Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 8
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

hervorgehenden Geraden haben wir 36, zusammen 111 voneinander verschiedene Gerade. Hiezu kommen noch die vier durch den Höhenpunkt H gehenden Geraden 21 und die sechs Geraden in 33, 36, 35. Im ganzen gehören also unserer Figur 121 voneinander verschiedene Gerade an.

§ 8.

Bestimmen wir jetzt die wesentlichsten der oben behandelten Punkte und Geraden mittelst auf das Dreieck A B C bezogenen trimetrischen Normalcoordinaten.

Es ist $\overline{DI}^2 = BD \cdot DC = bc \cos B \cos C$. Schreiben wir also zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{bc \cos B \cos C},\ \beta = \sqrt{ca \cos C \cos A},\ \gamma = \sqrt{ab \cos A \cos B}, \quad 41.$$

wo wir unter α, β, γ stets positive Grössen verstehen, so haben wir

$$\left.\begin{matrix} Di \\ DI \end{matrix}\right\} = \pm\alpha,\ \left.\begin{matrix} Ek \\ EK \end{matrix}\right\} = \pm\beta,\ \left.\begin{matrix} Fl \\ FL \end{matrix}\right\} = \pm\gamma. \quad 42.$$

Seien ferner h_a, h_b, h_c, die Höhenperpendikel des Dreiecks A B C

$$DA = h_a,\ EB = h_b,\ FC = h_c, \quad 43.$$

wo also

$$h_a = \sqrt{bc \sin B \sin C},\ h_b = \sqrt{ca \sin C \sin A},\ h_c = \sqrt{ab \sin A \sin B}, \quad 44.$$

so sind die Coordinaten der Punkte i und I

$$i \ldots x = \alpha,\ y = \left(h_a - \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a - \alpha\right) \cos B,$$

$$I \ldots x = -\alpha,\ y = \left(h_a + \alpha\right) \cos C,\ z = \left(h_a + \alpha\right) \cos B.$$

Die eingeführten Grössen $\alpha, \beta\ \gamma, h_a, h_b, h_c$ betreffend wollen wir einige Relationen zusammenstellen, die uns in der Folge von Nutzen sein werden. Wir haben

$$\cos A = \frac{\beta\gamma}{a\alpha}, \quad \cos B = \frac{\gamma\alpha}{b\beta}, \quad \cos C = \frac{\alpha\beta}{c\gamma}, \qquad 45.$$

und ferner

$$\begin{gathered} h_a^2 - \alpha^2 = bc\cos A = \frac{b\beta \cdot c\gamma}{a\alpha}, \quad h_b^2 - \beta^2 = ca\cos B = \frac{c\gamma \cdot a\alpha}{b\beta}, \\ h_c^2 - \gamma^2 = ab\cos C = \frac{a\alpha \cdot b\beta}{c\gamma}, \end{gathered} \qquad 46.$$

wie sich entweder aus 41 und 44 ergibt, oder auch direkt aus der Figur, indem $h_a^2 - \alpha^2 = Ai \cdot AI$ die Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis um BC als Durchmesser darstellt, und somit $h_a^2 - \alpha^2 = AE \,.\, AC = bc\cos A$ ist, w · z · z.

Ferner ist

$$\begin{gathered} \left(h_b^2 - \beta^2\right)\left(h_c^2 - \gamma^2\right) = a^2\alpha^2, \quad \left(h_c^2 - \gamma^2\right)\left(h_a^2 - \alpha^2\right) = b^2\beta^2, \\ \left(h_a^2 - \alpha^2\right)\left(h_b^2 - \beta^2\right) = c^2\gamma^2. \end{gathered} \qquad 47.$$

Stellt $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks ABC und R den Radius des Umkreises dar, so merken wir uns noch

$$h_a = \frac{2\triangle}{a} = \frac{bc}{2R}, \quad h_b = \frac{2\triangle}{b} = \frac{ca}{2R}, \quad h_c = \frac{2\triangle}{c} = \frac{ab}{2R},$$

und

$$\frac{4\triangle}{abc} = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{\triangle}{a\sin B\sin C}, \text{ u. s. w.} \qquad 48.$$

Endlich haben wir

$$\begin{gathered} a\alpha^3 + bc\beta\gamma = 2\triangle\, h_a\alpha, \quad b\beta^3 + ca\gamma\alpha = 2\triangle\, h_b\beta, \\ c\gamma^3 + ab\alpha\beta = 2\triangle\, h_c\gamma. \end{gathered} \qquad 49.$$

Die erste dieser Formeln erhält man sehr leicht, wenn man linker Hand $\alpha^2 = bc\cos B\cos C$ und $\beta\gamma = a\alpha\cos A$ substituiert.

