

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1911)

**Artikel:** Zur Geometrie des Dreiecks  
**Autor:** Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.  
**Kapitel:** 7  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319223>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

u und u' der dritte Diagonalpunkt. Die Punkte, wo Ia und IIa die Seite BC schneiden, sind respektive harmonisch zum Schnittpunkte i' von Ia und IIa in Bezug auf je die beiden ersten in 33 angegebenen Punkte der 37. Geraden Ia und IIa. Die Geraden Ia und IIa liegen harmonisch zu den Geraden i'uI und i'iu', und analog liegen IIIa, und IVa harmonisch zu I'ui und I'Iu'.

§ 7.

In unserer Figur gehen durch den Punkt u fünfzehn voneinander verschiedene Gerade, die fünf Systeme von je vier harmonischen Strahlen bilden:

$$\begin{array}{ll}
 uu'BC, uHPp; uKl, ukL & \dots 16 \\
 uu'BC, uASS'; uv'w, uvw' & \dots 26 \\
 uHPp, uASS'; uNn', unN' & \dots 30 \quad 38. \\
 uu'BC, uIi'; uQR', uq'R & \dots 32 \\
 uu'BC, uiI'; uQ'r, uqr' & \dots 32
 \end{array}$$

Analog durch den Punkt u':

$$\begin{array}{ll}
 u'uBC, u'HP'p'; u'KL, u'kl & \dots 17 \\
 u'uBC, u'AS''S'''; u'vw, u'v'w' & \dots 26 \\
 u'HP'p', u'AS''S'''; u'N''N''', u'n''n''' & \dots 30 \quad 39. \\
 u'uBC, u'II'; u'QR, u'q'R' & \dots 32 \\
 u'uBC, u'ii'; u'Q'r', u'qr & \dots 32
 \end{array}$$

Das Buchstabenrad gibt die analogen Geraden durch die Punkte v, v', w, w'.

Wo auf einer dieser Geraden in 38 oder 39 vier Buchstaben auftreten, so stellen diese je ein System von vier harmonischen Punkten dar.

Wo nur drei Punkte auf einer dieser Geraden auftreten, so lässt sich der vierte harmonische Punkt immer leicht ergänzen z. B.:

Der auf uKl zu l harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle BLp'P. Siehe 18.

Der auf ukL zu L harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle BlpP'. Siehe 18.

Der auf  $u v' w$  zu  $w$  harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle, der  $C$  mit dem Punkte  $\begin{cases} A u \\ B v' \end{cases}$  verbindet.

Der auf  $u v w'$  zu  $w'$  harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle, der  $C$  mit dem Punkte  $\begin{cases} A u \\ B v \end{cases}$  verbindet.

Der auf  $N n' u$  zu  $u$  und der auf  $n N' u$  zu  $u$  harmonische Punkt sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Höhenperpendikel  $AH$  des Stammdreiecks. Siehe 15.

Die auf  $I i' u$  und auf  $i I' u$  je zu  $u$  harmonischen Punkte sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der in  $u'$  auf  $BC$  errichteten Senkrechten.

Auf  $u Q R'$  und auf  $u q' R$  sind die zu  $u$  harmonischen Punkte die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Strahle  $I u'$ .

Auf  $u Q' r$  und auf  $u q r'$  sind die zu  $u$  harmonischen Punkte die Schnittpunkte mit dem Strahle  $i u'$ .

Durch jede Ecke des Stammdreiecks  $ABC$  gehen in unserer Figur dreizehn Gerade, die je neun Systeme von vier harmonischen Strahlen bilden.

So durch die Ecke  $A$  die Geraden:

$AB w w'$ ,	$AL Q Q'$ ;	$AP N N'$ ,	$Ap' N'' n'''$	
$AB w w'$ ,	$Al q q'$ ;	$Ap n n''$ ,	$AP' n'' N'''$	
$AC v v'$ ,	$AK R r'$ ;	$AP N N'$ ,	$AP' n'' N'''$	
$AC v v'$ ,	$Akr R'$ ;	$Ap n n'$ ,	$Ap' N'' n'''$	
$AB w w'$ ,	$AHiI$ ;	$AK R r'$ ,	$Akr R'$	40.
$AC v v'$ ,	$AHiI$ ;	$AL Q Q'$ ,	$Al q q'$	
$AB w w'$ ,	$AC v v'$ ;	$Au SS'$ ,	$Au' S'' S'''$	
$Au SS'$ ,	$AHiI$ ;	$AP N N'$ ,	$Ap n n'$	
$Au' S'' S'''$ ,	$AHiI$ ;	$AP' n'' N'''$ ,	$Ap' N'' n'''$	

nach 5, 8, 15, 18, 25.

Die entsprechenden Geraden durch die Ecken  $B$  und  $C$  ergeben sich aus 40 mittelst des Buchstabenrades.

Auf jeder dieser Geraden in 40 bilden die vier angegebenen Punkte ein System von vier harmonischen Punkten.

In 38 und 39 und den hieraus durch das Buchstabenrad hervorgehenden Geraden haben wir 81, in 40 und den hieraus

Hervorgehenden Geraden haben wir 36, zusammen 111 voneinander verschiedene Gerade. Hiezu kommen noch die vier durch den Höhenpunkt H gehenden Geraden 21 und die sechs Geraden in 33, 36, 35. Im ganzen gehören also unserer Figur 121 voneinander verschiedene Gerade an.

### § 8.

Bestimmen wir jetzt die wesentlichsten der oben behandelten Punkte und Geraden mittelst auf das Dreieck A B C bezogenen trimetrischen Normalcoordinaten.

Es ist  $\overline{DI}^2 = BD \cdot DC = bc \cos B \cos C$ . Schreiben wir also zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{bc \cos B \cos C}, \beta = \sqrt{ca \cos C \cos A}, \gamma = \sqrt{ab \cos A \cos B}, \quad 41.$$

wo wir unter  $\alpha, \beta, \gamma$  stets positive Grössen verstehen, so haben wir

$$\left. \begin{matrix} Di \\ DI \end{matrix} \right\} = \pm \alpha, \quad \left. \begin{matrix} Ek \\ EK \end{matrix} \right\} = \pm \beta, \quad \left. \begin{matrix} Fl \\ FL \end{matrix} \right\} = \pm \gamma. \quad 42.$$

Seien ferner  $\frac{h}{a}, \frac{h}{b}, \frac{h}{c}$ , die Höhenperpendikel des Dreiecks A B C

$$DA = \frac{h}{a}, \quad EB = \frac{h}{b}, \quad FC = \frac{h}{c}, \quad 43.$$

wo also

$$\frac{h}{a} = \sqrt{bc \sin B \sin C}, \quad \frac{h}{b} = \sqrt{ca \sin C \sin A}, \quad \frac{h}{c} = \sqrt{ab \sin A \sin B}, \quad 44.$$

so sind die Coordinaten der Punkte i und I

$$\begin{aligned} i \dots x &= \alpha, \quad y = \left( \frac{h}{a} - \alpha \right) \cos C, \quad z = \left( \frac{h}{a} - \alpha \right) \cos B, \\ I \dots x &= -\alpha, \quad y = \left( \frac{h}{a} + \alpha \right) \cos C, \quad z = \left( \frac{h}{a} + \alpha \right) \cos B. \end{aligned}$$

Die eingeführten Grössen  $\alpha, \beta, \gamma, \frac{h}{a}, \frac{h}{b}, \frac{h}{c}$  betreffend wollen wir einige Relationen zusammenstellen, die uns in der Folge von Nutzen sein werden. Wir haben