

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 6
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319223>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

§ 6.

In § 4 hatten wir mit y und z die Schnittpunkte der Geraden $HQqv$ und $HRrw$ mit BC bezeichnet, und gefunden $(v, H, y, q, Q) \sim (w, H, z, r, R)$. Da diese Punktsysteme perspektivisch liegen, so folgt dass vw, yz, qr, QR durch einen nämlichen Punkt gehen. Aber vw schneidet yz d. h. BC in u' , und somit finden wir $\begin{cases} QR \\ qr \end{cases} = u'$.

Projizieren wir aber das Höhenperpendikel $AHDI$ von B aus auf $R'r'$ und von C aus auf $Q'q'$, und bezeichnen die Schnittpunkte der Geraden $HQ'q'v'$ und $HR'r'w'$ mit BC respektive durch y' und z' , so ergibt sich $(v', H, y', Q', q') \sim (w', H, z', r', R')$, und hieraus $\begin{cases} Q'r' \\ q'R' \end{cases} = u'$.

Ferner haben wir $(v, H, y, q, Q) \sim (w, H, z, r, R)$, und $(v', H, y', Q', q') \sim (w, H, z, r, R)$, woraus

$$\begin{cases} qr' \\ QR' \end{cases} = u \text{ und } \begin{cases} Q'r' \\ q'R' \end{cases} = u.$$

Durch die Punkte u, u', v, v', w, w' gehen also noch je die folgenden vier Strahlen:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} uQR' \\ uq'R \\ uQ'r \\ uqr' \end{array} \left. \begin{array}{c} vRP' \\ vr'P \\ vR'p \\ vr'p' \end{array} \right\}, \begin{array}{c} wPQ' \\ wp'Q \\ wP'q \\ wp'q' \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\}, \\ \begin{array}{c} u'QR \\ u'q'R' \\ u'Q'r' \\ u'qr \end{array} \left. \begin{array}{c} v'RP \\ v'r'P' \\ v'R'p' \\ v'r'p \end{array} \right\}, \begin{array}{c} w'PQ \\ w'p'Q' \\ w'P'q' \\ w'pq \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\}. \end{array} \quad 31.$$

Und aus den harmonischen Relationen 15 ergeben sich die harmonischen Strahlsysteme:

$$\frac{uQR'}{uq'R} = -1, \frac{vRP'}{vr'P} = -1, \frac{wPQ'}{wp'Q} = -1, \\ \frac{u}{u'BC} = -1, \frac{v}{v'CA} = -1, \frac{w}{w'AB} = -1, \\ uI \qquad \qquad vK \qquad \qquad wL$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 u Q' r \\
 u q' r' \\
 u u' B C \\
 u i
 \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l}
 v R' p \\
 v r p' \\
 v v' C A \\
 v k
 \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l}
 w P' q \\
 w p q' \\
 w w' A B \\
 w l
 \end{array} \right\} = -1, \\
 \left. \begin{array}{l}
 u' Q R \\
 u' q' R' \\
 u' u B C \\
 u' I
 \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l}
 v' R P \\
 v' r' P' \\
 v' v C A \\
 v' K
 \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l}
 w' P Q \\
 w' p' Q \\
 w' w A B \\
 w' L
 \end{array} \right\} = -1, \\
 \left. \begin{array}{l}
 u' Q' r' \\
 u' q r \\
 u' u B C \\
 u' i
 \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l}
 v' R' p' \\
 v' r p \\
 v' v C A \\
 v' k
 \end{array} \right\} = -1, \quad \left. \begin{array}{l}
 w' P' q' \\
 w' p q \\
 w' w A B \\
 w' l
 \end{array} \right\} = -1.
 \end{array} \quad 32.$$

Zufolge 11 pag. 6, 7 pag. 4, 31 pag. 12 haben wir ferner die perspektivisch liegenden Dreiecke:

Dreiecke	Persp. Zentrum	Persp. Axe
A B C, P Q R, p q r	... H, n, N	... u' v' w'
A B C, P Q' r', p q' R'	... H, n', N'	... u' v w
A B C, p' Q R', P' q r'	... H, n'', N''	... u v' w
A B C, P' q' R, p' Q' r	... H, n''', N'''	... u v w'

d. h in der ersten Zeile:

Dreiecke	Persp. Zentrum	Persp. Axe
P Q R, p q r	... H	... u' v' w'
p q r, A B C	... n	... u' v' w'
A B C, P Q R	... N	... u' v' w'

und analog in den folgenden Zeilen.

