Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 8
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

hervorgehenden Geraden haben wir 36, zusammen 111 voneinander verschiedene Gerade. Hiezu kommen noch die vier durch den Höhenpunkt H gehenden Geraden 21 und die sechs Geraden in 33, 36, 35. Im ganzen gehören also unserer Figur 121 voneinander verschiedene Gerade an.

§ 8.

Bestimmen wir jetzt die wesentlichsten der oben behandelten Punkte und Geraden mittelst auf das Dreieck A B C bezogenen trimetrischen Normalcoordinaten.

Es ist $\overline{DI}^2 = BD \cdot DC = bc \cos B \cos C$. Schreiben wir also zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{bc \cos B \cos C},\ \beta = \sqrt{ca \cos C \cos A},\ \gamma = \sqrt{ab \cos A \cos B}, \qquad 41.$$

wo wir unter α, β, γ stets positive Grössen verstehen, so haben wir

$$\left.\begin{matrix} Di \\ DI \end{matrix}\right\} = \pm \alpha,\ \left.\begin{matrix} Ek \\ EK \end{matrix}\right\} = \pm \beta,\ \left.\begin{matrix} Fl \\ FL \end{matrix}\right\} = \pm \gamma. \qquad 42.$$

Seien ferner h_a, h_b, h_c die Höhenperpendikel des Dreiecks A B C

$$DA = h_a,\ EB = h_b,\ FC = h_c, \qquad 43.$$

wo also

$$h_a = \sqrt{bc \sin B \sin C},\ h_b = \sqrt{ca \sin C \sin A},\ h_c = \sqrt{ab \sin A \sin B}, \qquad 44.$$

so sind die Coordinaten der Punkte i und I

$$i \ldots x = \alpha,\ y = \left(h_a - \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a - \alpha\right) \cos B,$$

$$I \ldots x = -\alpha,\ y = \left(h_a + \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a + \alpha\right) \cos B.$$

Die eingeführten Grössen $\alpha, \beta\ \gamma, h_a, h_b, h_c$ betreffend wollen wir einige Relationen zusammenstellen, die uns in der Folge von Nutzen sein werden. Wir haben

$$\cos A = \frac{\beta\gamma}{a\alpha},\quad \cos B = \frac{\gamma\alpha}{b\beta},\quad \cos C = \frac{\alpha\beta}{c\gamma}, \tag{45.}$$

und ferner

$$h_a^2 - \alpha^2 = b c \cos A = \frac{b\beta \cdot c\gamma}{a\alpha},\quad h_b^2 - \beta^2 = c a \cos B = \frac{c\gamma \cdot a\alpha}{b\beta},$$
$$h_c^2 - \gamma^2 = a b \cos C = \frac{a\alpha \cdot b\beta}{c\gamma}, \tag{46.}$$

wie sich entweder aus 41 und 44 ergibt, oder auch direkt aus der Figur, indem $h_a^2 - \alpha^2 = Ai \cdot AI$ die Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis um BC als Durchmesser darstellt, und somit $h_a^2 - \alpha^2 = AE \,.\, AC = bc \cos A$ ist, w · z · z.

Ferner ist

$$\left(h_b^2 - \beta^2\right)\left(h_c^2 - \gamma^2\right) = a^2\alpha^2,\quad \left(h_c^2 - \gamma^2\right)\left(h_a^2 - \alpha^2\right) = b^2\beta^2,$$
$$\left(h_a^2 - \alpha^2\right)\left(h_b^2 - \beta^2\right) = c^2\gamma^2. \tag{47.}$$

Stellt $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks ABC und R den Radius des Umkreises dar, so merken wir uns noch

$$h_a = \frac{2\triangle}{a} = \frac{bc}{2R},\quad h_b = \frac{2\triangle}{b} = \frac{ca}{2R},\quad h_c = \frac{2\triangle}{c} = \frac{ab}{2R},$$

und

$$\frac{4\triangle}{abc} = \frac{1}{R},\quad R = \frac{\triangle}{a \sin B \sin C},\ \text{u. s. w.} \tag{48.}$$

Endlich haben wir

$$a\alpha^3 + bc\beta\gamma = 2\triangle h_a \alpha,\quad b\beta^3 + ca\gamma\alpha = 2\triangle h_b \beta,$$
$$c\gamma^3 + ab\alpha\beta = 2\triangle h_c \gamma. \tag{49.}$$

Die erste dieser Formeln erhält man sehr leicht, wenn man linker Hand $\alpha^2 = bc \cos B \cos C$ und $\beta\gamma = a\alpha \cos A$ substituiert.