Mit Benutzung von 45 ergaben sich nun aus den obigen Coordinaten von i und I für diese und die analogen Punkte die folgenden Coordinatenverhältnisse

	x,	y,	z
i	$\frac{1}{h_a - \alpha}$,	$\frac{\beta}{c\gamma}$,	$\frac{\gamma}{b\beta}$,
I	$-\frac{1}{h_a + \alpha}$,	$\frac{\beta}{c\gamma}$,	$\frac{\gamma}{b\beta}$,
k	$\frac{\alpha}{c\gamma}$,	$\frac{1}{h_b - \beta}$,	$\frac{\gamma}{a\alpha}$,
K	$\frac{\alpha}{c\gamma}$,	$-\frac{1}{h_b + \beta}$,	$\frac{\gamma}{a\alpha}$,
l	$\frac{\alpha}{b\beta}$,	$\frac{\beta}{a\alpha}$,	$\frac{1}{h_c - \gamma}$,
L	$\frac{\alpha}{b\beta}$,	$\frac{\beta}{a\alpha}$,	$-\frac{1}{h_c + \gamma}$.

50.

Hieraus

Gerade Ck .. $\frac{x}{y} = \frac{\alpha\left(h_b - \beta\right)}{c\gamma}$, Gerade CK .. $\frac{x}{y} = -\frac{\alpha\left(h_b + \beta\right)}{c\gamma}$,

Gerade Bl .. $\frac{z}{x} = \frac{b\beta}{\alpha\left(h_c - \gamma\right)}$, Gerade BL .. $\frac{z}{x} = -\frac{b\beta}{\alpha\left(h_c + \gamma\right)}$.

Für die Coordinaten der Punkte $p = \begin{cases} Ck \\ Bl \end{cases}$, $P = \begin{cases} CK \\ BL \end{cases}$, $p' = \begin{cases} Ck \\ BL \end{cases}$, $P' = \begin{cases} CK \\ Bl \end{cases}$, und der hieraus mittelst des Buchstabenrades hervorgehenden v. 4 erhalten wir daher das folgende Tableau:

	x,	y,	z		x,	y,	z
p	α,	$\frac{c\gamma}{h_b-\beta}$,	$\frac{b\beta}{h_c-\gamma}$	p′	α,	$\frac{c\gamma}{h_b-\beta}$,	$-\frac{b\beta}{h_c+\gamma}$
q	$\frac{c\gamma}{h_a-\alpha}$,	β,	$\frac{a\alpha}{h_c-\gamma}$	q′	$-\frac{c\gamma}{h_a+\alpha}$,	β,	$\frac{a\alpha}{h_c-\gamma}$
r	$\frac{b\beta}{h_a-\alpha}$,	$\frac{a\alpha}{h_b-\beta}$,	γ	r′	$\frac{b\beta}{h_a-\alpha}$,	$-\frac{a\alpha}{h_b+\beta}$,	γ
P	$-\alpha$,	$\frac{c\gamma}{h_b+\beta}$,	$\frac{b\beta}{h_c+\gamma}$	P′	α,	$-\frac{c\gamma}{h_b+\beta}$,	$\frac{b\beta}{h_a-\gamma}$
Q	$\frac{c\gamma}{h_a+\alpha}$,	$-\beta$,	$\frac{a\alpha}{h_c+\gamma}$	Q′	$\frac{c\gamma}{h_a-\alpha}$,	β,	$-\frac{a\alpha}{h_c+\gamma}$
R	$\frac{b\beta}{h_a+\alpha}$,	$\frac{a\alpha}{h_b+\beta}$,	$-\gamma$	R′	$-\frac{b\beta}{h_a+\alpha}$,	$\frac{a\alpha}{h_b-\beta}$,	γ

51.

und hieraus kommt für die Strahlen A p, A P, A p′, A P′ und die daraus durch das Buchstabenrad hervorgehenden:

$$\mathrm{A\,p}\,..\,\frac{y}{z}=\frac{c\gamma\left(h_c-\gamma\right)}{b\beta\left(h_b-\beta\right)},\quad \mathrm{B\,q}\,..\,\frac{z}{x}=\frac{a\alpha\left(h_a-\alpha\right)}{c\gamma\left(h_c-\gamma\right)},$$

$$\mathrm{C\,r}\,..\,\frac{x}{y}=\frac{b\beta\left(h_b-\beta\right)}{a\alpha\left(h_a-\alpha\right)},$$

$$\mathrm{A\,P}\,..\,\frac{y}{z}=\frac{c\gamma\left(h_c+\gamma\right)}{b\beta\left(h_b+\beta\right)},\quad \mathrm{B\,Q}\,..\,\frac{z}{x}=\frac{a\alpha\left(h_a+\alpha\right)}{c\gamma\left(h_c+\gamma\right)},$$

52.

