von Kiepert.

Nach der bekannten Grundeigenschaft der Hyperbel von Kiepert folgt dies auch unmittelbar daraus, dass die Dreiecke B i′ C, C k′ A, A l′ B gleichschenklig und einander ähnlich sind, und analog die Dreiecke B I′ C, C K′ A, A L′ B.

Ferner haben wir:

Die Dreiecke i′ k′ l′ und I′ K′ L′ liegen auch zu einander perspektivisch, und das perspektivische 91. Zentrum derselben ist der Umkreismittelpunkt des Stammdreiecks ABC.

§ 14.

Stellen wir endlich die Gleichungen der Seiten der beiden Vierseite auf, deren Diagonalen laut 33 neben BC einmal die dort mit Ia und IIa bezeichneten sich in i′ scheidenden Geraden, und das andermal die sich in I′ schneidenden Geraden IIIa und IVa sind. Die Seiten des ersten dieser Vierseite sind Q R′, q′ R, Q′ r′, q r und diejenigen des zweiten Vierseits Q′ r, q r′, Q R, q′ R′.

In 51 haben wir die Koordinaten der Punkte q, q′, Q, Q′, r, r′, R, R′, und wir erhalten hieraus als Gleichung der Geraden Q R′:

$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)x, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)y, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)z \\ c\gamma, & \left(\frac{h}{b}-\beta\right)\beta, & -a\alpha \\ b\beta, & a\alpha, & \left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.: $-\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)Ax+\left(\frac{h}{b}-\beta\right)By+\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)Cz=0$, wo

$$A=\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)\left\{\beta\gamma+\left(\frac{h}{b}+\beta\right)\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)\right\}=$$

$$=\frac{2\triangle}{bc}\left(\frac{h}{b}-\beta\right)\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)(2\triangle+b\beta-c\gamma)$$