Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 10
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

$$\left.\begin{matrix} i\,k\,L \\ I\,K\,l \\ a\,b\,c \end{matrix}\right\} \ldots \text{ gemeins. perspektiv. Zentrum} = S'''. \qquad 58.$$

Und die Punkte u, u′, v, v′, w, w′ sind bestimmt durch:

$$\left.\begin{matrix} A\,S\,S' \\ B\,C \end{matrix}\right\} = u, \quad \left.\begin{matrix} B\,S\,S'' \\ C\,A \end{matrix}\right\} = v, \quad \left.\begin{matrix} C\,S\,S''' \\ A\,B \end{matrix}\right\} = w,$$

$$\left.\begin{matrix} A\,S''\,S''' \\ B\,C \end{matrix}\right\} = u', \quad \left.\begin{matrix} B\,S'''\,S' \\ C\,A \end{matrix}\right\} = v', \quad \left.\begin{matrix} C\,S'\,S'' \\ A\,B \end{matrix}\right\} = w'. \qquad 59.$$

Aus den Coordinaten der Punkte S, S′, S″, S‴ erhalten wir endlich für die Gleichungen der harmonischen Polaren dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck A B C:

$$\text{Gerade } u'\,v'\,w' \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o$$

$$\text{Gerade } u'\,v\,w \ldots -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o$$

$$\text{Gerade } u\,v'\,w \ldots \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o \qquad 60.$$

$$\text{Gerade } u\,v\,w' \ldots \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o.$$

§ 10.

Laut den in 50 gegebenen Coordinaten der Punkte k und l wird die Gleichung der Geraden k l:

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{\alpha}, & y, & z \\ \frac{1}{c\,\gamma}, & \frac{1}{\frac{h}{b} - \beta}, & \frac{\gamma}{a\,\alpha} \\ \frac{1}{b\,\beta}, & \frac{\beta}{a\,\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $\frac{\mathfrak{A}\,x}{\alpha} + \mathfrak{B}\,y + \mathfrak{C}\,z = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} - \frac{\beta\,\gamma}{a^2\,\alpha^2}, \text{ oder gemäss 47:}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right) - \beta\gamma}{a^2\,\alpha^2} = \frac{2\triangle(2\triangle + b\beta + c\gamma)}{a^2\,\alpha^2\,bc} =$$

$$= \frac{2\triangle + b\beta + c\gamma}{2Ra\alpha^2}.$$

Ferner:

$$\mathfrak{B} = \frac{\gamma}{ab\alpha\beta} - \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{c\gamma^2\frac{h}{c} - c\gamma^3 - ab\alpha\beta}{abc\alpha\beta\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)}.$$

In Folge von 49 ist der Zähler $= c\gamma^2\frac{h}{c} - 2\triangle\gamma\frac{h}{c} = 2\triangle\gamma\left(\gamma - \frac{h}{c}\right)$. Also wird $\mathfrak{B} = -\frac{2\triangle}{abc\alpha\beta}$, oder schliesslich $\mathfrak{B} = -\frac{1}{2R\alpha\beta}$ und analog $\mathfrak{C} = -\frac{1}{2R\gamma\alpha}$.

Wir finden so die erste der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade kl} \ldots \frac{(2\triangle + b\beta + c\gamma)\,x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o\\
&\text{Gerade KL} \ldots \frac{(2\triangle - b\beta - c\gamma)\,x}{a\alpha^2} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o\\
&\text{Gerade kL} \ldots \frac{(2\triangle + b\beta - c\gamma)\,x}{a\alpha^2} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = o\\
&\text{Gerade Kl} \ldots \frac{(2\triangle - b\beta + c\gamma)\,x}{a\alpha^2} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = o,
\end{aligned} \qquad 61.$$

und mittelst des Buchstabenrades erhalten wir hieraus die Gleichungen der analogen Geraden li, LI, lI, Li und ik, IK, iK, Ik.

Aus den Gleichungen 61 geht unmittelbar hervor:

Die Geraden kl und KL schneiden sich und die Gerade BC im Punkte u'. Und die Geraden kL und Kl schneiden sich und die Gerade BC im Punkte u, d. h wir haben:

$$\left.\begin{matrix}kL\\Kl\end{matrix}\right\} = u, \quad \left.\begin{matrix}lI\\Li\end{matrix}\right\} = v, \quad \left.\begin{matrix}iK\\Ik\end{matrix}\right\} = w,$$

$$\left.\begin{matrix}kl\\KL\end{matrix}\right\} = u', \quad \left.\begin{matrix}li\\LI\end{matrix}\right\} = v', \quad \left.\begin{matrix}ik\\IK\end{matrix}\right\} = w', \qquad 62.$$