Vergleichen wir in 32 eines der durch u gehenden Systeme mit den beiden durch u' gehenden Systemen, so haben dieselben je den Strahl $u u' B C$ gemein und liegen somit perspektivisch. Es liegen daher je in einer Geraden die Punkte:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 u Q R' \\
 u' Q R
 \end{array} \right\} = Q, \quad \left. \begin{array}{l}
 u q' R \\
 u' q' R'
 \end{array} \right\} = q', \quad \left. \begin{array}{l}
 u I \\
 u' I
 \end{array} \right\} = I \\
 \left. \begin{array}{l}
 u Q R' \\
 u' q' R'
 \end{array} \right\} = R', \quad \left. \begin{array}{l}
 u q' R \\
 u' Q R
 \end{array} \right\} = R, \quad \left. \begin{array}{l}
 u I \\
 u' I
 \end{array} \right\} = I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \left. \begin{array}{l} u Q R' \\ u' Q' r' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q' R \\ u' q r \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u I \\ u' i \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} u Q R' \\ u' q r \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q' R \\ u' Q' r' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u I \\ u' i \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} u Q' r \\ u' Q R \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q r' \\ u' q' R' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u i \\ u' I \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} u Q' r \\ u' q' R' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q r' \\ u' Q R \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u i \\ u' I \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} u Q' r \\ u' Q' r' \end{array} \right\} = Q', \quad \left. \begin{array}{l} u q r' \\ u' q r \end{array} \right\} = q, \quad \left. \begin{array}{l} u i \\ u' i \end{array} \right\} = i \\
 \left. \begin{array}{l} u Q' r \\ u' q r \end{array} \right\} = r, \quad \left. \begin{array}{l} u q r' \\ u' Q' r' \end{array} \right\} = r, \quad \left. \begin{array}{l} u i \\ u' i \end{array} \right\} = i.
 \end{array}$$

Von diesen 8 Geraden sind die zwei erstern und die zwei letztern schon durch die Definitionen 4 der Punkte $Q, q, Q', q', R, r, R', r'$ gegeben; aus diesen Definitionen gehen nämlich die Geraden hervor (Qq', IC) , $(Q'q, iC)$, $(R'R, IB)$, (rr', iB) , und laut 15 sind die hier auftretenden Punktenpaare je zu einander harmonisch.

Die vier mittleren Geraden aber im obigen Tableau sind neu, und auf denselben liegen 4 mal je 3 von 10 neuen Punkten. Und durch das Buchstabenrad erhalten wir in unserer Figur 30 neue Punkte, von denen 12 mal je 3 in einer neuen Geraden liegen:

$$\begin{array}{ll}
 \left. \begin{array}{l} u Q R' \\ u' Q' r' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q' R \\ u' q r \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u I \\ u' i \end{array} \right\} \dots \text{Gerade Ia} \\
 \left. \begin{array}{l} u Q R' \\ u' q r \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q' R \\ u' Q' r' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u I \\ u' i \end{array} \right\} \dots \text{Gerade IIa} \\
 \left. \begin{array}{l} u Q' r \\ u' Q R \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q r' \\ u' q' R' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u i \\ u' I \end{array} \right\} \dots \text{Gerade IIIa} \\
 \left. \begin{array}{l} u Q' r \\ u' q' R' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u q r' \\ u' Q R \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u i \\ u' I \end{array} \right\} \dots \text{Gerade IVa}
 \end{array}$$

33.

$$\begin{array}{ll}
 \text{und:} \quad \left. \begin{array}{l} v R P' \\ v' R' p' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} v r' P \\ v' r p \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} v K \\ v' k \end{array} \right\} \dots \text{Gerade Ib} \\
 \left. \begin{array}{l} v R P' \\ v' r p \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} v r' P \\ v' R' p' \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} v K \\ v' k \end{array} \right\} \dots \text{Gerade IIb}
 \end{array}$$

34.

$$\begin{array}{l} \{ v R' p, v r p' \}, \{ v k \} \dots \text{Gerade IIIb} \\ \{ v' R P \}, \{ v' r' P' \}, \{ v' K \} \\ \{ v R' p, v r p' \}, \{ v k \} \dots \text{Gerade IVb} \\ \{ v' r' P' \}, \{ v' R P \}, \{ v' K \} \end{array}$$

