Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 4
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\begin{array}{llll}
(AK, Rr') = -1, & (BL, Pp') = -1, & (CI, Qq') = -1, & \\
(Ak, rR') = -1, & (Bl, pP') = -1, & (Ci, qQ') = -1, & \quad 15. \\
(AL, QQ') = -1, & (BI, RR') = -1, & (CK, PP') = -1, & \\
(Al, qq') = -1, & (Bi, rr') = -1, & (Ck, pp') = -1. &
\end{array}$$

Durch jeden der Punkte u, v, w, u', v', w' gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left.\begin{array}{l} uKl \\ \underline{ukL} \\ uPpH \\ uu'BC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} vLi \\ \underline{vlI} \\ vQqH \\ vv'CA \end{array}\right\} = -1. \quad \left.\begin{array}{l} wIk \\ \underline{wiK} \\ wRrH \\ ww'AB \end{array}\right\} = -1, \qquad 16.$$

$$\left.\begin{array}{l} u'KL \\ \underline{u'kl} \\ u'P'p'H \\ u'uBC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} v'LI \\ \underline{v'li} \\ v'Q'q'H \\ v'vCA \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} w'IK \\ \underline{w'ik} \\ w'R'r'H \\ w'wAB \end{array}\right\} = -1. \qquad 17.$$

Durch jede Ecke des Dreiecks ABC gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} ABww' \\ \underline{AHIi} \\ AkrR' \\ AKr'R \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BCuu' \\ \underline{BHKk} \\ BlpP' \\ BLp'P \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CAvv' \\ \underline{CHLl} \\ CiqQ' \\ CIq'Q \end{array}\right\} = -1, \\
\left.\begin{array}{l} ACvv' \\ \underline{AHIi} \\ Alqq' \\ ALQQ' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} BAww' \\ \underline{BHKk} \\ Birr' \\ BIRR' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} CBuu' \\ \underline{CHLl} \\ Ckpp' \\ CKPP' \end{array}\right\} = -1.
\end{array} \qquad 18.$$

§ 4.

Die Dreiecke ABC, IKL, ikl liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum H, und somit liegen die Punkte

$$\left.\begin{array}{r} BC \\ KL \\ kl \end{array}\right\} = u', \quad \left.\begin{array}{r} CA \\ LI \\ li \end{array}\right\} = v', \quad \left.\begin{array}{r} AB \\ IK \\ ik \end{array}\right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der genannten drei Dreiecke. Da nun u, v, w zu u′ v′ w′ respektive in Bezug auf BC, CA, AB harmonisch liegen, so folgt weiter:

Es schneiden sich je in einem nämlichen Punkte die Geraden:

$$\left.\begin{matrix}A\,u\\B\,v\\C\,w\end{matrix}\right\} = S,\quad \left.\begin{matrix}A\,u\\B\,v'\\C\,w'\end{matrix}\right\} = S',\quad \left.\begin{matrix}A\,u'\\B\,v\\C\,w'\end{matrix}\right\} = S'',\quad \left.\begin{matrix}A\,u'\\B\,v'\\C\,w\end{matrix}\right\} = S''', \qquad 19.$$

und es liegen in einer Geraden die Punkte:

$$\left.\begin{array}{l}
u', v', w' \,..\, \text{Gerade } s \;\;= \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N}{IKL}, \overset{n}{ikl}\\
u', v, w \,..\, \text{Gerade } s' \;= \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N'}{iKL}, \overset{n'}{Ikl}\\
u, v', w \,..\, \text{Gerade } s'' = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N''}{IkL}, \overset{n''}{iKl}\\
u, v, w' \,..\, \text{Gerade } s''' = \text{persp. Axe der Dreiecke } \overset{o}{ABC}, \overset{N'''}{IKl}, \overset{n'''}{ikL}.
\end{array}\right\} \quad 20.$$

Alle diese 9 Dreiecke haben den Höhenpunkt H von ABC zum gemeinsamen perspektivischen Zentrum. Oberhalb dieser Dreiecke haben wir je das Umkreiszentrum des betreffenden Dreiecks hingeschrieben.

Die Geraden s, s′, s″, s‴ sind die harmonischen Polaren der Punkte S, S′, S″, S‴ in Bezug auf das Dreieck ABC.

Die Strahlen HQqv und HRrw mögen BC in y und in z schneiden. Projizieren wir nun das Höhenperpendikel AHDiI von B aus auf rR und von C aus auf qQ, so erhalten wir, wenn wir mit $\sim$ die projektivische Beziehung bezeichnen

$$(A, H, D, i, I) \sim (w, H, z, r, R) \text{ und}$$
$$(A, H, D, i, I) \sim (v, H, y, q, Q).$$

Daher auch B (v, H, y, q, Q) $\sim$ C (w, H, z, r, R), und da By und Cz eine nämliche Gerade bilden, so folgt:

$$\text{Die Punkte } \left.\begin{matrix}B\,v\\C\,w\end{matrix}\right\} = S,\; \left.\begin{matrix}B\,H\\C\,H\end{matrix}\right\} = H,\; \left.\begin{matrix}B\,q\\C\,r\end{matrix}\right\} = n,\; \left.\begin{matrix}B\,Q\\C\,R\end{matrix}\right\} = N$$

liegen in einer nämlichen Geraden, und da nach 14 (vH, qQ) $= -1$, so hat man auch (HS, nN) $= -1$.

