Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 6
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

§ 6.

In § 4 hatten wir mit y und z die Schnittpunkte der Geraden HQqv und HRrw mit BC bezeichnet, und gefunden (v, H, y, q, Q) $\sim$ (w, H, z, r, R). Da diese Punktsysteme perspektivisch liegen, so folgt dass vw, yz, qr, QR durch einen nämlichen Punkt gehen. Aber vw schneidet yz d. h. BC in u′, und somit finden wir $\left.\begin{matrix} QR \\ qr \end{matrix}\right\} = u'$.

Projizieren wir aber das Höhenperpendikel AHDiI von B aus auf R′r′ und von C aus auf Q′q′, und bezeichnen die Schnittpunkte der Geraden HQ′q′v′ und HR′r′w′ mit BC respektive durch y′ und z′, so ergibt sich (v′, H, y′, Q′, q′) $\sim$ (w′, H, z′, r′, R′), und hieraus $\left.\begin{matrix} Q'r' \\ q'R' \end{matrix}\right\} = u'$.

Ferner haben wir (v, H, y, q, Q) $\sim$ (w′, H, z′, r′, R′), und (v′ H, y′, Q′, q′) $\sim$ (w, H, z, r, R), woraus

$$\left.\begin{matrix} qr' \\ QR' \end{matrix}\right\} = u \text{ und } \left.\begin{matrix} Q'r \\ q'R \end{matrix}\right\} = u.$$

Durch die Punkte u, u′, v, v′, w, w′ gehen also noch je die folgenden vier Strahlen:

$$\begin{matrix} \left.\begin{matrix} uQR' \\ uq'R \\ uQ'r \\ uqr' \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} vRP' \\ vr'P \\ vR'p \\ vrp' \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} wPQ' \\ wp'Q \\ wP'q \\ wpq' \end{matrix}\right\}, \\ \left.\begin{matrix} u'QR \\ u'q'R' \\ u'Q'r' \\ u'qr \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} v'RP \\ v'r'P' \\ v'R'p' \\ v'rp \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} w'PQ \\ w'p'Q' \\ w'P'q' \\ w'pq \end{matrix}\right\}. \end{matrix} \tag{31.}$$

Und aus den harmonischen Relationen 15 ergeben sich die harmonischen Strahlsysteme:

$$\frac{\begin{matrix} uQR' \\ uq'R \end{matrix}}{\begin{matrix} uu'BC \\ uI \end{matrix}} = -1, \quad \frac{\begin{matrix} vRP' \\ vr'P \end{matrix}}{\begin{matrix} vv'CA \\ vK \end{matrix}} = -1, \quad \frac{\begin{matrix} wPQ' \\ wp'Q \end{matrix}}{\begin{matrix} ww'AB \\ wL \end{matrix}} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q'\,r \\ \underline{u\,q\,r'} \\ u\,u'\,B\,C \\ u\,i \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v\,R'\,p \\ \underline{v\,r\,p'} \\ v\,v'\,C\,A \\ v\,k \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w\,P'\,q \\ \underline{w\,p\,q'} \\ w\,w'\,A\,B \\ w\,l \end{array}\right\} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u'\,Q\,R \\ \underline{u'\,q'\,R'} \\ u'\,u\,B\,C \\ u'\,I \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'\,R\,P \\ \underline{v'\,r'\,P'} \\ v'\,v\,C\,A \\ v'\,K \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'\,P\,Q \\ \underline{w'\,p'\,Q} \\ w'\,w\,A\,B \\ w'\,L \end{array}\right\} = -1, \qquad 32.$$

$$\left.\begin{array}{l} u'\,Q'\,r' \\ \underline{u'\,q\,r} \\ u'\,u\,B\,C \\ u'\,i \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'\,R'\,p' \\ \underline{v'\,r\,p} \\ v'\,v\,C\,A \\ v'\,k \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'\,P'\,q' \\ \underline{w'\,p\,q} \\ w'\,w\,A\,B \\ w'\,l \end{array}\right\} = -1.$$

Zufolge 11 pag. 6, 7 pag. 4, 31 pag. 12 haben wir ferner die perspektivisch liegenden Dreiecke:

Dreiecke	Persp. Zentrum	Persp. Axe
ABC, PQR, pqr	... H, n, N	... $u'\,v'\,w'$
ABC, $PQ'r'$, $pq'R'$	... H, n', N'	... $u'\,v\,w$
ABC, $p'QR'$, $P'qr'$	... H, n'', N''	... $u\,v'\,w$
ABC, $P'q'R$, $p'Q'r$	... H, n''', N'''	... $u\,v\,w'$,

d. h in der ersten Zeile:

Dreiecke	Persp. Zentrum	Persp. Axe
PQR, pqr	... H	... $u'\,v'\,w'$
pqr, ABC	... n	... $u'\,v'\,w'$
ABC, PQR	... N	... $u'\,v'\,w'$

und analog in den folgenden Zeilen.