34.

und:

$$\begin{array}{l} \{ w P Q', w p' Q \}, \{ w L \} \dots \text{Gerade Ic} \\ \{ w' P' q' \}, \{ w' p q \}, \{ w' l \} \\ \{ w P Q' \}, \{ w p' R \}, \{ w L \} \dots \text{Gerade IIc} \\ \{ w' p q \}, \{ w' P' q' \}, \{ w' l \} \\ \{ w P' q \}, \{ w p q' \}, \{ w l \} \dots \text{Gerade IIIc} \\ \{ w' P Q \}, \{ w' p' Q' \}, \{ w' L \} \\ \{ w P' q \}, \{ w p q' \}, \{ w l \} \dots \text{Gerade IVc.} \\ \{ w' p' Q' \}, \{ w' P Q \}, \{ w' L \} \end{array}$$

35.

Wir werden aber in der Folge sehen, dass von diesen 12 Geraden 33, 34, 35 nur 6 voneinander verschieden sind, indem

$$Ib = IVc, IIc = IIIb$$

$$Ic = IVa, IIa = IIIc$$

$$Ia = IVb, IIb = IIIa.$$

Die Strahlen iu und Iu mögen den Kreis um BC als Durchmesser wieder respektive in I' und i' schneiden, so gehen die Geraden ii' und II' durch den zu u in Bezug auf BC harmonischen Punkt, also durch u' .

Der obige Punkt $\begin{cases} u I \\ u' i \end{cases} = i' = \begin{cases} Ia \\ IIa \end{cases}$ und der Punkt $\begin{cases} u i \\ u' I \end{cases} = I' = \begin{cases} IIIa \\ IVa \end{cases}$ liegen also auf dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise symmetrisch zu BC , und der Punkt \mathfrak{A} , wo die zu BC senkrechte Gerade $i' I'$ die Seite BC schneidet, ist der zum Höhenfusspunkte D in Bezug auf die Strecke uu' harmonische Punkt.

In dem von den Geraden $u Q R'$, $u q' R$, $u' Q' r'$, $u' q r$ gebildeten Vierseit sind die Geraden Ia und IIa die beiden von uu' verschiedenen Diagonalen, und der Punkt $\begin{cases} u I \\ u' i \end{cases} = i'$ ist neben

36.

u und u' der dritte Diagonalpunkt. Die Punkte, wo Ia und IIa die Seite BC schneiden, sind respektive harmonisch zum Schnittpunkte i' von Ia und IIa in Bezug auf je die beiden ersten in 33 angegebenen Punkte der 37. Geraden Ia und IIa. Die Geraden Ia und IIa liegen harmonisch zu den Geraden i'uI und i'u', und analog liegen IIIa, und IVa harmonisch zu I'uI und I'u'.

§ 7.

In unserer Figur gehen durch den Punkt u fünfzehn voneinander verschiedene Gerade, die fünf Systeme von je vier harmonischen Strahlen bilden:

u u' BC, u HPp; u Kl, u k L ... 16	
u u' BC, u ASS'; u v' w, u vw' ... 26	
u HPp, u ASS'; u Nn', u nN' ... 30	38.
u u' BC, u II'; u QR', u q'R ... 32	
u u' BC, u ii'; u Q'r, u q r' ... 32	

Analog durch den Punkt u':

u' u BC, u' HP'p'; u' Kl, u' k l ... 17	
u' u BC, u' AS'S'''; u' vw, u' v'w' ... 26	
u' HP'p', u' AS''S'''; u' N''N''', u' n''n''' ... 30	39.
u' u BC, u' II'; u' QR, u' q'R' ... 32	
u' u BC, u' ii'; u' Q'r, u' q r' ... 32	

Das Buchstabenrad gibt die analogen Geraden durch die Punkte v, v', w, w'.

Wo auf einer dieser Geraden in 38 oder 39 vier Buchstaben auftreten, so stellen diese je ein System von vier harmonischen Punkten dar.

Wo nur drei Punkte auf einer dieser Geraden auftreten, so lässt sich der vierte harmonische Punkt immer leicht ergänzen z. B.:

Der auf u Kl zu l harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle B L p'P. Siehe 18.

Der auf u k L zu L harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle B l p'P. Siehe 18.