Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: 3
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Von den 12 zuletzt eingeführten Geraden schneiden sich daher noch 8 mal je 3 in einem nämlichen Punkte. Nämlich wir haben

$$\left.\begin{matrix} AP \\ BQ \\ CR \end{matrix}\right\} = N = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IKL,$$

$$\left.\begin{matrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{matrix}\right\} = n = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } ikl,$$

$$\left.\begin{matrix} AP \\ BQ' \\ Cr' \end{matrix}\right\} = N' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } iKL,$$

$$\left.\begin{matrix} Ap \\ Bq' \\ CR' \end{matrix}\right\} = n' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } Ikl,$$

$$\left.\begin{matrix} Ap' \\ BQ \\ CR' \end{matrix}\right\} = N'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IkL, \qquad 7.$$

$$\left.\begin{matrix} AP' \\ Bq \\ Cr' \end{matrix}\right\} = n'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } iKl,$$

$$\left.\begin{matrix} AP' \\ Bq' \\ CR \end{matrix}\right\} = N''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } IKl,$$

$$\left.\begin{matrix} Ap' \\ BQ' \\ Cr \end{matrix}\right\} = n''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } ikL.$$

Dies vorausgesetzt haben wir auf den in 6 eingeführten 12 Geraden je die Punkte

$$\begin{matrix} APNN', & BQNN'', & CRNN''' \\ Apnn', & Bqnn'', & Crnn''' \\ AP'n''N''', & BQ'n'''N', & CR'n'N'' \\ Ap'N''n''', & Bq'N'''n', & Cr'N'n''. \end{matrix} \qquad 8.$$

§ 3.

Da $AK = Ak = AL = Al$, so liegen die vier Punkte K, k, L, l auf einem Kreise vom Mittelpunkt A. Auf diesem Kreise

hat das Viereck K k L l die Eigenschaft, dass von den Gegenseiten K k und L l jede durch den Pol der andern geht. Da ferner $\overline{AK}^2 = AE \cdot AC$, so ist der obige Kreis A orthogonal zum Kreise um B C als Durchmesser.

Betrachten wir einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt wir A nennen, ziehen in diesem Kreise irgend eine Sehne L l, deren Pol wir mit B bezeichnen, und legen durch B irgend eine zweite Sehne K k, so liegt der Pol C von K k auf der Polaren von B d. h. auf der Geraden L l. Sei endlich $\left.\begin{matrix}Kk\\Ll\end{matrix}\right\} = H$, so ist H der Pol der Geraden B C.

Dies vorausgesetzt ist die Figur A B C H K k L l identisch mit der in §§ 1 und 2 ebenso bezeichneten Figur. Denn die Geraden B K k und C L l stehen respektive senkrecht zu A C und zu A B, und somit ist H der Höhenpunkt des Dreiecks A B C, und da A K und A k respektive senkrecht zu C K und C k stehen, so sind K und k die Schnittpunkte des Höhenperpendikels B E von A B C mit dem um A C als Durchmesser beschriebenen Kreise, und analog sind L und l die Schnittpunkte des Höhenperpendikels C F von A B C mit dem um A B als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Im Viereck K k L l ist der eine Diagonalpunkt $H = \left\{\begin{matrix}Kk,\\Ll\end{matrix}\right.$ und die zwei andern Diagonalpunkte seien u und u′, nämlich

$$u = \left\{\begin{matrix}Kl\\kL\end{matrix}\right., \quad u' = \left\{\begin{matrix}KL\\kl.\end{matrix}\right.$$

Dies vorausgesetzt liegen u und u′ auf den Polaren B C von H in Bezug auf den Kreis A, und man hat $(BC, u\,u') = -1$.

Die Polare von u′ ist die Gerade H u, und auf dieser liegen die Pole der Geraden u′ K L und u′ k l, d. h.:

Die Punkte $P = \left\{\begin{matrix}BL\\CK\end{matrix}\right.$ und $p = \left\{\begin{matrix}Bl\\Ck\end{matrix}\right.$ liegen auf H u.

Die Polare von u ist die Gerade H u′, und auf dieser liegen die Pole der Geraden u K l und u k L, d. h.:

Die Punkte $P' = \left\{\begin{matrix}Bl\\CK\end{matrix}\right.$ und $p' = \left\{\begin{matrix}BL\\Ck\end{matrix}\right.$ liegen auf H u′.

Wir erhalten also den Satz:

Die Geraden Pp und $P'p'$ gehen durch den Punkt H, und schneiden BC respektive in den Punkten u und u'.