Mit Benutzung von 45 ergaben sich nun aus den obigen Coordinaten von i und I für diese und die analogen Punkte die folgenden Coordinatenverhältnisse

	x,	y,	z
i	$\dfrac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}$,	$\dfrac{\beta}{c\gamma}$,	$\dfrac{\gamma}{b\beta}$,
I	$-\dfrac{1}{\frac{h}{a}+\alpha}$,	$\dfrac{\beta}{c\gamma}$,	$\dfrac{\gamma}{b\beta}$,
k	$\dfrac{\alpha}{c\gamma}$,	$\dfrac{1}{\frac{h}{b}-\beta}$,	$\dfrac{\gamma}{a\alpha}$,
K	$\dfrac{\alpha}{c\gamma}$,	$-\dfrac{1}{\frac{h}{b}+\beta}$,	$\dfrac{\gamma}{a\alpha}$,
l	$\dfrac{\alpha}{b\beta}$,	$\dfrac{\beta}{a\alpha}$,	$\dfrac{1}{\frac{h}{c}-\gamma}$,
L	$\dfrac{\alpha}{b\beta}$,	$\dfrac{\beta}{a\alpha}$,	$-\dfrac{1}{\frac{h}{c}+\gamma}$.

50.

Hieraus

$$\text{Gerade Ck} \,..\, \frac{x}{y} = \frac{\alpha\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{c\gamma}, \quad \text{Gerade CK} \,..\, \frac{x}{y} = -\frac{\alpha\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{c\gamma},$$

$$\text{Gerade Bl} \,..\, \frac{z}{x} = \frac{b\beta}{\alpha\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}, \quad \text{Gerade BL} \,..\, \frac{z}{x} = -\frac{b\beta}{\alpha\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Für die Coordinaten der Punkte $p = \begin{cases} Ck \\ Bl \end{cases}$, $P = \begin{cases} CK \\ BL \end{cases}$, $p' = \begin{cases} Ck \\ BL \end{cases}$, $P' = \begin{cases} CK \\ Bl \end{cases}$, und der hieraus mittelst des Buchstabenrades hervorgehenden v. 4 erhalten wir daher das folgende Tableau:

	x,	y,	z		x,	y,	z
p	$\alpha,$	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}-\beta},$	$\frac{b\beta}{\frac{h}{c}-\gamma}$	p′	$\alpha,$	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}-\beta},$	$-\frac{b\beta}{\frac{h}{c}+\gamma}$
q	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$\beta,$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}-\gamma}$	q′	$-\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$\beta,$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}-\gamma}$
r	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}-\beta},$	γ	r′	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$-\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}+\beta},$	γ
P	$-\alpha,$	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}+\beta},$	$\frac{b\beta}{\frac{h}{c}+\gamma}$	P′	$\alpha,$	$-\frac{c\gamma}{\frac{h}{b}+\beta},$	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}-\gamma}$
Q	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$-\beta,$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}+\gamma}$	Q′	$\frac{c\gamma}{\frac{h}{a}-\alpha},$	$\beta,$	$-\frac{a\alpha}{\frac{h}{c}+\gamma}$
R	$\frac{b\beta}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}+\beta},$	$-\gamma$	R′	$-\frac{b\beta}{\frac{h}{a}+\alpha},$	$\frac{a\alpha}{\frac{h}{b}-\beta},$	γ

51.