Wir erhalten somit vier neue ausgezeichnete Gerade im Dreieck:

$$\begin{array}{l} H, S, \quad n, \quad N \;\ldots \text{Gerade } h \\ H, S', \; n', \; N' \;\ldots \text{Gerade } h' \\ H, S'', \; n'', \; N'' \ldots \text{Gerade } h'' \\ H, S''', n''', N''' \ldots \text{Gerade } h''', \end{array} \qquad 21.$$

und die ausgezeichneten vier Punkte auf jeder dieser Geraden liegen je zueinander harmonisch:

$$\begin{array}{c} (HS, nN) = -1, \ (HS', n'N') = -1, \\ (HS'', n''N'') = -1, \ (HS''', n'''N''') = -1. \end{array} \qquad 22.$$

Die Punkte S u. s. w. sind durch 19, die Punkte n und N u. s. w. durch 7 definiert.

Aus der Definition der vier Punkte S in 19 geht hervor: Das Viereck $SS'S''S'''$ hat zu Diagonalpunkten die Ecken A, B, C des Stammdreiecks, indem

$$\left.\begin{array}{l} SS' \\ S''S''' \end{array}\right\} = A, \quad \left.\begin{array}{l} SS'' \\ S'''S' \end{array}\right\} = B, \quad \left.\begin{array}{l} SS''' \\ S'S'' \end{array}\right\} = C. \qquad 23.$$

Die obigen Geraden h, h', h'', h''' stellen also die Strahlen dar, die man in einem gegebenen Viereck $SS'S''S'''$ vom Höhenpunkt H des Dreiecks der Diagonalpunkte nach den Ecken des gegebenen Vierecks zieht.

Nach 19 liegen ferner auf SS' der Punkt u und auf $S''S'''$ der Punkt u'. Aber u und u' liegen auf BC, und somit haben wir auch:

$$\begin{array}{l} u = \left\{\begin{array}{l} ASS' \\ BC \end{array}\right., \quad v = \left\{\begin{array}{l} BSS'' \\ CA \end{array}\right., \quad w = \left\{\begin{array}{l} CSS''' \\ AB \end{array}\right., \\ u' = \left\{\begin{array}{l} AS''S''' \\ BC \end{array}\right., \quad v' = \left\{\begin{array}{l} BS'''S' \\ CA \end{array}\right., \quad w' = \left\{\begin{array}{l} CS'S'' \\ AB. \end{array}\right. \end{array} \qquad 24.$$

Im Viereck $SS'S''S'''$ stellen somit die Punktenpaare u, u'; v, v'; w, w' die Schnittpunkte je einer Diagonalen mit dem durch den dritten Diagonalpunkt gehenden Gegenseitenpaare dar.

Und es bestehen somit die harmonischen Relationen:

$$(Au,\ SS') = -1,\quad (Bv,\ SS'') = -1,\quad (Cw,\ SS''') = -1$$
$$(Au',\ S''S''') = -1,\quad (Bv',\ S'''S') = -1,\quad (Cw',\ S'S'') = -1 \qquad 25.$$

und ferner

$$\left.\begin{array}{l} uASS' \\ \underline{uu'BC} \\ uv'w \\ uvw' \end{array}\right\} = -1,\quad \left.\begin{array}{l} vBSS'' \\ \underline{vv'CA} \\ vw'u \\ vwu' \end{array}\right\} = -1,\quad \left.\begin{array}{l} wCSS''' \\ \underline{ww'AB} \\ wu'v \\ wuv' \end{array}\right\} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u'AS''S''' \\ \underline{u'uBC} \\ u'vw \\ u'v'w' \end{array}\right\} = -1,\quad \left.\begin{array}{l} v'BS'''S' \\ \underline{v'vCA} \\ v'wu \\ v'w'u' \end{array}\right\} = -1,\quad \left.\begin{array}{l} w'CS'S'' \\ \underline{w'wAB} \\ w'uv \\ w'u'v' \end{array}\right\} = -1. \qquad 26.$$

§ 5.

Betrachten wir jetzt das Viereck $nNn'N'$.

Aus 8 folgt $\left.\begin{matrix} NN' \\ nn' \end{matrix}\right\} = A$, und aus 21 $\left.\begin{matrix} nN \\ n'N' \end{matrix}\right\} = H$. Es sind also A und H zwei Diagonalpunkte des Vierecks. Gemäss 22 sind aber auf den durch H gehenden Gegenseiten je die Punkte S und S′ zu H harmonisch; die zweite durch A gehende Diagonale ist somit die Gerade ASS', und der dritte Diagonalpunkt ist der zu A in Bezug auf SS' harmonische Punkt d. h. nach 25 der Punkt u, und wir finden somit $\left.\begin{matrix} nN' \\ n'N \end{matrix}\right\} = u$.

Aus 8 folgt ferner, dass P auf AN und p auf An liegt, und gemäss 14 liegen P und p auf Hu; wir haben also $P = \left\{\begin{matrix} ANN' \\ uH \end{matrix}\right.$, $p = \left\{\begin{matrix} Ann' \\ uH \end{matrix}\right.$, und die harmonischen Eigenschaften des Vierecks $nNn'N'$ ergeben $(APNN') = -1$ und $(Ap,\ nn') = -1$.

Betrachten wir ebenso die Vierecke $nNn''N''$, $nNn'''N'''$, und $n''N''n'''N'''$, $n'''N'''n'N'$, $n'N'n''N''$, so erhalten wir:

Viereck $nNn'N'$	. . . Diagonalpunkte H, A, u	
Viereck $nNn''N''$	. . . Diagonalpunkte H, B, v	
Viereck $nNn'''N'''$	. . . Diagonalpunkte H, C, w	27.
Viereck $n''N''n'''N'''$	. . . Diagonalpunkte H, A, u'	
Viereck $n'''N'''n'N'$	. . . Diagonalpunkte H, B, v'	
Viereck $n'N'n''N''$	. . . Diagonalpunkte H, C, w',	