Vergleichen wir in 32 eines der durch u gehenden Systeme mit den beiden durch u' gehenden Systemen, so haben dieselben je den Strahl $u\,u'\,B\,C$ gemein und liegen somit perspektivisch. Es liegen daher je in einer Geraden die Punkte:

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\} = Q, \quad \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\} = q', \quad \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,I \end{array}\right\} = I$$

$$\left.\begin{array}{l} u\,Q\,R' \\ u'\,q'\,R' \end{array}\right\} = R', \quad \left.\begin{array}{l} u\,q'\,R \\ u'\,Q\,R \end{array}\right\} = R, \quad \left.\begin{array}{l} u\,I \\ u'\,I \end{array}\right\} = I$$

$$\begin{array}{lll}
\left.\begin{matrix} u\,Q\,R' \\ u'\,Q'\,r' \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,q'\,R \\ u'\,q\,r \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} \\
\left.\begin{matrix} u\,Q\,R' \\ u'\,q\,r \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,q'\,R \\ u'\,Q'\,r' \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} \\
\left.\begin{matrix} u\,Q'\,r \\ u'\,Q\,R \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,q\,r' \\ u'\,q'\,R' \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,I \end{matrix}\right\} \\
\left.\begin{matrix} u\,Q'\,r \\ u'\,q'\,R' \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,q\,r' \\ u'\,Q\,R \end{matrix}\right\}, & \left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,I \end{matrix}\right\} \\
\left.\begin{matrix} u\,Q'\,r \\ u'\,Q'\,r' \end{matrix}\right\} = Q', & \left.\begin{matrix} u\,q\,r' \\ u'\,q\,r \end{matrix}\right\} = q, & \left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,i \end{matrix}\right\} = i \\
\left.\begin{matrix} u\,Q'\,r \\ u'\,q\,r \end{matrix}\right\} = r, & \left.\begin{matrix} u\,q\,r' \\ u'\,Q'\,r' \end{matrix}\right\} = r, & \left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,i \end{matrix}\right\} = i.
\end{array}$$

Von diesen 8 Geraden sind die zwei erstern und die zwei letztern schon durch die Definitionen 4 der Punkte Q, q, Q', q', R, r, R', r' gegeben; aus diesen Definitionen gehen nämlich die Geraden hervor ($Q\,q'$, $I\,C$), ($Q'\,q$, $i\,C$), ($R'\,R$, $I\,B$), ($r\,r'$, $i\,B$), und laut 15 sind die hier auftretenden Punktenpaare je zu einander harmonisch.

Die vier mittleren Geraden aber im obigen Tableau sind neu, und auf denselben liegen 4 mal je 3 von 10 neuen Punkten. Und durch das Buchstabenrad erhalten wir in unserer Figur 30 neue Punkte, von denen 12 mal je 3 in einer neuen Geraden liegen:

$$\begin{array}{ll}
\left.\begin{matrix} u\,Q\,R' \\ u'\,Q'\,r' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,q'\,R \\ u'\,q\,r \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} \ldots & \text{Gerade Ia} \\
\left.\begin{matrix} u\,Q\,R' \\ u'\,q\,r \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,q'\,R \\ u'\,Q'\,r' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} \ldots & \text{Gerade IIa} \\
\left.\begin{matrix} u\,Q'\,r \\ u'\,Q\,R \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,q\,r' \\ u'\,q'\,R' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,I \end{matrix}\right\} \ldots & \text{Gerade IIIa} \\
\left.\begin{matrix} u\,Q'\,r \\ u'\,q'\,R' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,q\,r' \\ u'\,Q\,R \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,I \end{matrix}\right\} \ldots & \text{Gerade IVa}
\end{array} \qquad 33.$$

und:

$$\begin{array}{ll}
\left.\begin{matrix} v\,R\,P' \\ v'\,R'\,p' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,r'\,P \\ v'\,r\,p \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,K \\ v'\,k \end{matrix}\right\} \ldots & \text{Gerade Ib} \\
\left.\begin{matrix} v\,R\,P' \\ v'\,r\,p \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,r'\,P \\ v'\,R'\,p' \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} v\,K \\ v'\,k \end{matrix}\right\} \ldots & \text{Gerade IIb}
\end{array} \qquad 34.$$

$$\left.\begin{matrix} v\,R'\,p \\ v'\,R\,P \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} v\,r\,p' \\ v'\,r'\,P' \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} v\,k \\ v'\,K \end{matrix}\right\} \;..\; \text{Gerade IIIb} \qquad 34.$$

$$\left.\begin{matrix} v\,R'\,p \\ v'\,r'\,P' \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} v\,r\,p' \\ v'\,R\,P \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} v\,k \\ v'\,K \end{matrix}\right\} \;..\; \text{Gerade IVb}$$