Betrachten wir jetzt ebenso die Vierecke $LlIi$ und $IiKk$, so haben wir die folgenden Resultate:

Seien u, v, w, u', v', w' die Punkte:

$$u = \begin{cases} Kl \\ kL \end{cases}, \quad v = \begin{cases} Li \\ lI \end{cases}, \quad w = \begin{cases} Ik \\ iK \end{cases},$$
$$u' = \begin{cases} KL \\ kl \end{cases}, \quad v' = \begin{cases} LI \\ li \end{cases}, \quad w' = \begin{cases} IK \\ ik \end{cases}, \qquad 9.$$

so liegen u, u' auf der Geraden BC; v, v' auf der Geraden CA; w, w' auf der Geraden AB, und teilen je diese Strecken harmonisch, d. h.:

$$(BC, uu') = -1, \quad (CA, vv') = -1, \quad (AB, ww') = -1. \qquad 10.$$

Ferner gehen die Geraden:

$$Pp, P'p', Qq, Q'q', Rr, R'r' \qquad 11.$$

alle durch den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC, und die Geraden HPp und $HP'p'$ schneiden BC respektive in den Punkten u und u'; die Geraden HQq und $HQ'q'$ schneiden CA in den Punkten v und v'; die Geraden HRr und $HR'r'$ schneiden AB in den Punkten w und w'.

In Folge von 10 haben wir daher die harmonischen Strahlsysteme:

$$\left.\begin{matrix} HB & kK \\ HC & lL \\ \hline Hu & Pp \\ Hu' & P'p' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HC & lL \\ HA & iI \\ \hline Hv & Qq \\ Hv' & Q'q' \end{matrix}\right\} = -1, \quad \left.\begin{matrix} HA & iI \\ HB & kK \\ \hline Hw & Rr \\ Hw' & R'r' \end{matrix}\right\} = -1. \qquad 12.$$

Das Viereck $PpP'p'$ hat zu Diagonalpunkten B, C, H,
Das Viereck $QqQ'q'$ hat zu Diagonalpunkten C, A, H, 13.
Das Viereck $RrR'r'$ hat zu Diagonalpunkten A, B, H,

und wir haben die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{matrix} (Pp, Hu) = -1, & (Qq, Hv) = -1, & (Rr, Hw) = -1, \\ (P'p', Hu') = -1, & (Q'q', Hv') = -1, & (R'r', Hw') = -1, \end{matrix} \qquad 14.$$

und ferner auf den durch die Ecken A, B, C des Stammdreiecks gehenden Strahlen die harmonischen Punktsysteme:

$$\begin{array}{lll} (AK, Rr') = -1, & (BL, Pp') = -1, & (CI, Qq') = -1, \\ (Ak, rR') = -1, & (Bl, pP') = -1, & (Ci, qQ') = -1, \\ (AL, QQ') = -1, & (BI, RR') = -1, & (CK, PP') = -1, \\ (Al, qq') = -1, & (Bi, rr') = -1, & (Ck, pp') = -1. \end{array} \quad 15.$$

Durch jeden der Punkte u, v, w, u', v', w' gehen nun 4 Strahlen, die in Folge der harmonischen Relationen 2 je ein System von 4 harmonischen Strahlen bilden:

$$\left.\begin{array}{c} uKl \\ ukL \\ \hline uPpH \\ uu'BC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{c} vLi \\ vlI \\ \hline vQqH \\ vv'CA \end{array}\right\} = -1. \quad \left.\begin{array}{c} wIk \\ wiK \\ \hline wRrH \\ ww'AB \end{array}\right\} = -1, \quad 16.$$

$$\left.\begin{array}{c} u'KL \\ u'kl \\ \hline u'P'p'H \\ u'uBC \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{c} v'LI \\ v'li \\ \hline v'Q'q'H \\ v'vCA \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{c} w'IK \\ w'ik \\ \hline w'R'r'H \\ w'wAB \end{array}\right\} = -1. \quad 17.$$

Durch jede Ecke des Dreiecks ABC gehen 2 Systeme von je 4 harmonischen Strahlen, wo aber das betreffende Höhenperpendikel beiden Systemen angehört:

$$\left.\begin{array}{c} ABww' \\ AHIi \\ \hline AkrR' \\ AKr'R \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{c} BCuu' \\ BHKk \\ \hline BlpP' \\ BLp'P \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{c} CAvv' \\ CHLl \\ \hline CiqQ' \\ CIq'Q \end{array}\right\} = -1,$$

$$\left.\begin{array}{c} ACvv' \\ AHIi \\ \hline Alqq' \\ ALQQ' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{c} BAww' \\ BHKk \\ \hline Birr' \\ BIRR' \end{array}\right\} = -1, \quad \left.\begin{array}{c} CBuu' \\ CHLl \\ \hline Ckpp' \\ CKPP' \end{array}\right\} = -1. \quad 18.$$

§ 4.

Die Dreiecke ABC, IKL, ikl liegen perspektivisch mit dem gemeinsamen perspektivischen Zentrum H, und somit liegen die Punkte

$$\left.\begin{array}{c} BC \\ KL \\ kl \end{array}\right\} = u', \quad \left.\begin{array}{c} CA \\ LI \\ li \end{array}\right\} = v', \quad \left.\begin{array}{c} AB \\ IK \\ ik \end{array}\right\} = w'$$

in einer Geraden, der gemeinsamen perspektivischen Axe der