52.

$$CR\,..\,\frac{x}{y}=\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)},$$

$$Ap'\,..\,\frac{y}{z}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)},\quad Bq'\,..\,\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)},$$

$$Cr'\,..\,\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)},$$

$$AP'\,..\,\frac{x}{y}=-\frac{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)},\quad BQ'\,..\,\frac{z}{x}=-\frac{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)},$$

$$CR'\,..\,\frac{x}{y}=-\frac{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}{a\alpha\left(\frac{h}{\alpha}+\alpha\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n, wo

$$n\,...\,x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}-\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP, BQ, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N, wo

$$N\,...\,x:y:z=\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}+\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}+\gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap, Bq', CR' schneiden sich in einem nämlichen Punkte n' wo

$$n'...x:y:z=-\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a}+\alpha\right)}:\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b}-\beta\right)}:\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c}-\gamma\right)}.$$ 53.

Die Strahlen AP, BQ′, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N′, wo 53.

$$N' \ldots x : y : z = -\frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b} + \beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq, Cr′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte n″, wo

$$n'' \ldots x : y : z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b} + \beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ, CR′ schneiden sich in einem nämlichen Punkte N″, wo

$$N'' \ldots x : y : z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a} + \alpha\right)} : -\frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b} - \beta\right)} : \frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)}.$$

Die Strahlen Ap′, BQ′, Cr schneiden sich in einem nämlichen Punkte n‴, wo

$$n''' \ldots x : y : z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a} - \alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b} - \beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)}.$$

Die Strahlen AP′, Bq′, CR schneiden sich in einem nämlichen Punkte N‴, wo

$$N''' \ldots x : y : z = \frac{1}{a\alpha\left(\frac{h}{a} + \alpha\right)} : \frac{1}{b\beta\left(\frac{h}{b} + \beta\right)} : -\frac{1}{c\gamma\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)}.$$

Als Gleichung der Geraden nN ergibt sich hieraus

$$\begin{vmatrix} a\alpha x, & b\beta y, & c\gamma z \\ \frac{1}{\frac{h}{a} - \alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b} - \beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c} - \gamma} \\ \frac{1}{\frac{h}{a} + \alpha}, & \frac{1}{\frac{h}{b} + \beta}, & \frac{1}{\frac{h}{c} + \gamma} \end{vmatrix} = o,$$

d. h.: $a\alpha\mathfrak{A}x + b\beta\mathfrak{B}y + c\gamma\mathfrak{C}x = o$, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\left(\frac{h}{b} - \beta\right)\left(\frac{h}{c} + \gamma\right)} - \frac{1}{\left(\frac{h}{b} + \beta\right)\left(\frac{h}{c} - \gamma\right)} = \frac{2\left(\beta\frac{h}{c} - \gamma\frac{h}{b}\right)}{\left(\frac{h^2}{b} - \beta^2\right)\left(\frac{h^2}{c} - \gamma^2\right)}$$

und wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sich aus $\mathfrak{A}$ mittelst des Buchstabenrades ergeben. In Folge von 47 und 48 kommt nun $a\,\alpha\,\mathfrak{A} = \frac{4\triangle(b\beta - c\gamma)}{a\,b\,c\,\alpha} = \frac{b\beta - c\gamma}{R\alpha}$, und wir erhalten die erste der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{Gerade } n\,N\,.. && \frac{(b\beta - c\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\gamma - a\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\alpha - b\beta)\,z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade } n'\,N'\,.. && \frac{(b\beta - c\gamma)\,x}{\alpha} - \frac{(c\gamma + a\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\alpha + b\beta)\,z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade } n''\,N''\,.. && \frac{(b\beta + c\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\gamma - a\alpha)\,y}{\beta} - \frac{(a\alpha + b\beta)\,z}{\gamma} = o \\
&\text{Gerade } n'''\,N'''\,.. && -\frac{(b\beta + c\gamma)\,x}{\alpha} + \frac{(c\gamma + a\alpha)\,y}{\beta} + \frac{(a\alpha - b\beta)\,z}{\gamma} = o.
\end{aligned} \qquad 54.$$

Die Gleichungen der Geraden $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ entstehen aus der Gleichung der Geraden $n\,N$, wenn in dieser α in $-\alpha$, oder β in $-\beta$, oder γ in $-\gamma$ umgesetzt wird.

Allen diesen vier Geraden in 54 genügt der Punkt

$$x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2.$$

Dieses ist aber der Höhenpunkt H des Dreiecks A B C, denn H als Winkelgegenpunkt des Umkreiszentrums O hat die Coordinaten $x : y : z = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$, das heisst gemäss 45 $x \sim \frac{a\,\alpha}{\beta\gamma} = \frac{a\,\alpha^2}{\alpha\beta\gamma}$, und somit $x : y : z = a\,\alpha^2 : b\,\beta^2 : c\,\gamma^2$, w. z. z.

Die vier Geraden $n\,N$, $n'\,N'$, $n''\,N''$, $n'''\,N'''$ gehen daher alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC.

Auf diesen Geraden liegen auch respektive die Punkte $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = -\alpha : \beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : -\beta : \gamma$, $x : y : z = \alpha : \beta : -\gamma$, deren Bedeutung wir in § 9 kennen lernen werden.

§ 9.

Bilden wir jetzt die Gleichung der Geraden p P.