und:

$$\left.\begin{matrix} w\,P\,Q' \\ w'\,P'\,q' \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,p'\,Q \\ w'\,p\,q \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,L \\ w'\,l \end{matrix}\right\} \;..\; \text{Gerade Ic}$$

$$\left.\begin{matrix} w\,P\,Q' \\ w'\,p\,q \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,p'\,R \\ w'\,P'\,q' \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,L \\ w'\,l \end{matrix}\right\} \;..\; \text{Gerade IIc} \qquad 35.$$

$$\left.\begin{matrix} w\,P'\,q \\ w'\,P\,Q \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,p\,q' \\ w'\,p'\,Q' \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,l \\ w'\,L \end{matrix}\right\} \;..\; \text{Gerade IIIc}$$

$$\left.\begin{matrix} w\,P'\,q \\ w'\,p'\,Q' \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,p\,q' \\ w'\,P\,Q \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} w\,l \\ w'\,L \end{matrix}\right\} \;..\; \text{Gerade IVc.}$$

Wir werden aber in der Folge sehen, dass von diesen 12 Geraden 33, 34, 35 nur 6 voneinander verschieden sind, indem

$$\begin{matrix} \text{Ib} = \text{IVc}, & \text{IIc} = \text{IIIb} \\ \text{Ic} = \text{IVa}, & \text{IIa} = \text{IIIc} \\ \text{Ia} = \text{IVb}, & \text{IIb} = \text{IIIa.} \end{matrix}$$

Die Strahlen i u und I u mögen den Kreis um B C als Durchmesser wieder respektive in I′ und i′ schneiden, so gehen die Geraden i i′ und I I′ durch den zu u in Bezug auf B C harmonischen Punkt, also durch u′.

Der obige Punkt $\left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} = i' = \left\{\begin{matrix} \text{Ia} \\ \text{IIa} \end{matrix}\right.$ und der Punkt $\left.\begin{matrix} u\,i \\ u'\,I \end{matrix}\right\} = I' = \left\{\begin{matrix} \text{IIIa} \\ \text{IVa} \end{matrix}\right.$ liegen also auf dem um BC als Durchmesser beschriebenen Kreise symmetrisch zu BC, und der Punkt 𝔄, wo die zu BC senkrechte Gerade i′ I′ die Seite BC schneidet, ist der zum Höhenfusspunkte D in Bezug auf die Strecke u u′ harmonische Punkt. 36.

In dem von den Geraden u Q R′, u q′ R, u′ Q′ r′, u′ q r gebildeten Vierseit sind die Geraden Ia und IIa die beiden von u u′ verschiedenen Diagonalen, und der Punkt $\left.\begin{matrix} u\,I \\ u'\,i \end{matrix}\right\} = i'$ ist neben u und u′ der dritte Diagonalpunkt. Die Punkte, wo Ia und IIa die Seite BC schneiden, sind respektive harmonisch zum Schnittpunkte i′ von Ia und IIa in Bezug auf je die beiden ersten in 33 angegebenen Punkte der Geraden Ia und IIa. Die Geraden Ia und IIa liegen harmonisch zu den Geraden i′uI und i′iu′, und analog liegen IIIa, und IVa harmonisch zu I′ui und I′Iu′. 37.

§ 7.

In unserer Figur gehen durch den Punkt u fünfzehn voneinander verschiedene Gerade, die fünf Systeme von je vier harmonischen Strahlen bilden:

uu′BC,	uHPp;	uKl,	ukL	... 16	
uu′BC,	uASS′;	uv′w,	uvw′	... 26	
uHPp,	uASS′;	uNn′,	unN′	... 30	38.
uu′BC,	uIi′;	uQR′,	uq′R	... 32	
uu′BC,	uiI′;	uQ′r,	uqr′	... 32	

Analog durch den Punkt u′:

u′uBC,	u′HP′p′;	u′KL,	u′kl	... 17	
u′uBC,	u′AS″S‴;	u′vw,	u′v′w′	... 26	
u′HP′p′,	u′AS″S‴;	u′N″N‴,	u′n″n‴	... 30	39.
u′uBC,	u′II′;	u′QR,	u′q′R′	... 32	
u′uBC,	u′ii′;	u′Q′r′,	u′qr	... 32	

Das Buchstabenrad gibt die analogen Geraden durch die Punkte v, v′, w, w′.

Wo auf einer dieser Geraden in 38 oder 39 vier Buchstaben auftreten, so stellen diese je ein System von vier harmonischen Punkten dar.

Wo nur drei Punkte auf einer dieser Geraden auftreten, so lässt sich der vierte harmonische Punkt immer leicht ergänzen z. B.:

Der auf uKl zu l harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle BLp′P. Siehe 18.

Der auf ukL zu L harmonische Punkt ist der Schnittpunkt mit dem Strahle BlpP′. Siehe 18.