und hieraus kommt für die Strahlen A p, A P, A p′, A P′ und die daraus durch das Buchstabenrad hervorgehenden:

$$A\,p\,..\,\frac{y}{z}=\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)},\quad B\,q\,..\,\frac{z}{x}=\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)},$$

$$C\,r\,..\,\frac{x}{y}=\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)},$$

$$A\,P\,..\,\frac{y}{z}=\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)},\quad B\,Q\,..\,\frac{z}{x}=\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)},\qquad 52.$$

$$\text{CR}\ldots\frac{x}{y}=\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}, \tag{52.}$$

$$\text{Ap}'\ldots\frac{y}{z}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)},\quad \text{Bq}'\ldots\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)},$$

$$\text{Cr}'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)},$$

$$\text{AP}'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)},\quad \text{BQ}'\ldots\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)},$$

$$\text{CR}'\ldots\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{\alpha}+\alpha\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n, wo

$$n\ldots x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP, BQ, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N, wo

$$N\ldots x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq′, CR′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte n′ wo

$$n'\ldots x:y:z=-\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}. \tag{53.}$$

Die Strahlen AP, BQ′, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N′, wo 53.

$$N' \ldots x:y:z = -\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte n″, wo

$$n'' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ, CR′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N″, wo

$$N'' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ′, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n‴, wo

$$n''' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq′, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N‴, wo

$$N''' \ldots x:y:z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Als Gleichung der Geraden nN ergibt sich hieraus

$$\begin{vmatrix} a\alpha x, & b\beta y, & c\gamma z \\ \frac{1}{\frac{h}{a}-\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}-\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}-\gamma} \\ \frac{1}{\frac{h}{a}+\alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b}+\beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c}+\gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $a\alpha\mathfrak{A}x + b\beta\mathfrak{B}y + c\gamma\mathfrak{C}x = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{2\left(\beta\frac{h}{c} - \gamma\frac{h}{b}\right)}{\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)}$$

und wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sich aus $\mathfrak{A}$ mittelst des Buchstabenrades ergeben. In Folge von 47 und 48 kommt nun $a\,\alpha\,\mathfrak{A} = \frac{4\triangle(b\beta - c\gamma)}{a\,b\,c\,\alpha} = \frac{b\beta - c\gamma}{R\,\alpha}$, und wir erhalten die erste der folgenden Gleichungen

$$\text{Gerade } n\,N \,..\, \frac{(b\beta - c\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\gamma - a\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\alpha - b\beta)\,z}{\gamma} = o$$

$$\text{Gerade } n'\,N' \,..\, \frac{(b\beta - c\gamma)\,x}{\alpha} - \frac{(c\gamma + a\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\alpha + b\beta)\,z}{\gamma} = o$$

54.

$$\text{Gerade } n''\,N'' \,..\, \frac{(b\beta + c\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\gamma - a\alpha)\,y}{\beta} - \frac{(a\alpha + b\beta)\,z}{\gamma} = o$$

$$\text{Gerade } n'''\,N''' \,..\, - \frac{(b\beta + c\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\gamma + a\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\alpha - b\beta)\,z}{\gamma} = o.$$

Die Gleichungen der Geraden $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ entstehen aus der Gleichung der Geraden $n\,N$, wenn in dieser α in $-\alpha$, oder β in $-\beta$, oder γ in $-\gamma$ umgesetzt wird.

Allen diesen vier Geraden in 54 genügt der Punkt

$$x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2.$$

Dieses ist aber der Höhenpunkt H des Dreiecks A B C, denn H als Winkelgegenpunkt des Umkreiszentrums O hat die Coordinaten $x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$, das heisst gemäss 45 $x \sim \frac{a\,\alpha}{\beta\gamma} = \frac{a\,\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$, und somit $x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2$, w. z. z.

Die vier Geraden $n\,N$, $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ gehen daher alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC.

Auf diesen Geraden liegen auch respektive die Punkte $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma$, deren Bedeutung wir in § 9 kennen lernen werden.

§ 9.

Bilden wir jetzt die Gleichung der Geraden p P.